1. valószínűségszámítás pótzárthelyi, 2017-05-03, FELADATOK, MEGOLDÁSOK ÉS PONTOZÁS

1. 130 hallgató mindegyike egymástól függetlenül 0.2 valószínűséggel jár órára. A teremben 30 kényelmes szék van, a többi kényelmetlen.

   a) Mi a valószínűsége annak, hogy aki elmegy órára, mind kényelemes székre tud ülni? Írja fel a valószínűséget matematikai vagy Excel képlettel!

   Megoldás:
   Annak a valószínűsége, hogy 30 vagy kevesebb diák jelenik meg, Excel képlettel:

   $$\texttt{BINOM.ELOSZLÁS(30 ; 130 ; 0.2 ; IGAZ)} = 0.83$$

   Matematikai képlettel:

   $$\sum_{x=0}^{30} \binom{130}{x} 0.2^x (1-0.2)^{130-x}$$

   (4 pont)

   b) Hány diák megjelenése a legvalószínűbb?

   Megoldás:
   A válasz: $(n+1) \cdot p = 131 \cdot 0.2 = 26.2$ alsó egész része, ami 26. **(1 pont)**.
   (Ha várható értékre hivatkozik, vagy nem magyaráz, nem kap pontot.)

2. Blicc úr minden nap villamossal megy dolgozni, de nincs bérlete, sem jegye. A villamosra minden nap 0.2 valószínűséggel száll fel ellenőr, és ilyenkor 0.95 valószínűséggel elkapja Blicc urat. (Az ellenőr minden nap az addigiaktól függetlenül dönti el, ellenőrzi-e aznap Blicc úr villamosát.)

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" van, azaz az 5 munkanap egyikén sem kell büntetést fizetnie?

   Megoldás:
   Egyrészt

   $$\text{P(egy nap elkapják)} =$$
   $$= \text{P(jön ellenőr)} \cdot \text{P(elkapják | jön ellenőr)} = 0.2 \cdot 0.95 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

   Másrészt

   $$\text{P(5 nap szerencsés)} = (\ \text{P(egy nap szerencsés)}\ )^5 = \qquad \textbf{(1 pont)}$$
   $$= (\ 1 - \text{P(egy nap elkapják)}\ )^5 = (1 - 0.2 \cdot 0.95))^5 \quad (\ = 0.35) \qquad \textbf{(1 pont)}$$

   (b) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan kétszer kapják el egy hét munkanapjai alatt?

   Megoldás:
   Excel képlettel:

   $$\texttt{BINOM.ELOSZLÁS(2 ; 5 ; 0.2*0.95 ; HAMIS)} = 0.19$$

   Matematikai képlettel:

   $$\binom{5}{2} (0.2 \cdot 0.95)^2 \cdot (1 - 0.2 \cdot 0.95)^{5-2} (\quad = 0.19) \qquad \textbf{(2 pont)}$$

3. A dél-floridai Everglades National Park-ban nem azt szokás számolni, hogy hány szúnyog csíp meg, hanem azt, hogy hányat nyelsz le. Egy iskola diákjait elvitték a parkba. A diákok közül 200-an nyeltek le egyet, 50-en pedig kettőt.

   (a) Kb. hány diák jár az iskolába?

   (b) Átlagosan hány szúnyogot nyeltek a diákok? *(A használt eloszlás jogosságát indokolni kell!)*

   Megoldás **(a+b)** :
   Az, hogy egy kiszemelt diák, hány szúnyog nyel le, valószínűségi változó. Mivel a sok szúnyog mindegyikét – a többitől függetlenül – kis valószínűséggel nyeli le, ez a valószínűségi változó Poisson eloszlást követ valamilyen λ paraméterrel **(1 pont)**. Ezért annak a valószínűsége, hogy 1 szúnyogotnyel le, $\lambda e^{-\lambda}$. A 2 szúnyog valószínűsége pedig $\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$ **(1 pont)**. Ha a diákok számát N -nel jelöljük, és a valószínűségeket relatív gyakoriságokkal helyettesítjük, akkor a nagy számok törvénye szerint alábbi közelítések igazak:

$$\frac{200}{N} \approx \lambda e^{-\lambda} \qquad\qquad \frac{50}{N} \approx \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} \qquad\qquad \textbf{(2 pont)}$$

   A közelítéseket egyenlőséggel helyettesítve egy egyenletrendszert kapunk, aminek megoldása:

$$\lambda = 0.5 \qquad\qquad N = 659.4$$

   Tehát kb. 660 diák jár az iskolába, és átlagosan kb. $\lambda = 0.5$ szúnyogot nyel le egy-egy diák **(1 pont)**.

4. **(a)** Definiálja két diszkrét eloszlás konvolúciójának fogalmát!

   Megoldás:

   - Két eloszlás konvolúcióját úgy kapjuk meg, hogy a direkt szorzatukat a $z = x + y$ transzformációval a számegyenesre transzformáljuk,

   illetve

   - két olyan független valószínűségi változó összegének eloszlása, amelyek eloszlásai az adott eloszlások,

   avagy képlettel:

   - $r(z) = \sum\limits_{(x,y):\ x+y=z} p_1(x) \cdot p_2(y)$

   vagy

   - $r(z) = \sum\limits_{x} p_1(x) \cdot p_2(z-x)$

   vagy

   - $r(z) = \sum\limits_{y} p_1(z-y) \cdot p_2(y)$

   (Akármelyik válasz **2 pont**).

   (b) Én hatoldalú, barátom nyolcoldalú szabályos dobókockával dob. Határozza meg a dobott számok összegének az eloszlását!

   Megoldás:
   A 6-oldalú dobókockával az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számokat, a 8-oldalú dobókockával az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ számokat dobhatjuk. A lehetséges 48 darab

$$\begin{array}{cccccc}
(1,8) & (2,8) & (3,8) & (4,8) & (5,8) & (6,8) \\
(1,7) & (2,7) & (3,7) & (4,7) & (5,7) & (6,7) \\
(1,6) & (2,6) & (3,6) & (4,6) & (5,6) & (6,6) \\
(1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & (5,5) & (6,5) \\
(1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) & (6,4) \\
(1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (6,3) \\
(1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (6,2) \\
(1,1) & (2,1) & (3,1) & (4,1) & (5,1) & (6,1)
\end{array}$$

számpár mindegyikének $\frac{1}{48}$ a valószínűsége **(1 pont)**. A számpárok helyére a számok összegét írhatjuk:

9	10	11	12	6	14
8	9	10	11	12	13
7	8	9	10	11	12
6	7	8	9	10	11
5	6	7	8	9	10
4	5	6	7	8	9
3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7

Látjuk, hogy

- a 2 és a 14   1-szer,
- a 3 és a 13   2-szer,
- a 4 és a 12   3-szor,
- az 5 és a 11   4-szer,
- a 6 és a 10   5-ször,
- a 7, a 8, és a 9   6-szor

szerepel, ezért a dobott számok összegének az eloszlása:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\frac{1}{48}$	$\frac{2}{48}$	$\frac{3}{48}$	$\frac{4}{48}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{6}{48}$	$\frac{6}{48}$	$\frac{6}{48}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{4}{48}$	$\frac{3}{48}$	$\frac{2}{48}$	$\frac{1}{48}$

(2 pont).