2. valószínűségszámítás zárthelyi, 2017-04-19, FELADATOK, MEGOLDÁSOK ÉS PONTOZÁS

1. Egy városban a közlekedési "piros-sárga-zöld" lámpák élettartama (a zavartalan működés időtartama) exponenciális eloszlást követ. Az élettartam mediánja 7.5 hónap.

   (a) Mennyi a várható érték?

   Megoldás:
   A mediánt az $F(x) = \frac{1}{2}$ egyenletet definiálja.
   Exponenciális eloszlás esetén $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$, de λ -t egyelőre nem ismerjük.
   A medián $x = 7.5$, ezért $1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, 7.5} = \frac{1}{2}$, ahonnan $\lambda = \frac{\ln(2)}{7.5}$ **(3 pont)** .
   Exponenciális eloszlás esetén a várható érték $\frac{1}{\lambda}$.
   Ezért a várható érték $\lambda = \frac{7.5}{\ln(2)}$ $\quad (= 10.8$ hónap) **(1 pont)** .

   (b) Kísérleti eredményekből hogyan közelíthetjük az élettartam négyzetének a várható értékét?

   Megoldás:
   A nagy számok törvénye szerint: sok lámpa esetén az élettartamok négyzeteinek a tapasztalati átlaga közelíti az élettartam négyzetének az elméleti várható értékét **(1 pont)**.

2. **(a)** Vezesse le két független 0 és 1 között folytonos egyenletes eloszlású random szám hányadosa sűrűségfüggvényének a képletét!

   Megoldás:
   A feladat és a megoldás a jegyzet "Random számok transzformációi" fejezetében olvasható **(4 pont)**.

   (b) A hányados várható értéke végtelen. Magyarázza el kísérleti eredményekkel megfogalmazva, hogy mit jelent a gyakorlatban ez a tény! *Ez a magyarázat lehet Excelre hivatkozva is, Excel nélkül is.*

   Megoldás:
   A nagy számok törvénye szerint: ilyenkor – sok kísérlet esetén – a kísérleti eredmények átlaga nagy lesz. A kísérletszám növekedtével az átlag minden határon túl nő **(1 pont)**.

3. A λ paraméterű exponenciális eloszlást az $y = x^2$ transzfromációval transzformáljuk.

   (a) Határozza meg a kapott eloszlás jobboldali eloszlásfüggvényének a képletét!

   Megoldás:
   Mint tudjuk, az új $G(y)$ eloszlásfüggvény a régi $F(x)$ eloszlásfüggvényből és az $y = t(x)$ transzformáció $x = t^{-1}(y)$ inverzéből összetett függvényként adódik:

   $$G(y) = F\left(t^{-1}(y)\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{y}}$$

   Ezért a keresett jobboldali eloszlásfüggvény:

   $$T(y) = 1 - G(y) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{y}}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{y}}$$

   (2 pont)

   (b) Mutassa meg a jobboldali eloszlásfüggvény felhasználásával, hogy ha egy Y élettartam ezt az eloszlást követi, akkor igaz rá a

   $$\mathrm{P}(\,Y > s+t \,|\, Y > t\,) \;>\; \mathrm{P}(\,Y > s\,) \qquad (s, t > 0)$$

   fiatalodó tulajdonság!

   Megoldás:
   Igazolandó, hogy

   $$\frac{\mathrm{P}(\,Y > s+t\,)}{\mathrm{P}(\,Y > t\,)} \;>\; \mathrm{P}(\,Y > s\,)$$

Tehát igazolandó, hogy

$$\frac{T(\,s+t\,)}{T(\,t\,)} > T(\,s\,)$$

azaz

$$T(\,s+t\,) > T(\,s\,)\cdot T(\,t\,)$$

vagyis

$$\mathrm{e}^{-\lambda\,\sqrt{s+t}} > \mathrm{e}^{-\lambda\,\sqrt{s}}\cdot \mathrm{e}^{-\lambda\,\sqrt{t}}$$

Minkét oldal logaritmusát vesszük:

$$-\lambda\,\sqrt{s+t} > -\lambda\,\sqrt{s} - \lambda\,\sqrt{t}$$

$(-\lambda)$ -val osztunk:

$$\sqrt{s+t} < \sqrt{s} + \sqrt{t}$$

Négyzetre emelünk:

$$s+t < s+t+2\sqrt{s}\sqrt{t}$$

A kapott egyenlőtlenség nyilván igaz, hiszen

$$0 < 2\sqrt{s}\sqrt{t}$$

(2 pont)

(c) A képlettel megadott tulajdonságot miért jogos *fiatalodó tulajdonság*nak nevezni?

Megoldás:
A baloldali feltételes valószínűség azt fejezi ki, hogy egy t időt meghaladó élettartam milyen eséllyel halad meg további s időtartamot. A képlet szerint ez az esély nagyobb, mintha az élettartam 0-ból indulna. Tehát egy már leélt időtartam növeli a jövőre vonatkozó esélyeket. Ezt joggal nevezhetjük fiatalodásnak! **(1 pont)**

4. A szépséges Zöld Mezőn a fűszálak hossza normális eloszlást követ. A fűszálaknak kb. 7 százaléka hosszabb 40 cm -nél, és kb. 10 százaléka rövidebb 20 cm -nél.

(a) Mennyi a fűhossz várható értéke?

Megoldás:
Jelöljük a fűszál hosszát X -szel, a várható értéket μ -vel, a szórást σ -val. Mivel $\mathrm{P}(X > 40) = 0.07$, ezért

$$\mathrm{P}(X < 40) = \Phi\left(\frac{40-\mu}{\sigma}\right) = 0.93 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A Φ függvény táblázata alapján:

$$\frac{40-\mu}{\sigma} = 1.5 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Másrészt

$$\mathrm{P}(X < 20) = \Phi\left(\frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0.10$$

Mivel $\Phi(1.3) = 0.90$, ezért $\Phi(-1.3) = 0.10$, így a Φ függvény táblázata alapján:

$$\frac{20-\mu}{\sigma} = -1.3$$

μ -re és σ -ra két egyenletet kaptunk. Az egyenletrendszer megoldása:

$$\sigma = \frac{20}{2.8} \qquad\qquad \mu = 40 - \frac{30}{2.8} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Tehát a fűhossz várható értéke $\mu = 40 - \frac{30}{2.8} \qquad (= 29.28)$.

(b) Kb. hány fűszál esetén teljesül 92 százalékos biztonsággal, hogy a fűszálak átlagos hossza 1 cm -es pontosságon belül közelíti a várható értéket?

Megoldás:
A "Várható érték közelítése átlaggal" c. fejezetben kijött (a gondolatmenetet lásd ott), hogy ha a kísérletszám nagyobb, mint

$$\sigma^2 \quad \frac{\left[\phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

akkor az átlag q biztonság mellett ε -nál kisebb hibával közelíti a várható értéket. Ebbe a képletbe kell behelyettesíteni a $q = 0.9$, $\epsilon = 1$ és a fenti σ értéket, ami azt adja, hogy 139 fűszálra van szükség **(2 pont)**.

Standard normális eloszlásfüggvény
(két tizedes pontossággal)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,0	0,50	0,5	0,69	1,0	0,84	1,5	0,93	2,0	0,98	2,5	0,99
0,1	0,54	0,6	0,73	1,1	0,86	1,6	0,95	2,1	0,98	2,6	1,00
0,2	0,58	0,7	0,76	1,2	0,88	1,7	0,96	2,2	0,99		
0,3	0,62	0,8	0,79	1,3	0,90	1,8	0,96	2,3	0,99		
0,4	0,66	0,9	0,82	1,4	0,92	1,9	0,97	2,4	0,99		