1. valószínűségszámítás zárthelyi, 2017-03-22, FELADATOK, MEGOLDÁSOK, PONTOZÁS

1. Az egyetem hajókirándulást szervez a legjobb eredményeket elérő diákok számára. A hajón 200 hely van az utasok számára. Gondolván, hogy néhányan nem mennek majd el, 210 diákot hívnak meg a hajóra. Feltéve, hogy minden diák a többitől függetlenül 0.06 valószínűséggel nem megy el, mi annak a valószínűsége, hogy mégis 200-nál több diák jelenik meg? **a)** Írja fel a valószínűséget matematikai vagy Excel képlettel!

Megoldás:

A jegyzet "Binomiális eloszlás és társai" c. alfejezetében olvasható "Vajon mindenki le tud ülni?" c. példa mintájára – annak a valószínűsége, hogy 200 vagy kevesebb diák jelenik meg, Excel képlettel:

$$\texttt{BINOM.ELOSZLÁS(200 ; 210 ; 0.94 ; IGAZ)} = 0.86$$

Matematikai képlettel:

$$\sum_{x=0}^{200} \binom{210}{x} 0.94^x (1-0.94)^{210-x}$$

Ezért annak a valószínűsége, hogy 200-nál több diák jelenik meg, Excel képlettel:

$$\texttt{1 - BINOM.ELOSZLÁS(200 ; 210 ; 0.94 ; IGAZ)} = 0.86$$

Matematikai képlettel:

$$\sum_{x=201}^{210} \binom{210}{x} 0.94^x (1-0.94)^{210-x}$$

(4 pont)

b) Hány diák megjelenése a legvalószínűbb?

Megoldás:

A válasz: $(n+1) \cdot p = 211 \cdot 0.94 = 198.3$ alsó egész része, ami 198. **(1 pont)**

2. Vadász barátom hétköznapokon (hétfőtől péntekig) a rosszabbik puskáját használja. Ezzel a puskával minden lövése a többitől függetlenül csak 0.05 valószínűséggel teríti le a célba vett nyulat. Hétvégén (szombaton és vasárnap) a jobb puskájával lövöldöz. Ezzel a puskával minden lövése a többitől függetlenül 0.4 valószínűséggel teríti le a célba vett nyulat. Minden nap addig lövöldöz a nyulakra, míg sikerül egyet leterítenie. Azt mesélik, hogy egy bizonyos napon, melyről nem tudjuk, hogy a hét melyik napja volt, csak 2 lövést adott le a nyúlvadászaton, hogy teljesítse aznapi feladatát. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a sikeres nap hétköznap volt?

Megoldás:

A feladat és a megoldás a jegyzet "Geometriai eloszlások és társaik" c. alfejezetének elején található **(5 pont)**.

3. Sok éves tapasztalatunk szerint hétköznap délelőtt a tanszékünkre átlagosan kb. 15 percenként jön egy-egy telefonhívás.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy 10:30 és 10:50 között pontosan 2 hívás érkezik?

Megoldás:

A feladat (b) részében felsorolt tények alapján Poisson eloszlással dolgozhatunk. Átlagosan $20/15 = 4/3 = 1.33$ hívás várható, ezért a várható érték $\lambda = 4/3 \quad (= 1.33)$ **(1 pont)**.

P(2 hívás) $= \frac{(4/3)^2}{2!} \mathrm{e}^{-4/3} \quad (= 0.23)$ **(1 pont)**.

b) Milyen eloszlást követ a hívások száma 10:30 és 10:50 között, és MIÉRT? *(Korrekt indoklást kérünk.)*

Megoldás:

Sok ember **(1 pont)** mindegyike a többitől függetlenül **(1 pont)** kis valószínűséggel **(1 pont)** telefonál a megadott időintervallumban.

4. Két szabályos dobókockával dobunk. X-szel jelöljük a dobott számok kisebbikét, Y-nal a nagyobbikat. Ha a dobott számok egyenlőek, akkor természetesen $X = Y$.

a) Számolja ki X várható értékét, és *sok kísérleti eredményre hivatkozva* magyarázza el, hogy a valóságban mit jelent a várható érték fogalma!
Megoldás:
Két kockával dobva 36 egyformán valószínű kimenetel van.

- $\mathrm{P}(X = 1) = 11/36$, hiszen az $X =$ 1 esemény számára 11 kedvező kimenetel van:

$$11 \;\; 12 \;\; 13 \;\; 14 \;\; 15 \;\; 16 \;\; 21 \;\; 31 \;\; 41 \;\; 51 \;\; 61$$

- $\mathrm{P}(X = 2) = 9/36$, hiszen az $X = 2$ esemény számára 9 kedvező kimenetel van:

$$22 \;\; 23 \;\; 24 \;\; 25 \;\; 26 \;\; 32 \;\; 42 \;\; 52 \;\; 62$$

- $\mathrm{P}(X = 3) = 7/36$, hiszen az $X = 3$ esemény számára 7 kedvező kimenetel van:

$$33 \;\; 34 \;\; 35 \;\; 36 \;\; 43 \;\; 53 \;\; 63$$

- $\mathrm{P}(X = 4) = 5/36$, hiszen az $X = 4$ esemény számára 5 kedvező kimenetel van:

$$44 \;\; 45 \;\; 46 \;\; 54 \;\; 64$$

- $\mathrm{P}(X = 5) = 3/36$, hiszen az $X = 5$ esemény számára 3 kedvező kimenetel van:

$$55 \;\; 56 \;\; 65$$

- $\mathrm{P}(X = 6) = 1/36$, hiszen az $X = 6$ esemény számára 1 kedvező kimenetel van:

$$66$$

Ebből a várható érték:

$$1 \cdot 11/36 \; + \; 2 \cdot 9/36 \; + \; 3 \cdot 7/36 \; + \; 4 \cdot 5/36 \; + \; 5 \cdot 3/36 \; + \; 6 \cdot 1/36 \;\; = \;\; 2.53 \quad \textbf{(1 pont)}$$

Ha sok kísérletet végzünk, akkor a kísérleti eredmények átlaga közel lesz a várható értékhez. Ha sokszor feldobjuk a két dobókockát, és minden esetben felírjuk a kisebbik számot, akkor a felírt számok átlaga – nagy kísérletszám esetén – közel lesz 2.53 -hoz.
(1 pont)

b) Mi a valószínűsége annak, hogy $X = 4$, feltéve, hogy $Y = 4$?
Megoldás:
Az $Y = 4$ esemény számára 7 (egyforma valószínűségű) kedvező kimenetel van:

$$14 \;\; 24 \;\; 34 \;\; 44 \;\; 41 \;\; 42 \;\; 43$$

Ezek között egyetlen kedvez az $X = 4$ esemény számára. Ezért $\mathrm{P}(X = 4 | Y = 4) = 1/7$. **(1 pont)**

c) Számolja ki X feltételes várható értékét az $Y = 4$ feltétel mellett, és *sok kísérleti eredményre hivatkozva* magyarázza el hogy a valóságban mit jelent a feltételes várható érték fogalma!

Megoldás:

- $\mathrm{P}(X = 1 | Y = 4) = 2/7$, hiszen az $Y = 4$ feltétel mellett az $X = 1$ esemény számára 2 kedvező eset van:

$$14 \;\; 41$$

- $\mathrm{P}(X = 2|Y = 4) = 2/7$, hiszen az $Y = 4$ feltétel mellett az $X = 2$ esemény számára 2 kedvező eset van:

$$24 \quad 42$$

- $\mathrm{P}(X = 3|Y = 4) = 2/7$, hiszen az $Y = 4$ feltétel mellett az $X = 3$ esemény számára 2 kedvező eset van:

$$34 \quad 43$$

- $\mathrm{P}(X = 4|Y = 4) = 2/7$, hiszen az $Y = 4$ feltétel mellett az $X = 4$ esemény számára 1 kedvező eset van:

$$44$$

Ebből a feltételes várható érték:

$$1 \cdot 2/7 \; + \; 2 \cdot 2/7 \; + \; 3 \cdot 2/7 \; + \; 4 \cdot 1/7 \;\; = \;\; 2.29 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ha sok kísérletet végzünk, és csak azokat az X értékeket tartjuk meg, amikor a feltétel teljesül Y -ra, akkor a megtartott X értékek átlaga közel lesz a feltételes várható értékhez. Ha sokszor feldobjuk a két dobókockát, és csak akkor írjuk fel a kisebbik számot, amikor a nagyobbik 4 - gyel egyenlő, akkor a felírt számok átlaga közel lesz 2.29 -hez. **(1 pont)**