$\boxed{1}$

a.) $p(k) = \mathbb{P}(X=k) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ $k = 1,2,3\ldots$-re,

vagyis $X \sim Geom\left(\frac{2}{3}\right)$, geometriai eloszlású ← 2 pont

$p = \frac{2}{3}$ paraméterrel. ← 1 pont

(Esetleg: optimista geometriai)

2017 06 06

b.) $F(3) \overset{def}{=} \mathbb{P}(X \leq 3) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3)$

1 pont

$= \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} = \frac{26}{27}$ ← 2 pont

c.) $T(3) \overset{def}{=} \mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X=1) - \mathbb{P}(X=2) =$

1 pont

$= 1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$ ← 2 pont

d.) $F(x) + T(x) = 1 + p(x)$ ← 4 pont

mert

$F(x) + T(x) \overset{det}{=} \mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(X \geq x) = \underbrace{\mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(X > x)}_{1} + \underbrace{\mathbb{P}(X = x)}_{p(x)}$ $\blacksquare$

Alternatív pontozás:

Ha valaki az $F(x) := \mathbb{P}(X < x)$, $T(x) := \mathbb{P}(X \geq x)$

vagy $F(x) := \mathbb{P}(X \geq x)$, $T(x) := \mathbb{P}(X > x)$

konvenciót használja és ennek megfelelően a d.) részben

$F(x) + T(x) = 1$-et állít / bizonyít, teljes pontot kaphat.

Ha viszont keveri a konvenciókat és / vagy definíció nélkül

számol, vagy használja, hogy $F(x) + T(x) = 1$, akkor legfeljebb

fele pontszámot kaphat.

$P(\text{EGY HÍVÁS TÉVES}) = \frac{1}{10}$ 2 → JELÖLJÜK EZT AZ ESEMÉNYT A-VAL

$P(\text{A KÖVETKEZŐ 20 HÍVÁSBÓL PONTOSAN 2 TÉVES}) = P(A) = \binom{20}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)^{18}$ 3

$\boxed{2b}$ $P(\text{A ÉS AZ ELSŐ TÉVES NŐ, A 2. TÉVES FÉRFI}) =$

$\boxed{3}$

$= P(A) \cdot P(\text{ELSŐ TÉVES NŐ, A 2. TÉVES FÉRFI} \mid A) = \left[\binom{20}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)^{18}\right]\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right]$

TÉVESSÉG ÉS NEM FÜGGETLENEK

$\boxed{2c}$ SOKAN TELEFONÁLHATNAK EGYMÁSTÓL FÜGGETLENÜL KIS

$\boxed{3}$ VALÓSZÍNŰSÉGGEL AZ ADOTT ÓRA ALATT A TANSZÉKRE

ÍGY HA X JELÖLI AZ ADOTT ÓRA ALATT BEÉRKEZŐ HÍVÁSOK SZÁMÁT AKKOR X ELOSZLÁSA KÖZELÍTHETŐ POISSON ELOSZLÁSSAL 2

$\lambda_X = E(X) \approx \frac{50}{8}$. ÍGY EGÉSZ PONTOSAN $Poi\left(\frac{50}{8}\right)$ ELOSZLÁSSAL KÖZELÍTÜNK. 1

$\boxed{2d}$ Y: 2 ÓRA ALATTI TÉVES HÍVÁSOK SZÁMA

$\boxed{4}$ Y KÖZELÍTHETŐ POISSON ELOSZLÁSSAL (INDOKLÁS HASONLÓ, MINT A 2C-BEN)

SOKAN INDÍTHATNAK TÉVES HÍVÁST ...

$\lambda_Y = E(Y) \approx \frac{10}{8}$, 2 ÍGY $P(Y=2) = \frac{e^{-\frac{10}{8}}\left(\frac{10}{8}\right)^2}{2}$ 2

Scanned by CamScanner

3

Az időben érkező hallgatók X száma $B(45, 2/3)$ binom eloszlású

a.) $P=\sum_{k=23}^{45}\binom{45}{k}\left(2/3\right)^{k}\left(1/3\right)^{45-k}$ $\boxed{6\text{ pont}}$

(A késő hallgatókkal is lehet számolni. Ezek száma $B(45, 1/3)$ binom eloszlású)

b.) Moivre-Laplace tétel értelmében X közelítőleg normális eloszlású.

$EX=45\cdot 2/3=30$ $SDX=\sqrt{45\cdot 2/3\cdot 1/3}=\sqrt{10}\sim 3$

Standardizálással:

$P(X\geq 23)=1-P(X<23)=1-\Phi\left(\frac{23-30}{3}\right)=1-\Phi\left(-\frac{7}{3}\right)=\Phi(7/3)=0.99$

Megj: kicsit pontosabb eredményt kapunk, ha 23 helyett 22.5-del számolunk.

$\boxed{6\text{ pont}}$

c.) A kérdés $\max(X_1, X_2, X_{45})$ val. vált. elo. fv-e. Tudjuk, hogy ez béta-eloszlás.

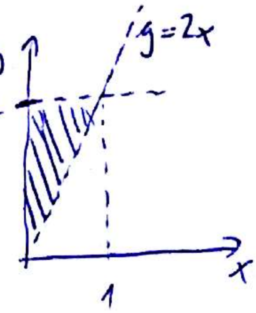
($X_1, X_2, \dots X_{45}$ az egyes hallgatók érkezési időpontjai)

$P(\max(X_1, X_2, \dots X_{45})<u)=P(X_1<u, X_2<u, \dots X_{45}<u)=P(X_i<u)^{45}=\left(\frac{u}{30}\right)^{45}$

– ahol $0\leq u\leq 30$ és kihasználtuk a függetlenséget és az egyenl. eloszlást

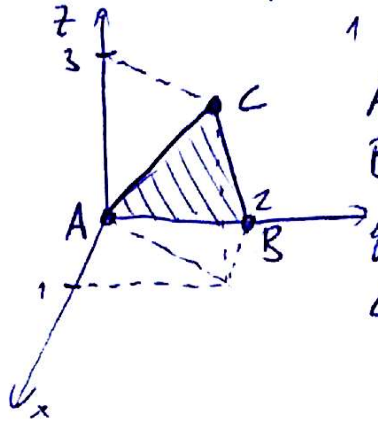
$\boxed{3\text{ pont}}$

1 a.) Értelmezési tartomány:



(2pont)

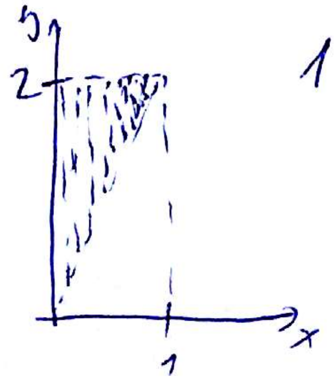
a) $z=f(x,y)$ felület:



$$\left.\begin{array}{l} A=(0,0,0) \\ B=(0,2,0) \\ C=(1,2,3) \end{array}\right\}$$ pontok által meghatározott háromszög

(1pont)

b.)



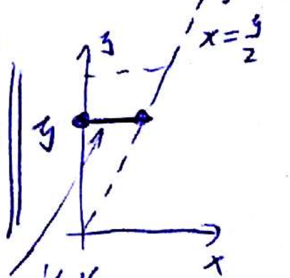
1 pont, ha a pontfelhő a $(0,0); (0,2); (1,2)$ háromszögben van

1 pont, ha x növekedésével a pontfelhő sűrűsége növekszik

c.) $$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{y/2} 3x\,dx = \left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^{y/2} = \frac{3y^2}{8}, & \text{ha } 0<y<2 \\ 0 & \text{, ha nem} \end{cases}$$

2 pont

2 pont



rögzített y mellett $x\in\left(0,\frac{y}{2}\right)$

d.) A nagy számok törvénye szerint az átlag az X várható értékéhez lesz közel, ezért az $\mathbb{E}X$-et keressük. (1pont)

$$\mathbb{E}X=\iint_{\mathbb{R}^2} x f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^2\int_0^{y/2} x\cdot 3x\,dx\,dy=\int_0^2 \frac{y^3}{8}\,dy=\frac{1}{2}$$, avagy

$$\mathbb{E}X=\int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)\,dx$$, ahol $$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy=\begin{cases} \displaystyle\int_{2x}^{2} 3x\,dy = 6x-6x^2, & \text{ha } 0<x<1 \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$$

így $$\mathbb{E}X=\int_0^1 x(6x-6x^2)\,dx=\frac{1}{2}$$

(2 pont)

1 – folytatás –

e.) A legkisebb négyzetes értelemben legjobb közelítés éppen a regressziós függvény – avagy feltételes várható érték, ezért az $r(y)=\mathbb{E}(X|Y=y)$ függvényt keressük. (1 pont)

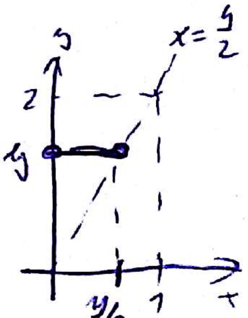
Ehhez $r(y)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_1(x|Y=y)\,dx$, ahol

$$f_1(x|Y=y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{3x}{\frac{3y^2}{8}}=\frac{8x}{y^2}$$

a feltételes sűrűségfüggvénye X-nek az $Y=y$ feltétel mellett

c.) rész alapján.

Pontosabban: $f_1(x|Y=y)$-t csak $y\in(0,2)$-re értelmezzük,



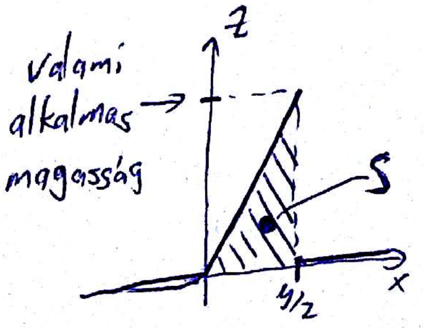
és itt $f_1(x|Y=y)=\begin{cases}\frac{8x}{y^2}, & \text{ha } x\in(0,\frac{y}{2})\\ 0, & \text{ha nem}\end{cases}$

Így $$\boxed{r(y)=\int_0^{y/2} x\,\frac{8x}{y^2}\,dx=\frac{8}{y^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{y/2}=\frac{8}{y^2}\,\frac{1}{3}\,\frac{y^3}{8}=\frac{y}{3}}\quad (0<y<2)$$

(2 pont)

Alternatív megoldás: Rögzített $Y=y$ mellett az X sűrűségfüggvénye az a.) pontbeli felület (alkalmasan normálva):

Így az $\mathbb{E}(X|Y=y)$ várható érték a satírozott háromszög S súlypontjának x koordinátája, vagyis



$$r(y)=\frac{2}{3}\cdot\frac{y}{2}=\frac{y}{3}$$