Zh-k: .... Vizsga: .... Össz: .... JEGY: ....

Név: .... Neptun: .... Gyak.vez.: ....

1. vizsga, 2017-05-22, Munkaidő: 90 perc

1. Adja meg valószínűségek összegzési szabályának a képletét $A \cup B$ -re,

   (a) ha A és B független események.

   Megoldás:
   $$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}B)$$

   (b) ha A és B kizáró események.

   Megoldás:
   $$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

   (c) ha A és B tetszőleges események.

   Megoldás:
   $$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

   Adja meg valószínűségek szorzási szabályának a képletét $A \cap B \cap C$ -re,

   (d) ha A, B és C független események.

   Megoldás:
   $$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A)\ \mathrm{P}(B)\ \mathrm{P}(C)$$

   (e) ha A, B és C kizáró események.
   $$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = 0$$

   Megoldás:

   (f) ha A, B és C tetszőleges események.

   Megoldás:
   $$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A)\ \mathrm{P}(B|A)\ \mathrm{P}(C|A \cap B)$$

2. Egy kisvárosban, amikor a mentőt hívnak, a tapasztalat szerint átlagosan 5 próbálkozás kell ahhoz, hogy felvegyék a telefont.

   a) Milyen eloszlást követ az első sikeres hívásig szükséges hívások száma? *(Adja meg az eloszlás nevét és paraméterének/paramétereinek numerikus értékét!)*

   Megoldás:
   Optimista geometriai eloszlás $p = \frac{1}{5}$ paraméterrel.

   b) Mi a valószínűsége annak, hogy 5-nél több hívás kell ahhoz, hogy végre felvegyék a telefont?

   Megoldás:
   $$\mathrm{P}\text{ (5-nél több hívás)} = 1 - \mathrm{P}\text{ (4 vagy kevesebb hívás)} = \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{5}$$

   (c) Mi a valószínűsége annak, hogy a szükséges hívások száma páros?

Megoldás:

$$\text{P}\,(\text{a hívások száma 2 vagy 4 vagy 6 vagy ... }) =$$
$$= \text{P}\,(\text{a hívások száma 2 }) \;+\; \text{P}\,(\text{a hívások száma 4}) \;+\; \text{P}\,(\text{a hívások száma 6}) \;+\; \ldots =$$
$$= \left(\frac{4}{5}\right)^{2-1}\cdot\frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^{4-1}\cdot\frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^{6-1}\cdot\frac{1}{5} + \ldots =$$

A végtelen sort szumma jellel is felírhatjuk:

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{2i-1}\cdot\frac{1}{5} =$$

A kapott mértani sor első tagja $\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}$, kvóciense $\left(\frac{4}{5}\right)^2$. A sor összege – miont ismeretes – *első tag osztva egy mínusz a kvóciens*:

$$= \frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{4}{9} = 0.44$$

3. Amikor a tűzoltók kijönnek, a tapasztalat szerint akármennyi idő is telt el azóta, hogy hívták őket, nem változik az esély arra vonatkozóan, hogy mennyit kell még várni rájuk. A tapasztalat szerint átlagosan 7.5 percet.

a) Milyen eloszlást követ a tűzoltók érkezéséig eltelt idő? *(Adja meg az eloszlás nevét és paraméterének/paramétereinek numerikus értékét!)*

Fogalmazza meg azt a tulajdonságot, ami az eloszlás használatát indokolja! Vezesse le ebből a tulajdonságból az eloszlás eloszlásfüggvényének a képletét!

Megoldás:
A megfogalmazott "örökifjú tulajdonság" miatt a várakozási időt exponenciális eloszlással modellezhetjük. A paraméter az elméleti átlag reciproka: $\lambda = \frac{1}{7.5} = 0.133$. Az exponenciális eloszlás levezetése az "örökifjú tulajdonság"-ból a jegyzetben olvasható.

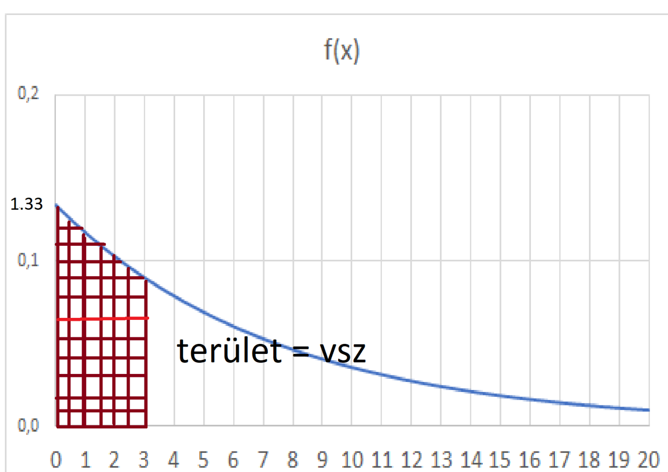
b) Mi a valószínűsége annak, hogy 3 percen belül felveszik a telefont?

Megoldás:

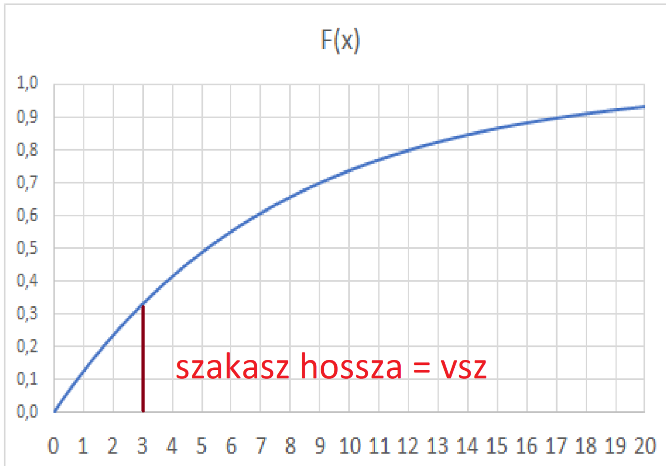
$$\text{P}\,(\text{ a várakozási idő 3 percnél kevesebb }) = F(3) = 1 - \mathrm{e}^{-0.133\ \cdot 3} \qquad (= 0.33)$$

(c) Készítsen egy-egy gondos ábrát az eloszlásfüggvény és a sűrűségfüggvény grafikonjáról, és mindkét ábrán jelölje be, hogy a b) kérdésben kérdezett valószínűség hol látható! *(Az ábrán legyen skála, és írja a megfelel helyre a megfelelő numerikus értékeket!)*

Megoldás:
A sűrűségfüggvény grafikonja a kérdezett valószínűséggel:



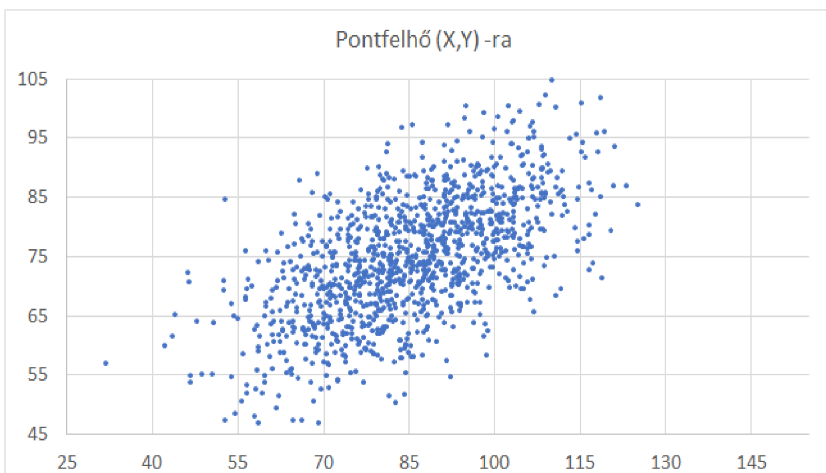
Az eloszlásfüggvény grafikonja a kérdezett valószínűséggel:



4. Egy véletlenszerűen választott házaspár esetén a férj testsúlya legyen X kg, a feleségé Y kg. (X, Y) -t normális eloszlással modellezzük. Tegyük fel, hogy X várható értéke 85, szórása 15, Y várható értéke 75, szórása 10, a korrelációs együttható pedig 0.6.

   (a) Képzelje el, hogy 1000 házaspárral kapcsolatban megmérjük mindkettőjük testsúlyát, és a kapott (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ... , (X_{1000}, Y_{1000}) pontokat a felvesszük a síkon. Rajzoljon egy ilyen jellegű pontfelhőt! *(A koordináta tengelyeken jelölje be a várható értékeket, és a szórásokat, és a pontfelhőt ezeknek megfelelően helyezze el! A pontfelhő elkészítésénél figyeljen arra is, hogy mekkora a korrelációs együttható!)*

   Megoldás:
   Az ábrának ehhez hasonónak kell lenni:



   (b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy férj súlya több, mint 100 kg?

   Megoldás:

$$\mathrm{P}\,(X > 100) = 1 - F(100) = 1 - \Phi\left(\frac{100 - 85}{15}\right) = 1 - \Phi\,(1) = 1 - 0.86 = 0.16$$

   (c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy 80 kg-os feleség férjének a súlya több, mint 100 kg?

Megoldás:
Kétdimenziós normális eloszlás esetén X feltételes várható értékének általános képlete:

$$\mathrm{E}(\, X \mid Y = y \,) = \mu_1 + r \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot (y - \mu_2)$$

A mostani konkrét adatokkal:

$$\mathrm{E}(\, X \mid Y = 80 \,) = 85 + 0.6 \cdot \frac{15}{10} \cdot (80 - 75) = 89.5$$

Kétdimenziós normális eloszlás esetén X feltételes szórásának általános képlete:

$$\mathrm{SD}(\, X \mid Y = y \,) = \sigma_1 \cdot \sqrt{1 - r^2}$$

A mostani konkrét adatokkal:

$$\mathrm{SD}(\, X \mid Y = 80 \,) = 15 \cdot \sqrt{1 - 0.6^2} = 12$$

X feltételes eloszlása az $Y = 80$ feltétel mellett egydimenziós normális eloszlás a kiszámolt paraméterekkel, így a kérdezett feltétes valószínűség:

$$\mathrm{P}\left(X > 100 \mid Y = 80)\right) = 1 - \Phi\left(\frac{100 - 89.5}{12}\right) = 1 - \Phi\left(0.79\right) = 1 - 0.79 = 0.21$$