1 X : KUTYAHARAPÁSOK SZÁMA 1 ÉV ALATT

$F(x) = P(X \le x)$ VAN TÁBLÁZATTAL MEGADVA

7 a $P(X=40) = F(40) - F(39) = 0{,}086 - 0{,}065 = \boxed{0{,}021}$

b $P(40 < X < 50) = P(41 \le X \le 49) = F(49) - F(40) = \boxed{0{,}395}$

4 c $E(X) = \sum_{k=28}^{75} k \cdot P(X=k) = \boxed{\sum_{k=28}^{75} k \cdot \big(F(k) - F(k-1)\big)}$

VAGYIS A TÁBLÁZATBÓL KIVONÁSOKKAL KISZÁMOLJUK A SÚLYFÜGGVÉNYT, MAJD A TANULT MÓDON VÁRHATÓ ÉRTÉKET SZÁMOLUNK

4 d X MÓDUSZA : $\underset{k}{\operatorname{argmax}}\ P(X=k) = \boxed{\underset{k}{\operatorname{argmax}}\ \big(F(k) - F(k-1)\big)}$

VAGYIS MEGKERESSÜK, HOGY A KISZÁMOLT SÚLYFÜGGVÉNY HOL MAXIMÁLIS

2. Az egység sugarú kör kerületén egyenletes szögsebességgel mozgó pont véletlenszű időpontban tekintett x-koordinátáját jelöljük X-szel. Nyilván $-1 \le X \le 1$.

4 p (a) Mi a valószínűsége annak, hogy $X > 0.5$?

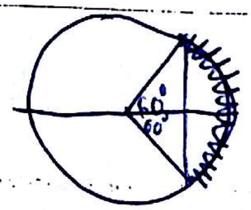
1 p (b) X eloszlásának mi a neve?

7p (c) Vezesse le az eloszlásfüggvény képletét!

3 p { (d) Számolja ki a sűrűségfüggvény képletét!
(e) Rajzolja le a sűrűségfüggvény grafikonját!

Levezetés nélkül -6 p!

(a)

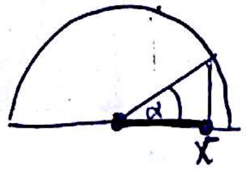


$X > \frac{1}{2} \iff$ ezen a köríven vagyunk

$$\mathbb{P}\left(X > \frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi/3}{2\pi} = \frac{1}{3}.$$

(b) Arkuszszinusz eloszlás

(c) 1. megoldás:

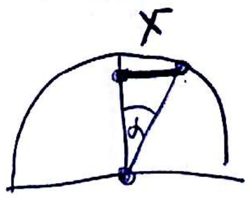


$\alpha \in [0, \pi]$, $X = \cos\alpha$

$$\mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(\cos\alpha \le x) = \mathbb{P}(\alpha \in [\arccos x, \pi]) = \frac{\pi - \arccos x}{\pi}$$

$$= 1 - \frac{\arccos x}{\pi}$$

2. megoldás:



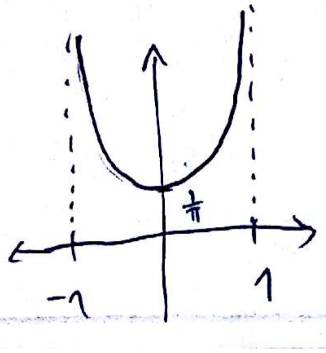
$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $X = \sin\alpha$

$$\mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}[\sin\alpha \le x] = \mathbb{P}\left[\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \arcsin x\right]\right]$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin x}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{\arcsin x}{\pi}$$

(d) $$f_X(x) = F_X'(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(e)



(3)

a.) $P(X>s+t \mid X>t) = P(X>s) \quad s,t>0$ 3p

b.) $P(X<20) = 1-e^{-\lambda\cdot 20}$ 1p

ahol $\lambda = \frac{1}{15}$

A függetlenség miatt a keresett vsz. $\left(1-e^{-\frac{20}{15}}\right)^{50}$ 1p

c.) Binom eloszt használva: 3p

$$\binom{100}{14} p^{14}(1-p)^{100-14}, \text{ ahol } p = 1-e^{-\frac{20}{15}}$$

d.) CHT miatt az élettartamok Y összege $N(m,\sigma)$ eloszlású 1p

ahol $m = 100\cdot 15$ és $\sigma = \sqrt{100}\cdot 15$ 3p

$P(Y>1600) \approx 1-\phi\left(\frac{1600-1500}{150}\right) = 1-\phi(2/3) \sim 1-0.745 \simeq 0.255$ 3p

4

a.) $f_2(y) = 1$ h. $0 \le y \le 1$ 2p

b.) $f_{1|2}(x|y) = \frac{1}{y}$ h. $\left.\begin{matrix} 0 \le x \le y \\ 0 < y \le 1 \end{matrix}\right\}$ 1p 3+1 p

c.) $f(x,y) = f_2(y) \cdot f_{1|2}(x|y) = \frac{1}{y}$ 2p

h. $0 < y \le 1$

$0 \le x \le y$

d.) $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy =$ 1p

$= \int_x^1 \frac{1}{y}\, dy =$ 2p

$= [\ln y]_x^1 = -\ln x$ h. $0 < x \le 1$

e.) $E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{2|1}(y|x)\, dy$ 1p

Itt $f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{1}{-y\ln x}$ h. $0 < x \le 1$ és $x \le y \le 1$ 1p

Ezért

$E(Y|X=x) = \int_x^1 y \cdot \frac{1}{-y\ln x}\, dy =$ 2p

$= -\frac{1}{\ln x}(1-x)$ h. $0 < x \le 1$