Feladatok a kétváltozós függvények témakörhöz

Számítsuk ki az alábbi függvények x és y szerinti parciális deriváltjait:

1) $z = x^2 - 5xy + 3y^2 - 6x + 7x + 8$

2) $z = \mathrm{tg}\,(3x - 5y)$

3) $z = \arcsin \dfrac{x}{y}$

4) $z = \dfrac{xy}{x+y}$

5) $z = \sqrt{x^3 - 5x^2y + y^4}$

6) $z = \ln \sqrt{x^7 y^4}$

7) $z = \arcsin \sqrt{xy}$

8) $z = \dfrac{e^{2x-3y}}{2x-3y}$

9) $z = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}$

Számítsuk ki a következő függvények parciális deriváltjainak adott pontbeli értékét!

10) $z = x^2 + 3xy + y^2,\ x = 1, y = -2$

11) $z = \arccos \frac{x}{y},\ x = 1, y = 2$

12) $z = \mathrm{tg}\, xy,\ x = 2, y = \dfrac{\pi}{8}$

13) $z = \ln\left(3x + y^2\right),\ x = 2, y = 0$

14) $z = e\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right),\ x = 1, y = 8$

Deriváljuk x és y szerint az alábbi implicit függvényeket:

15) $x^x \cdot y^y \cdot z^z = 1$

16) $2xz + 6yz + 5z^2 + 12 = 0$

17) $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = 2\left(x^2 + 2y^2 + 3z^2\right)$

18) $e^{x+y+2z} = 3x + 7y + 11z$

19) $e^{x+y+z} = x + 2y + 3z$

Írjuk fel az alábbi felületek érintősíkjának egyenletét a megadott pontban!

20) $z = 5x^2 - 2xy + 3y^2 + 5x - 6$, $x_0 = 1$, $y_0 = -1$

21) $z = \arcsin \frac{x}{y}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$

22) $z = \left(x^2 + y^2\right) \ln(xy)$, $x_0 = 2$, $y_0 = \frac{1}{2}$

23) $z = x \operatorname{tg} y - y \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $y_0 = 0$

24) Meghatározandó azon sík egyenlete, amely a $P(2, -1, 3)$ ponton halad át, és párhuzamos a $z = \cos\left(x^2 + y^2\right)$ felület $x_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $y_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ koordinátájú pontjához tartozó érintősíkkal.

25) A $z = \ln(xy)$ felületnek mely pontjaiban párhuzamosak az érintősíkok az $x + y + z = 0$ síkkal?

26) A $z = x^2 - 2xy + 3y^2 - 5x + 3y - 5$ felület mely pontjaiban vízszintes az érintősík?

Meghatározandók az alábbi függvények adott α iránymenti differenciálhányadosai!

27) $z = e^{x+y^2}$, $\alpha = 45°$

28) $z = y^2 e^x + \cos(x + y)$, $\alpha = 135°$

29) $z = x \sin y + y \cos x$, $\alpha = 120°$

30) $z = e^y \ln x - xe^x$, $\alpha = 30°$

Számítsuk ki a következő függvények adott irány szerinti deriváltját a megadott pontban!

31) $z = x^3 - 5xy^2 + y^2 - 2x + 1$, $\alpha = 40°$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$

32) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\alpha = 135°$, $x_0 = -5$, $y_0 = 5$

33) $z = x^2 + y^2$, $\alpha = 60°$, $x_0 = \sqrt{3}$, $y_0 = -1$

34) $z = \sin(xy)$, $\alpha = 150°$, $x_0 = \frac{1}{4}$, $y_0 = \pi$

35) $z = x^3 + 3xy + y^2$, $\alpha = 60°$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$

Írjuk fel az alábbi függvények teljes differenciálját!

36) $z = \cos\left(x^2 - xy + y^2\right)$

37) $z = x \operatorname{arc\,tg}(xy)$

38) $z = \ln \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$

39) $xy + yz + zx = 1$

40) $z = x^{2y+1}$

Számítsuk ki az alábbi függvényeknek mind a négy másodrendű parciális deriváltját!

41) $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

42) $z = \sqrt{x^3} + \sqrt{y^3}$

43) $z = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x+y}{1-xy}$

44) $z = y - xe^y + x$

45) $z = x \sin(x+y) + y \sin(x+y)$

46) $z = z = e^{xy}$

Igazoljuk, hogy a következő függvények harmonikusak, vagyis kielégítik az $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$ másodrendű parciális differenciálegyenletet!

47) $z = e^x \cos x$

48) $z = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{y}$

49) $z = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

Írjuk fel az alábbi kétváltozós függvények P_0 pont körül vett másodrendű Taylor-polinomját!

50) $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ P_0(1, 3)$

51) $z = e^{-\left(x^2+y^2\right)},\ P_0\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$

52) $z = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5,\ P_0(1, -2)$

53) $z = x^y,\ P_0(1, 1)$

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvényeknek hol lehet lokális szélsőértéke, van-e, s ha létezik, akkor minimum, vagy maximum!

54) $z = x^2 + y^2$

55) $z = x^2 + xy + y^2 + 3x - y + 5$

56) $z = x^3 + 3xy + y^3$

57) $z = (x_1)^2 + 4\,(y-3)^2$

58) $z = x^2 - 3xy + y^2 - 1$

59) $z = 4x^2 + 2xy - 5y^2 + 2$

60) $z = x^2 y^3\,(6 - x - y)$

61) $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

62) $z = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$, a $0 \le x \le 2\pi$, $0 \le y \le 2\pi$ négyszögben

63) $z = \left(x^2 + 2y^2\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

64) Egy bádogkanna egymásra helyezett hengerből és kúpból áll. Téfrogata V. Milyennek válasszuk a méreteket, hogy elkészítéséhez a legkevesebb bádogot használjuk fel?

65) 12-t osszuk három részre úgy, hogy a három szám szorzata maximális legyen!

66) Egy derékszögű hasáb egy csúcsába összefutó éleinek összege 45 cm. Hogyan kell az éleket megválasztani, hogy a hasáb térfogata maximális legyen?

67) Egy R sugarú körből maximális területű háromszöget kell kivágni. Mekkorák a háromszög oldalai?

68) 18-at osszuk fel három részre úgy, hogy az első rész négyzetének, a második köbének és a harmadiknak a szorzata maximális legyen!

Határozzuk meg az adott kétváltozós függvényeknek előírt feltételek mellett vett feltételes szélsőértékeit!

69) $z = xy$, feltétel: $x + y - 1 = 0$

70) $z = x^2 + y^2$, feltétel: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

71) $z = x^2 - y^2$, feltétel: $3x + 2y + 5 = 0$

72) $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, feltétel: $x - y = \dfrac{\pi}{4}$

Többváltozós függvények integrálása

Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

1) $$\int_1^2 \int_2^4 \frac{1}{(x+y)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

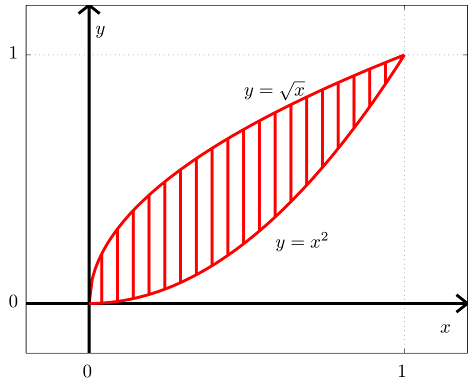
2) $$\int_2^5 \int_1^3 \left(5x^2y - 2y^3\right)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$$

3) $$\int_0^\pi \int_0^{\sin x} (x+y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$$

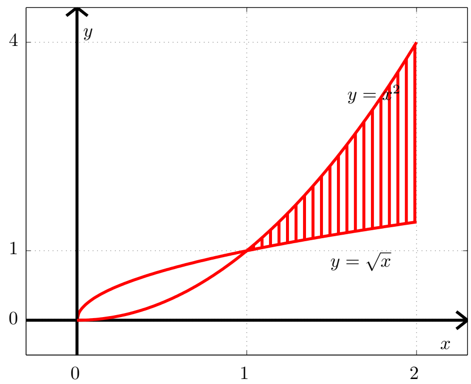
4) $$\int_0^1 \int_y^1 \left(x^2+y^2\right)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

Állapítsuk meg a következő ábrákon látható integrációs tartományok határait!

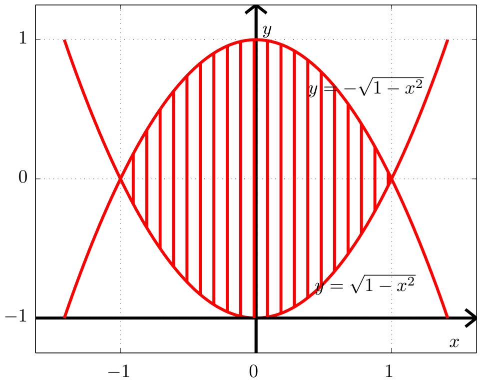
5)



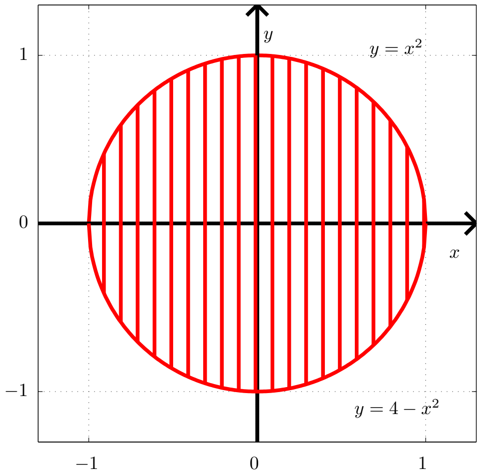
6)



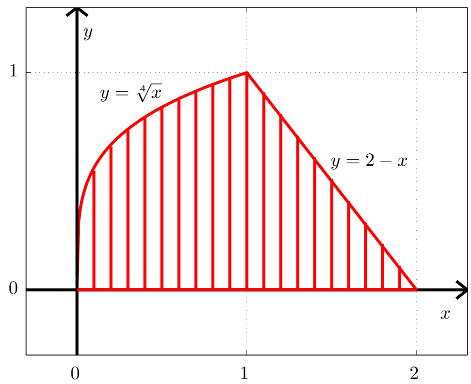
7)


y
1
0
−1
$y = -\sqrt{1-x^2}$
$y = \sqrt{1-x^2}$
x
−1
0
1

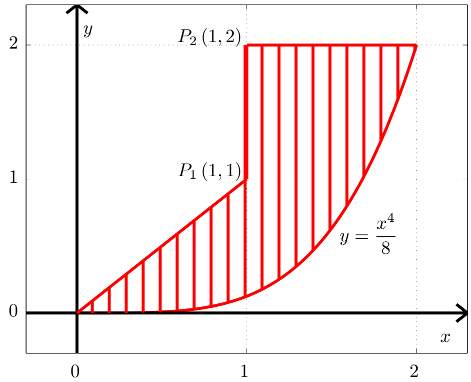
8)


y
1
0
−1
$y = x^2$
$y = 4 - x^2$
x
−1
0
1

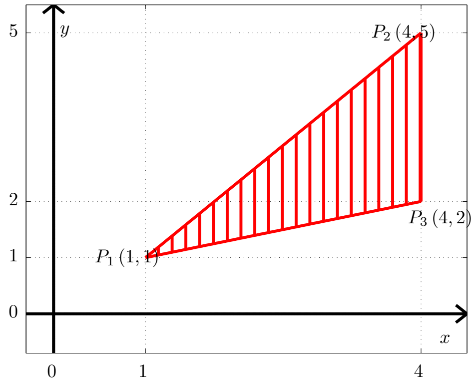
9)


y
1
0
$y = \sqrt[4]{x}$
$y = 2 - x$
x
0
1
2

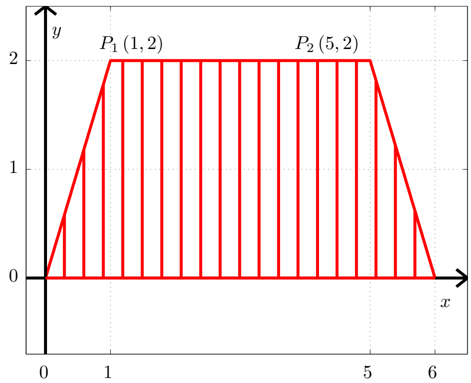
10)



11) Határozzuk meg a $z = xy$ függvény kettős integrálját az ábrán látható háromszögtartományon!

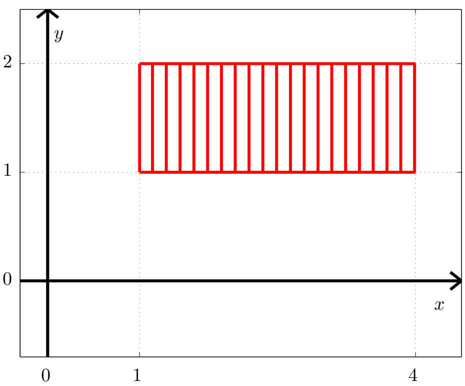


12) Számítsuk ki a $z = \sqrt{x+y}$ függvény kettős integrálját az ábrán látható trapéz alakú tartományon!

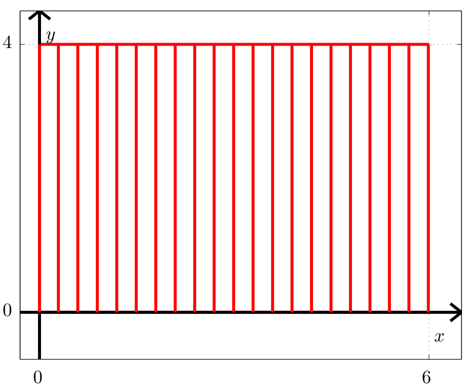


Számítsuk ki az alábbi függvények kettős integráljait az ábrákkal megadott tartományokon!

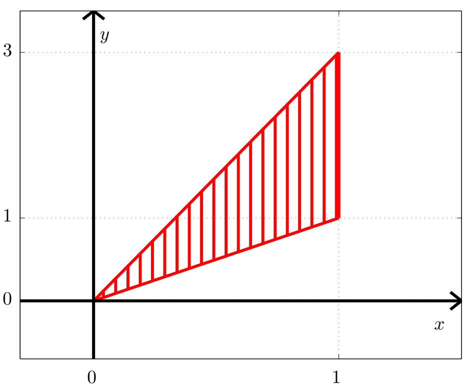
13) $z = e^{x+y}$



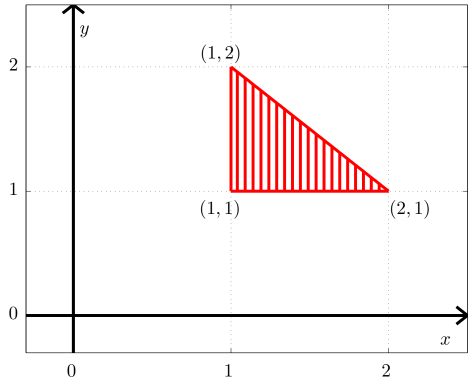
14) $z = 3x^2 + 5y^2$



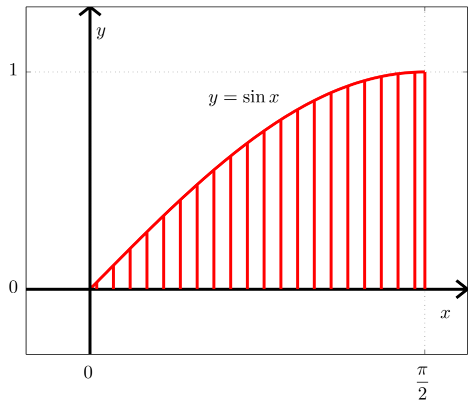
15) $z = x^2y$



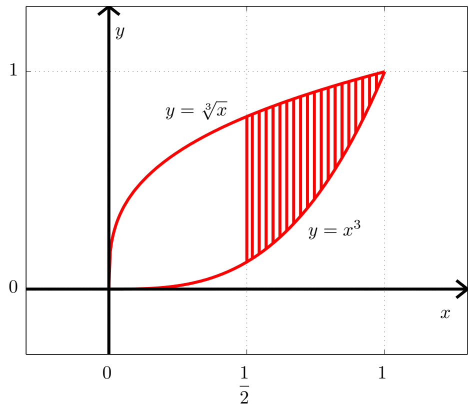
16) $z = \dfrac{1}{(x+y)^3}$



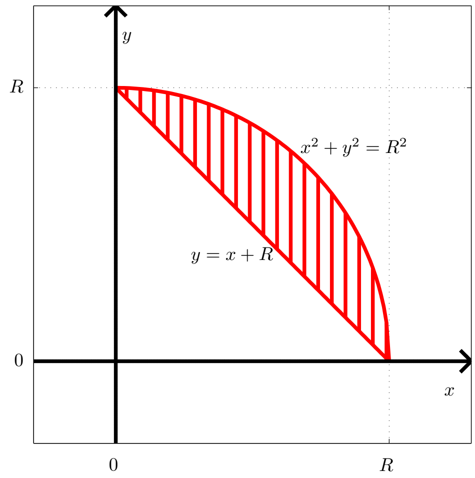
17) $z = x + y$



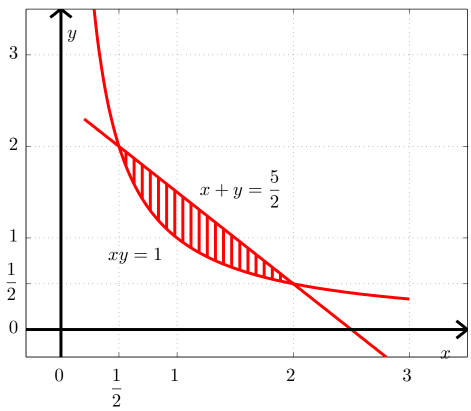
18) $z = \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{y}$



19) $z = 2x^3y$



20) $z = xy$

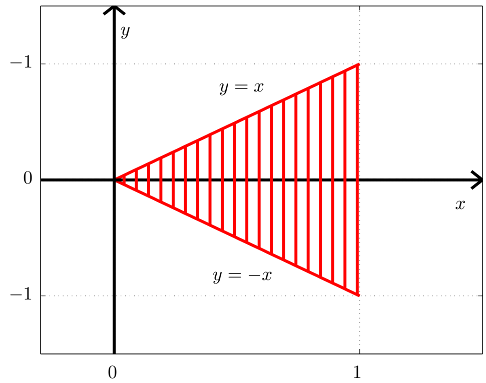


21) Határozzuk meg két egymásra merőleges R sugarú henger közös részének térfogatát! (A hengerek tengelyei egy síkban vannak! A kérdéses térfogat felét kapjuk, ha az $x^2 + z^2 = R^2$ függvényt az $x^2 + y^2 = R^2$ körtartományon integráljuk.)

22) Számítsuk ki az $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ hengerfelület, a $z = x + y + 6$ sík és az xy tengelysík által meghatározott csonkahenger térfogatának mérőszámát! (A térfogat mérőszámát kapjuk, ha a $z = x + y + 6$ függvényt az $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellipszis-tartományonm integráljuk.)

23) Határozzuk meg a $z = x^2 - y^2$ felület, az $x = 1$ és a $z = 0$ síkok által meghatározott test térfogatának mérőszámát! (A $z = 0$ sík az xy tengelysík,

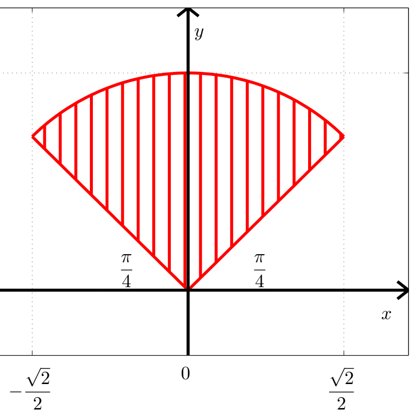
ezt a felületet az $x^2 - y^2 = 0$ egyenespárban metszi. Mivel $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 0$, kapjuk az $y = \pm x$ egyeneseket. Az integrációs tartomány tehát az ábrán látható.)



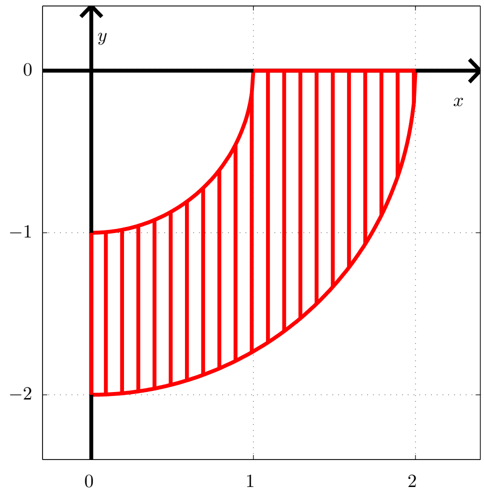
24) Határozzuk meg az R sugarú gömb térfogatát! A számolást polárkoordináta-rendszerben végezzük!

Állapítsuk meg polár-koordinátarendszerben az alábbi tartományok határait!

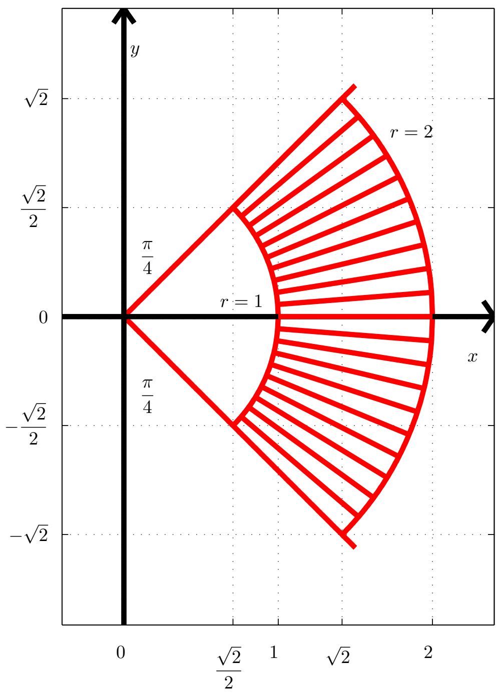
25)



26)



27)



29) Számítsuk ki a következő integrált az első síknegyedben lévő egységsugarú negyedkör-tartományra!

$$\iint \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,\mathrm{d}T$$

30) Kiszámítandó a $z = x^2 - y^2$ hiperbolikus paraboloid, az xy tengelysík és az $x^2 + y^2 = 1$ hengerpalást által határolt térfogat mérőszáma!

31) Határozzuk meg az

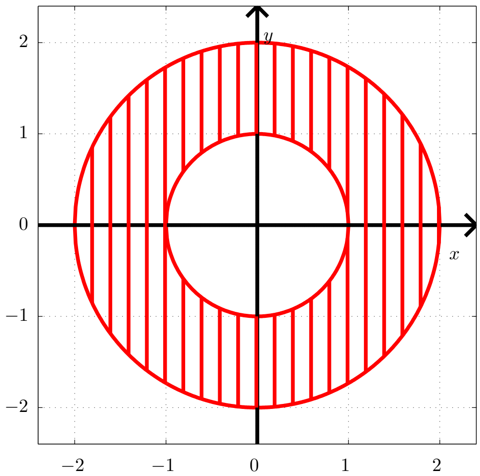
$$\iint \left(1 - x^2 - y^2\right)\, \mathrm{d}T$$

integrál értékét az $x^2 + y^2 = 9$ körtartományon!

32) Számítsuk ki az ábrán látható körgyűrű-tartományra az

$$\iint \left(x^2 + 2y^2\right)\, \mathrm{d}T$$

integrál értékét!

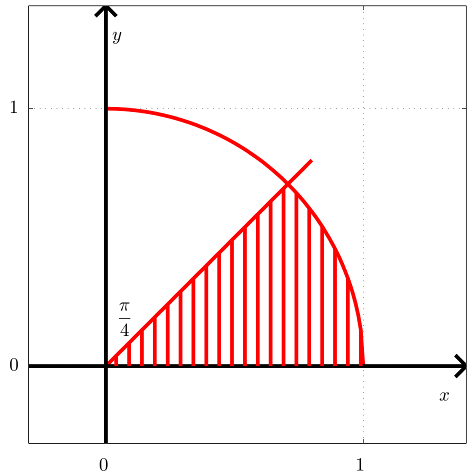


33) Határozzuk meg az $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ henger, a $3x + 4y + z = 12$ sík és az xy tengelysík által meghatározott test térfogatának mérőszámát! (Integrálandó az $z = 12 - 3x - 4y$ függvény az $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ tartományon.)

34) Kiszámítandó

$$\iint x^2 y \,\mathrm{d}T$$

értéke az ábrán látható tartományon!



35) Számítsuk ki a $z = 1 - 4x^2 - y^2$ felület ás az xy tengelysík által meghatározott test térfogatának mérőszámát!

36) Határozzuk meg a $z = x^2 + y^2$ felület, a $z = 0$ sík és az $(x-2)^2 + y^2 = 4$ körhenger határolta test térfogatát!

37) Mekkora a $z = 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ kúp, a $z = 0$ sík és az $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ henger által behatárolt test térfogatának mérőszáma?

38) Határozzuk meg a $2x = y^2 + 4z^2$ elliptikus paraboloid és az $x = 1$ sík által határolt test térfogatát!