Az integrálszámítás alkalmazásai

Görbe ívhosszának meghatározása

Az $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ görbe ívhossza:

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}\,x.}$$

Az $x = x(t), y = y(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ paraméteresen adott görbe ívhossza:

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,\mathrm{d}\,t.}$$

1. Mekkora az $y = \operatorname{ch} x$ görbe $0 \le x \le a$ intervallumhoz tartozó ívhossza?

Megoldás. Az $y' = \operatorname{sh} x$ folytonos és korlátos $[0, a]$ intervallumon, tehát rektifikálható.

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^a \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}\,x = [\operatorname{sh} x]_0^a = \operatorname{sh} a - \operatorname{sh} 0 = \frac{e^a - e^{-a}}{2}.$$

□

2. Számítsuk ki a közönséges ciklois egy ívének hosszát: $x(t) = a(t - \sin t), y(t) = a(1 - \cos t)$, $(0 \le t \le 2\pi)$.

Megoldás.

$$\dot{x}(t) = a(1 - \cos t), \qquad \dot{y}(t) = a \sin t.$$

$$\dot{x}^2(t) = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t), \qquad \dot{y}^2(t) = a^2 \sin^2 t$$

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = 2a^2(1 - \cos t)$$

$s = \int_0^{2\pi} a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{2\pi} 2a \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}\,t = \left[-4a\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 4a + 4a = 8a.$
Felhasználtuk az $\sin^2\frac{t}{2} = \frac{1-\cos t}{2}$ összefüggést az integrál kiszámításánál. □

A görbe ívhossza polárkoordinátákkal

Az $r = r(\varphi)$ $(\alpha \le \varphi \le \beta)$ megadású görbére

$$\boxed{s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)}\, \mathrm{d}\,\varphi.}$$

3. Számítsuk ki az $r(\varphi) = a(1 + \cos\varphi)$ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$ egyenletű vonaldarab (cardioid) ívhosszát.

Megoldás. Könnyen belátható, hogy korlátos és folytonos görbéről van szó, ezért rektifikálható.

$$r^2(\varphi) = a^2(1 + \cos\varphi)^2 = a^2(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)$$

$$\dot{r}(\varphi) = -a\sin\varphi, \quad \dot{r}^2(\varphi) = a^2\sin^2\varphi.$$

$$r^2(\varphi) + \dot{(r)}^2(\varphi) = a^2(2 + 2\cos\varphi) = 2a^2(1 + \cos\varphi).$$

$s = \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos\varphi}\, \mathrm{d}\,\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, \mathrm{d}\,\varphi$. A $\cos\frac{\varphi}{2}$ a $[0, \pi)$-n pozitív, míg a $(\pi, 2\pi]$-n negatív.

$$s = 2a \int_0^{2\pi} \left|\cos^2\frac{\varphi}{2}\right| \mathrm{d}\,\varphi = 2a \int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, \mathrm{d}\,\varphi - 2a \int_\pi^{2\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, \mathrm{d}\,\varphi =$$

$$= 4a \int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, \mathrm{d}\,\varphi = 4a\left[2\sin\frac{\varphi}{2}\right]_0^\pi = 8a.$$

$\square$

4. Számítsuk ki az $r(\varphi) = ae^{k\varphi}$ $(a > 0,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{k})$ vonaldarab ívhosszát.

Megoldás. A görbe rektifikálható.

$$r^2(\varphi) = a^2e^{2k\varphi}, \quad \dot{r}(\varphi) = ake^{k\varphi}, \quad \dot{r}^2(\varphi) = a^2k^2e^{2k\varphi}$$

$$r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi) = a^2(1 + k^2)e^{2k\varphi}$$

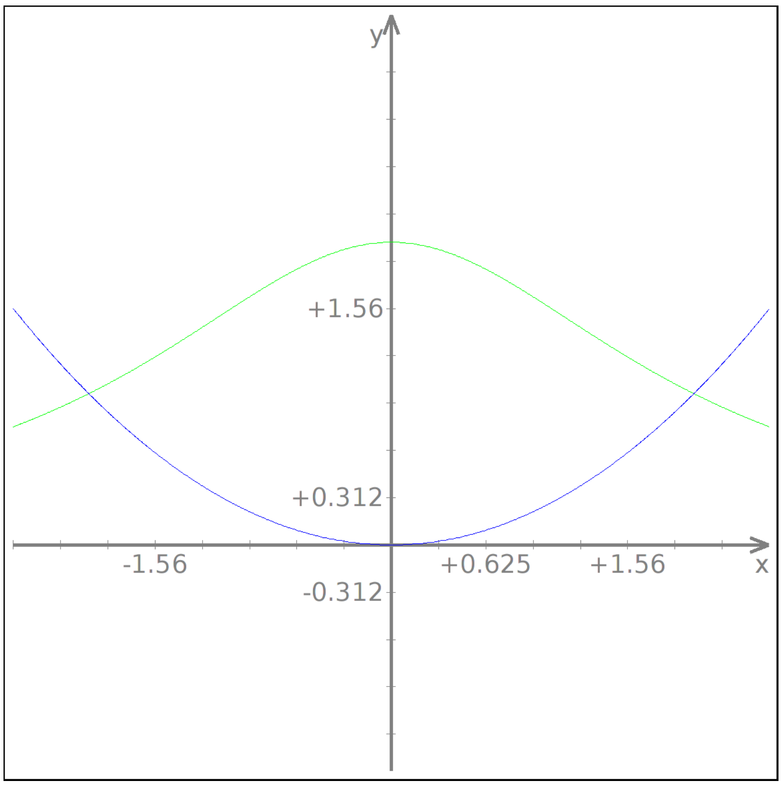
$s = \int_0^{\frac{\pi}{k}} \sqrt{a^2(1 + k^2)e^{2k\varphi}}\, \mathrm{d}\,\varphi = a\sqrt{1 + k^2} \int_0^{\frac{\pi}{k}} e^{k\varphi}\, \mathrm{d}\,\varphi = a\sqrt{1 + k^2}\left[\frac{e^{k\varphi}}{k}\right]_0^{\frac{\pi}{k}} = a\frac{\sqrt{1 + k^2}}{k}(e^\pi - 1).$ $\square$

Területszámítások

5. Számítsuk ki az $y = x^2 + 1$ parabola $1 \le x \le 3$ szakasza alatti területet.

Megoldás. $T = \displaystyle\int_1^3 (x^2+1)\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_1^3 = \frac{32}{3}.$ □

6. Számítsuk ki az alábbi ábrán látható $y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$ és $y = \frac{x^2}{4a}$ görbék által határolt síkidom területét.



Megoldás. A két görbe metszéspontja:

$$\frac{8a^3}{x^2+4a^2} = \frac{x^2}{4a}$$

$$32a^2 = x^4 + 4a^2x^2$$

$$x^2 = \frac{-4a^2 \pm 12a^2}{2}$$

$$x^2 = 4a^2, \quad x_1 = 2a, \quad x_2 = -2a.$$

$$T = \int_{-2a}^{2a} \left(\frac{8a^3}{x^2+4a^2} - \frac{x^2}{4a}\right)\mathrm{d}\,x = 2\int_0^{2a} \left(\frac{8a^3}{x^2+4a^2} - \frac{x^2}{4a}\right)\mathrm{d}\,x =$$

$$= 2\int_0^{2a} \frac{8a^3}{x^2+4a^2}\,\mathrm{d}\,x - 2\int_0^{2a} \frac{x^2}{4a}\,\mathrm{d}\,x.$$

$$\int_0^{2a} \frac{8a^3}{x^2+4a^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{8a^3}{4a^2}\int_0^{2} a\frac{\mathrm{d}\,x}{\left(\frac{x}{2a}\right)^2+1} = 4a^2\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{2a}\right]_0^{2a} = a^2\pi.$$

$$\int_0^{2a} \frac{x^2}{4a}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{4a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2a} = \frac{2}{3}a^2.$$

Tehát $T = 4a^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\right)$. □

Paraméteresen adott görbék alatti területek kiszámítása

Az $x = x(t), y = y(t)$ $(t_1 \leq t_2)$ paraméteresen adott görbe alatti terület:

$$\boxed{T = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)\,\mathrm{d}\,t.}$$

7. Számítsuk ki az r sugarú kör területét.

Megoldás.

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad \dot{x}(t) = -r\sin t.$$

$T = 2\int_\pi^0 r\sin t(-r\sin t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{r^2}{2}2\int_0^\pi(1-\cos 2t)\,\mathrm{d}\,t = r^2\left[t-\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^\pi = r^2\pi.$ Azt használtuk ki, hogy az alsó félkör és a felső félkör terültet megegyezik. A görbén (a függvények grafikonjához hasonlóan) balról jobbra kell haladjunk, ezért integrálunk π-től 0-ig. □

8. Számítsuk ki az a és b féltengelyű ellipszis területét. Az ellipszis paraméteres megadása: $x = a\cos t, y = b\sin t$ $(0 \leq t < 2\pi)$

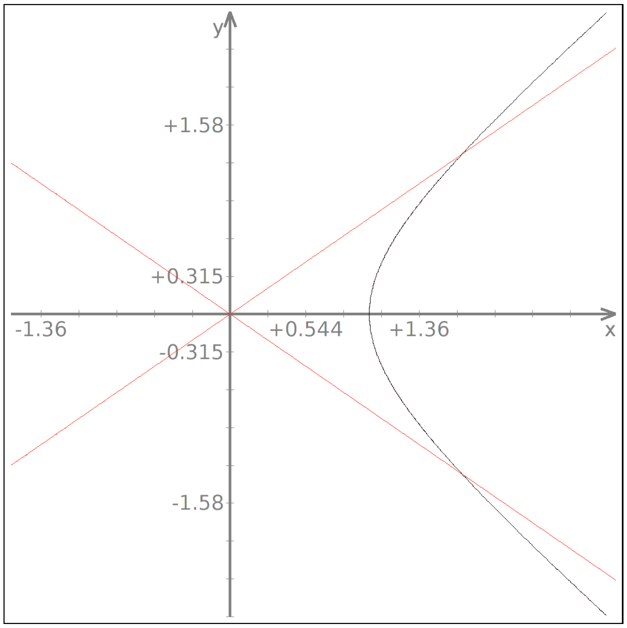
Megoldás. $T = 2\int_\pi^0 ab(-sin^2 t)\,\mathrm{d}\,t = ab\pi.$ □

Szektorterületek számítása paraméteres megadás esetén

Az $x = x(t), y = y(t)$ $(t_1 \leq t \leq t_2)$ szektorterületének kiszámítása:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)\right]\mathrm{d}\,t.}$$

9. Mekkor az $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ paraméteres egyenletrendszerrel megadott egyenlőszárú hiperbola $-t_1 \leq t \leq t_1$ szektorának területe. Ezen hiperbola implicit egyenlete: $x^2 - y^2 = \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = 1$.



Megoldás. $x\dot{y} - \dot{x}y = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, tehát $T = \frac{1}{2}\int_{-t_1}^{t_1} 1 \, \mathrm{d}\, t = t_1$. □

Az $r = r(\varphi)$ alakban adott görbék szektorterületének számítása

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) \, \mathrm{d}\, \varphi}$$

10. Számítsuk ki az $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ poláregyenletű lemmiszkáta egyik levelének területét.

Megoldás.

$$T = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi \, \mathrm{d}\, \varphi = a^2 \left[\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}.$$

□

11. Mekkora az $r = 2a(1 + \cos\varphi)$ poláregyenletű kardoid területe?

Megoldás.

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [2a(1+\cos\varphi)]^2 \, \mathrm{d}\, \varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [4a\cos^2\frac{\varphi}{2}]^2 \, \mathrm{d}\, \varphi =$$

$$= 16a^2 \int_0^{\pi} \cos^4\frac{\varphi}{2} \, \mathrm{d}\, \varphi = 4a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) \, \mathrm{d}\, \varphi =$$

$$= 4a^2 \left[\varphi + 2\sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^\pi = 6a^2\pi.$$

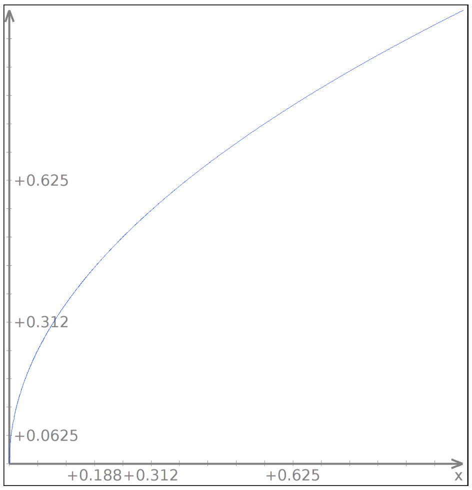
□

Forgástestek felszínének számítása

A rektifikálható és pozitív $y = f(x)$ függvény $a \le x \le b$ görbedarabjának az x tengely körüli forgatásával keletkező forgástest palastjának felszíne

$$\boxed{F = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}\,x.}$$

12. Forgassuk meg az $y = \sqrt{x}$ görbe $0 \le x \le 1$ darabját az x tengely körül és számítsuk ki az ily módon keletkezett forgástest palástjának felszínét.



Megoldás.

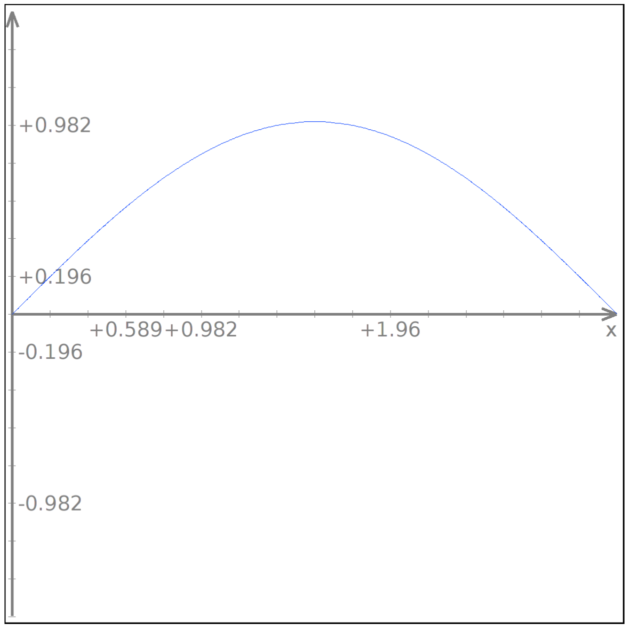
$$F = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\,\mathrm{d}\,x = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}}\,\mathrm{d}\,x.$$

Az $u = x + \frac{1}{4}$ helyettesítés esetén $\mathrm{d}\,u = \mathrm{d}\,x$ és az új határok $\frac{1}{4}$, illetve $\frac{5}{4}$.

$$F = 2\pi \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}} \sqrt{u}\,\mathrm{d}\,u = 2\pi \frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}} = \frac{4\pi}{3}\left[\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^3} - \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3}\right] \simeq 5,3302.$$

□

13. Határozzuk meg azon felület felszínét, amely az $f(x) = \sin x$ görbe $0 \le x \le \pi$ darabjának az x tengely körüli forgatásával kapunk.



Megoldás.

$$F = 2\pi \int_0^{2\pi} \sin x \sqrt{1+\cos^2 x} \,\mathrm{d}\, x.$$

A $\operatorname{sh} t = \cos x$ helyettesítéssel $\operatorname{ch} t \,\mathrm{d}\, t = -\sin x \,\mathrm{d}\, x$. Ideiglenesen az új határokat t_1, illetve t_2-vel jelöljük, de nem lesz szükségünk konkrét értékeikre.

$$F = -2\pi \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{ch}^2 t \,\mathrm{d}\, t = -2\pi \int_{t_1}^{t_2} \frac{1+\operatorname{ch} 2t}{2} \,\mathrm{d}\, t = -\pi \left[\frac{\operatorname{sh} 2t}{2} + t \right]_{t_1}^{t_2}.$$

Visszatérve az eredeti változóra az eredeti határokat írjuk vissza:

$$F = -\pi \left[\cos x \sqrt{1+\cos^2} + \operatorname{arsh} \cos x \right]_0^{\pi} \simeq 14,4236.$$

$\square$

Paraméteres előállítású görbék forgatásával keletkező forgástest felszíne

$$\boxed{F = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} \,\mathrm{d}\, t}$$

14. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis x tengely körüli megforgatásával keletkező forgási ellipszoid felszínét. Az ellipszis paraméteres előállítása: $x(t) = a \cos t, y(t) = b \sin t$.

Megoldás. A felső félellipszist fogjuk megforgatni az x tengely körül, ezért $0 \leq t \leq \pi$.

$$F = 2\pi \int_0^\pi b \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \,\mathrm{d}\, t = 2\pi \int_0^\pi b \sin t \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t} \,\mathrm{d}\, t$$

$$= 2\pi \int_0^\pi ab \sin t \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\cos^2 t} \,\mathrm{d}\, t$$

Bevezetve az $\varepsilon = \frac{a^2-b^2}{a^2}$ úgynevezett numerikus excentritást és $u = \cos t$ helyettesítéssel $\mathrm{d}\, u = -\sin t \,\mathrm{d}\, t$. Az új határok: $u_1 = 1$ és $u_2 = -1$.

$$F = -2\pi ab \int_1^{-1} \sqrt{1 - \varepsilon^2 u^2} \,\mathrm{d}\, u = 2\pi ab \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \varepsilon^2 u^2} \,\mathrm{d}\, u$$

Újabb helyettesítés: $\varepsilon u = \sin \varphi$ ($0 < \varepsilon < 1$ miatt ez alkalmazható helyettesítés), $\varepsilon \,\mathrm{d}\, u = \cos \varphi \,\mathrm{d}\, \varphi$. Az új határok $-\arcsin \varepsilon$ és $\arcsin \varepsilon$.

$$F = \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \int_{-\arcsin \varepsilon}^{+\arcsin \varepsilon} \cos^2 \varphi \,\mathrm{d}\, \varphi = \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \int_{-\arcsin \varepsilon}^{+\arcsin \varepsilon} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \,\mathrm{d}\, \varphi =$$

$$= \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_{-\arcsin \varepsilon}^{+\arcsin \varepsilon} = \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \left[\arcsin \varepsilon + \varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2} \right].$$

□

Az $r = r(\varphi)$ alakban adott görbének a forgatásával keletkező palást felszínének számítása

$$\boxed{F = 2\pi \int_\alpha^\beta r(\varphi) \sin \varphi \sqrt{[\dot{r}(\varphi)]^2 + [r(\varphi)]^2} \,\mathrm{d}\, \varphi}$$

15. Forgassuk meg az $r = b(1 + \cos \varphi)$ $(0 \leq \varphi \leq \pi)$ kardioidot az x tengely körül és határozzuk meg az így keletkező forgástest felszínét.

Megoldás.

$$[\dot{r}(\varphi)]^2 + [r(\varphi)]^2 = b^2(2 + 2\cos \varphi)$$

$$F = 2\pi \int_0^\pi b(1 + \cos \varphi) \sin \varphi \sqrt{b^2(2 + 2\cos \varphi)} \,\mathrm{d}\, \varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^\pi b^2 \sqrt{2} (1 + \cos \varphi)^{\frac{3}{2}} \sin \varphi \,\mathrm{d}\, \varphi = 2\sqrt{2}\pi b^2 \left[\frac{2}{5} (1 + \cos \varphi)^{\frac{5}{2}} \right]_0^\pi = \frac{32\pi b^2}{5}.$$

□

Forgástest térfogatának számítása

Az $[a, b]$ intervallumon folytonos, nem negatív függvény $f(x)$ görbéjét az x tengely körül megforgatva kapunk egy forgástestet. Ennek térfogata:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \,\mathrm{d}\,x}$$

16. Számítsuk ki a csonkakúp térfogatát!

Megoldás.

$$V = \pi \int_0^{h+m} \left[\frac{R}{h+m} x\right]^2 \mathrm{d}\,x - \pi \int_0^h \left[\frac{r}{h} x\right]^2 \mathrm{d}\,x = \pi \left(\frac{R}{h+m}\right)^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{h+m} -$$

$$\pi \left(\frac{r}{h}\right)^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi \left[\frac{R^2(h+m)}{3} - \frac{r^2 h}{3}\right]$$

Háromszögek hasonlóságából kapjuk:

$$\frac{r}{h} = \frac{R-r}{m}, \quad h = \frac{mr}{R-r}.$$

$$V = \frac{\pi}{3}\left[R^2 \frac{mr + m(R-r)}{R-r} - r^2 \frac{mr}{R-r}\right] = \frac{\pi m}{3}(R^2 + rR + r^2).$$

□

17. Forgassuk meg az $y = \frac{1}{1+x^2}$ görbét az x tengely körül és határozzuk meg a keletkező forgástest térfogatát a $[-1, 1]$ intervallumban.

Megoldás.

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} \,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} \,\mathrm{d}\,x - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}\,x +$$

$$\frac{x}{2(1+x^2)} - \int \frac{1}{2(1+x^2)} \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{(1+x^2)}\right).$$

$$V = \pi \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg} x + \frac{x}{(1+x^2)}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

□

Paraméteresen adott meridián görbéjű forgástest térfogata

Ha az $x = x(t), y = y(t)$ egy $t_1 \le t \le t_2$ szakaszát megforgatjuk az x tengely körül, kapunk egy forgástestet, amelynek térfogata:

$$\boxed{V = \pi \int_{t_1}^{t_2} [y(t)]^2 \dot{x}(t) \,\mathrm{d}\, t,}$$

ha $y(t)$ folytonons és $x(t)$ differenciálható.

Az y tengely körül forgatva $y(t)$ differenciálhatóságát kell feltenni. Ekkor

$$\boxed{V = \pi \int_{t_1}^{t_2} [x(t)]^2 \dot{y}(t) \,\mathrm{d}\, t.}$$

18. Számítsuk ki a gömb térfogatát.

Megoldás. Az $x = a\cos\varphi, y = a\sin\varphi$ paraméteresen adott kört forgatjuk meg az x tengely körül. $\dot{x} = -a\sin\varphi$.

$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a^2 \sin^2\varphi(-a\sin\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi = \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \,\mathrm{d}\,\varphi =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi = \pi a^3 \left[-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

□

Görbeív súlypontja

Az $y = f(x)$ megadás esetén $[a, b]$ intervallumra:

$$\boxed{s_x = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}\,x}{\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}\,x}, \qquad s_y = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}\,x}{\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}\,x}.}$$

Paraméteresen megadás esetén $a = x(\alpha), b = y(\beta)$ mellett:

$$\boxed{s_x = \frac{\int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2}\,\mathrm{d}\,t}{\int_\alpha^\beta \sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2}\,\mathrm{d}\,t}, \qquad s_y = \frac{\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2}\,\mathrm{d}\,t}{\int_\alpha^\beta \sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2}\,\mathrm{d}\,t}.}$$

19. Határozzuk meg az $y = \operatorname{ch} x$ $0 \le x \le 1$ ívének súlypontját.

Megoldás. Három integrált kell kiszámolnunk.

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{1+\overset{2}{\operatorname{sh}} x}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}\,x = [\operatorname{sh} x]_0^1 = \operatorname{sh} 1 - \operatorname{sh} 0 = \frac{e^2-1}{2e}.$$

$$I_2 = \int_0^1 x\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 x\operatorname{ch} x\,\mathrm{d}\,x = [x\operatorname{sh} x]_0^1 - \int_0^1 \operatorname{sh} x\,\mathrm{d}\,x =$$

$$= [x\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x]_0^1 = \frac{e-1}{e}.$$

$$I_3 = \int_0^1 \operatorname{ch} x\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \operatorname{ch}^2 x\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \frac{\operatorname{ch} 2x+1}{2}\,\mathrm{d}\,x =$$

$$= \left[\frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{e^4+4e^2-1}{8e^2}.$$

□

Síktartomány súlypontja

Az $y = f(x)$ grafikon és $[a,b]$ intervallum közötti területre:

$$\boxed{s_x = \frac{\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}\,x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x}, \qquad s_y = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}\,x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x}.}$$

Paraméteres megadás esetén $a = x(\alpha)$, $b = y(\beta)$ mellett:

$$\boxed{s_x = \frac{\int_\alpha^\beta x(t)y(t)\dot{x}(t)\,\mathrm{d}\,t}{\int_\alpha^\beta y(t)\dot{x}(t)\,\mathrm{d}\,t}, \qquad s_y = \frac{\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [y(t)]^2\dot{x}(t)\,\mathrm{d}\,t}{\int_\alpha^\beta y(t)\dot{x}(t)\,\mathrm{d}\,t}.}$$

20. Számítsuk ki az $y = -x^2 + x + 6$ parabola és az x tengely által határolt síkrész súlypontját.

Megoldás. A parabola az $x = -2$ és az $x = 3$ pontban metszi az x tengelyt. Három integrált kell kiszámolnunk.

$$I_1 = \int_{-2}^3 x(-x^2+x+6)\,\mathrm{d}\,x = \int_{-2}^3 (-x^3+x^2+6x)\,\mathrm{d}\,x = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^3 \simeq$$

$$\simeq 10,41.$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{-2}^3 (-x^2+x+6)^2\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_{-2}^3 (x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36)\,\mathrm{d}\,x =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^4}{4} - 11\frac{x^3}{3} + 12\frac{x^2}{2} + 36x\right]_{-2}^3 \simeq 52,085.$$

$$I_3 = \int_{-2}^3 (-x^2+x+6)\,\mathrm{d}\,x = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-2}^3 \simeq 20,84.$$

$$s_x = \frac{I_1}{I_3} \simeq 0,499, \qquad s_y = \frac{I_2}{I_3} \simeq 2,499.$$

□