

Függvények határértéke és folytonosság

1) Bizonyítsa be a határérték definíciója alapján, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 1}{5x + 4} = \frac{1}{2}$$

teljesül!

Megoldás (Heine definíciója alapján):

Igazolandó, hogy a függvény értelmezve van a 2 egy környezetében, továbbá

$\forall \{x_n\} \rightarrow 2$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3x_n + 1}{5x_n + 4} = \frac{1}{2}$ fennáll.

Jelöljük f -fel a függvényt! Ekkor $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{4}{5}\}$, azaz a függvény a 2 egy környezetében valóban értelmezve van.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3x_n + 1}{5x_n + 4} = \frac{3 \lim x_n + 1}{5 \lim x_n + 4} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{5 \cdot 2 + 4} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

Megoldás (Cauchy definíciója alapján):

Igazolandó, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$, úgy, hogy $0 < |x - 2| < \delta$ esetén f értelmezve van x -ben, továbbá $|f(x) - \frac{1}{2}| < \varepsilon$.

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{3x + 1}{5x + 4} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{x - 2}{2(5x + 4)} \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{x - 2}{2(5x + 4)} < \varepsilon$$

$$-2\varepsilon(5x + 4) < x - 2 < 2\varepsilon(5x + 4)$$

Innen a két relációt kettébontjuk. Az első reláció:

$$-10\varepsilon x - 8\varepsilon < x - 2$$

$$2 - 8\varepsilon < x(1 + 10\varepsilon)$$

$$\frac{2 - 8\varepsilon}{1 + 10\varepsilon} < x$$

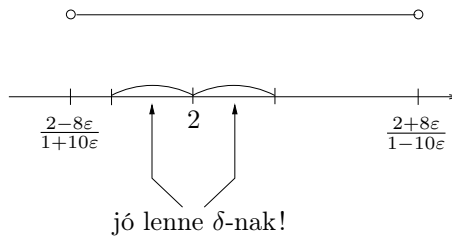
A második reláció:

$$x - 2 < 10\varepsilon x + 8\varepsilon$$

$$x(1 - 10\varepsilon) < 8\varepsilon + 2 \quad \varepsilon < 0,1 \text{ esetén}$$

$$x < \frac{8\varepsilon + 2}{1 - 10\varepsilon}$$

Ábrázoljuk a két relációnak eleget tevő x értékeket számegegyesen!



1. ábra. Alkalmos delták helyzete a számegeyenesen

$$2 - \frac{2 - 8\varepsilon}{1 + 10\varepsilon} = \frac{2 + 20\varepsilon - 2 + 8\varepsilon}{1 + 10\varepsilon} = \frac{28\varepsilon}{1 + 10\varepsilon}$$

$$\frac{2 + 8\varepsilon}{1 - 10\varepsilon} - 2 = \frac{2 + 8\varepsilon - 2 + 20\varepsilon}{1 - 10\varepsilon} = \frac{28\varepsilon}{1 - 10\varepsilon}$$

A két kifejezés közül a felső a kisebb, ezért ez alkalmas is δ -nak.

2) Határozzuk meg az alábbi függvények határértékeit!

- a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt{6x^2 + 3} + 3x}$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{4}{3}} \left(\sqrt[3]{x^2 + 4} - \sqrt[3]{x^2 - 4} \right)$
- c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2} - 2 \cos x}$
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{\pi}{6x}$

Megoldás:

- a) A nevezőben lévő gyökjelet az $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ nevezetes azonosság segítségével elimináljuk, így a $(x + 1)$ tényezővel le lehet egyszerűsíteni:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(\sqrt{6x^2 + 3} - 3x)}{6x^2 + 3 - 9x^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(\sqrt{6x^2 + 3} - 3x)}{3(1 - x^2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{6x^2 + 3} - 3x}{3(1 - x)} = \frac{3 + 3}{6} = 1$$

- b) A számlálóban lévő gyökjelet nevezetes azonosság segítségével kiküszö-

böljük, majd az $x^{\frac{4}{3}}$ tényezőt bevisszük a gyökjelek alá:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{4}{3}} (\sqrt[3]{x^2+4} - \sqrt[3]{x^2-4}) \left((\sqrt[3]{x^2+4})^2 + \sqrt[3]{x^2+4}\sqrt[3]{x^2-4} + (\sqrt[3]{x^2-4})^2 \right)}{(\sqrt[3]{x^2+4})^2 + \sqrt[3]{x^2+4}\sqrt[3]{x^2-4} + (\sqrt[3]{x^2-4})^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{4}{3}} \left[(\sqrt[3]{x^2+4})^3 - (\sqrt[3]{x^2-4})^3 \right]}{\sqrt[3]{(x^2+4)^2} + \sqrt[3]{x^4-16} + \sqrt[3]{(x^2-4)^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{4}{3}} \overbrace{[(x^2+4) - (x^2-4)]}^8}{\sqrt[3]{x^4+8x^2+16} + \sqrt[3]{x^4-16} + \sqrt[3]{x^4-8x^2+16}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{\sqrt[3]{1+\frac{8}{x^2}+\frac{16}{x^4}} + \sqrt[3]{1-\frac{16}{x^4}} + \sqrt[3]{1-\frac{8}{x^2}+\frac{16}{x^4}}} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

c) A változó transzformációjával 0-hoz tartó határértékké alakítunk:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2} - 2 \cos x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{\sqrt{2} - 2 \cos(z + \frac{\pi}{4})} \stackrel{*}{=}$$

Addíciós összefüggések segítségével tovább alakítunk úgy, hogy ne $\frac{0}{0}$ alakú legyen a határérték:

$$\begin{aligned} & \stackrel{*}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{\sqrt{2} - 2 \left(\cos z \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin z \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{\sqrt{2}(1 - \cos z - \sin z)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}}{\sqrt{2} (2 \sin^2 \frac{z}{2} - 2 \sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2})} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z/2}{\sqrt{2} (\sin \frac{z}{2} - \cos \frac{z}{2})} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

d) A függvényt a tört bővítésével $\frac{\sin x}{x}$ alakú határértékké alakítjuk át:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{\pi}{6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi \sin \frac{\pi}{6x}}{\frac{\pi}{6x}} = \frac{\pi}{6}$$

3) Határozza meg a következő függvények bal és jobb oldali határértékét az adott helyen!

a) $\frac{1}{1 + \sqrt[3-x]{4}} \quad x_0 = 3$

b) $\frac{1}{(x-1)^6} \quad x_0 = 1$

Megoldás:

- a) *Jobb oldali határérték:* Változótranszformációval 0-hoz tartó határértékké alakítunk $x = 3 - h$ ($h > 0$) helyettesítéssel:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{1 + \sqrt[3]{3-x/4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 4^{1/h}} = 0$$

Bal oldali határérték: A módszer hasonló, azonban itt a transzformációs összefüggés $x = 3 + h$, ahol $h > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{1 + \sqrt[3]{3-x/4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 4^{-1/h}} = 1$$

- b) Itt is változótranszformációt végzünk:

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{(x-1)^6} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^6} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{(x-1)^6} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(-h)^6} = +\infty$$

- 4) Vizsgálja meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából!

- a) $\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 3x + 2}$
b) $\frac{3}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$
c) $\frac{1}{\sin 3x}$

Megoldás:

- a) A számlálót és a nevezőt szorzattá alakítjuk:

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x-1)}$$

Ennek a függvénynek az értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$, ezen a halmazon folytonos. Egyenként megvizsgáljuk azokat a pontokat, ahol a függvény nem folytonos.

Az $x_0 = 2$ -ben vett bal és jobb oldali határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x-1)} = \frac{7}{1} = 7 = \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x),$$

azaz $\exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$. Ezért a függvénynek itt hégzagpontja van.
 Az $x_0 = 1$ -ben vett bal és jobb oldali határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x-1)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x-1)} = -\infty$$

Itt tehát nem létezik határérték, a függvénynek $x = 1$ -ben *lényeges szingularitása* van. Ez ráadásul *pólus*, mert mindkét oldali határérték abszolútértékben ∞ .

b) A függvény nem értelmezett, ha $x = 0$. (Mivel $2^{\frac{2}{x}} + 1 = 0$ sosem teljesül, ezért ez nem szűkíti tovább a D_f -t.) Az értelmezési tartomány tehát $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ezen a halmazon a függvény folytonos.

Az $x = 0$ -ban a bal és jobb oldali határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{3}{2^{\frac{2}{x}} + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{3}{2^{\frac{2}{x}} + 1} = 3$$

Tehát a függvénynek $x = 0$ -ban lényeges szingularitása van.

c) A függvény nem értelmezett, ha $\sin 3x = 0$. Ez akkor áll fenn, ha:

$$3x = k\pi$$

$$x = \frac{k\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

A függvény értelmezési tartománya tehát $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. A további vizsgálatot a k 3-mas osztási maradéka szerint végezzük el.

Ha $k = 3t, t \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}(3t)+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi t+0} \frac{1}{\sin 3t} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}(3t)-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi t-0} \frac{1}{\sin 3t} = -\infty$$

Hasonlóan a többi esetben:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}(3t+1)+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi t + \frac{\pi}{3}+0} \frac{1}{\sin 3t} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}(3t+1)-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi t + \frac{\pi}{3}-0} \frac{1}{\sin 3t} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}(3t+2)+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi t + \frac{2\pi}{3}+0} \frac{1}{\sin 3t} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}(3t+2)-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi t + \frac{2\pi}{3}-0} \frac{1}{\sin 3t} = -\infty$$

Látható ezek alapján, hogy minden szakadási helyen pólusa van a függvénynek.

5) Határozza meg a következő függvények aszimptotáinak egyenletét!

a) $\frac{3(x^2 - 5)}{2(x^2 + 1)}$

b) $\frac{x^2 - 4}{x}$

Megoldás:

a) Az aszimptota $mx + c$ alakú egyenes, ahol

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad c = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx],$$

illetve olyan függőleges $x = x_0$ egyenes, melyre $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$.
Ebben a példában $D_f = \mathbb{R}$, ezért függőleges aszimptota nincs.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 = m$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \frac{3}{2} = c$$

Vagyis egy vízszintes aszimptota van, egyenlete $y = \frac{3}{2}$.

b) Az értelmezési tartomány $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Belátjuk, hogy $x = 0$ -ban aszimptotája van a függvénynek:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x^2 - 4}{x} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = +\infty,$$

vagyis az $x = 0$ egyenes valóban aszimptota.

Keressünk nem függőleges aszimptotát!

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2 - 4}{x}}{x} = 1 = m$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{4}{x} = 0$$

A másik aszimptota tehát az $y = x$ egyenes.

6) Van-e valós megoldása az $x^4 - 5x^3 + x = 1$ egyenletnek?

Megoldás:

Az $f(x) = x^4 - 5x^3 + x - 1$ függvény folytonos. Könnyen ellenőrizhető, hogy $f(0) = -1 < 0$, valamint $f(5) = 4 > 0$, így Bolzano tétele szerint $\exists x \in [-1, 5] : f(x) = 0$, azaz a fenti egyenletnek van valós gyöke.

7) Mivel egyenlő az alábbi kifejezés:

$$\sin\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}\right)$$

Megoldás:

Addíciós tétellel:

$$\begin{aligned} \sin\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}\right) &= \\ &= \sin\arcsin\frac{4}{5} \cdot \cos\arcsin\frac{5}{13} + \sin\arcsin\frac{5}{13} \cdot \cos\arcsin\frac{4}{5} = \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} = \frac{48 + 15}{65} = \frac{63}{65} \end{aligned}$$

8) A következő példákban a függvények határértékeinek meghatározásának leggyakoribb módszereit mutatjuk be egy-egy példával.

a) A számláló és nevező szorzattá alakítása után:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{x+1} = \frac{2+5}{2+1} = \frac{7}{3}$$

b) A számlálóban elimináljuk a négyzetgyököt, ezután könnyen adódik a határérték:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x+x^2} + 1}{\sqrt{1+x+x^2} + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2 - 1}{x(\sqrt{1+x+x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

c) Szorzattá alakítás és egyszerűsítés után:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8}{6} \frac{x^3 - \frac{1}{8}}{x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}} = \frac{8}{6} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(x - \frac{1}{2})(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4})}{(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})} = \\ &= \frac{8}{6} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{3}} = \frac{8}{6} \cdot \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{8}{6} \cdot \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3-2}{6}} = \frac{8}{6} \cdot \frac{3}{1} = 6 \end{aligned}$$

d) $\frac{\sin x}{x}$ alakú határértékre visszavezethető a tört bővítésével:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5$$

e) Szintén $\frac{\sin x}{x}$ alakra vezet, ha felhasználjuk a tangens definícióját:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = 1$$

f) A tangens definícióját felhasználva három egyszerűbb határérték szorzatára bomlik fel:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{(\cos x) x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1}{\cos x} \stackrel{*}{=} 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

A *-gal jelölt egyenlőség bizonyítása:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

g) Racionális törtfüggvény határértéke $x \rightarrow \infty$ -ban:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 5x^2}{3x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{x} - 5}{3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = -\frac{5}{3}$$

h) Két szögfüggvény különbségére vonatkozó nevezetes azonosság segítségével két $\frac{\sin x}{x}$ alakú határértéket kapunk:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 6x - \cos 3x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{6x+3x}{2} \sin \frac{6x-3x}{2}}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{7x}{2} \sin \frac{3x}{2} \frac{21}{4}}{\frac{7x}{2} \frac{3x}{2}} = -\frac{21}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{7x}{2}}{\frac{7x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} = -\frac{21}{2} \end{aligned}$$

i) A $\cos x$ -et $\frac{x}{2}$ argumentumú szögfüggvényekkel felírva egyszerűsíthető a tört:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos x}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} = 3 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} = 3 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right) = 3\sqrt{2}$$

j) Helyettesítéssel határérték:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1-2}{x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x+1} \right)^x \stackrel{*}{=}$$

A helyettesítés képlete: $-\frac{2}{x+1} = \frac{1}{u}$, amiből átrendezéssel: $x = 2u - 1$.
Ezzel a határérték:

$$\stackrel{*}{=} \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{-2u-1} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right]^{-2} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{-1} = e^{-2} \cdot 1 = \frac{1}{e^2}$$

k) Rendőr-elv alkalmazása:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}}$$

A gyökjel alatti mennyiséget alulról és felülről becsljük, felhasználva, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = e$, kapjuk:

$$\sqrt[x]{2} < \sqrt[x]{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}} < \sqrt[x]{3}$$

Itt $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{3} = 1$, ezért az eredeti függvényre is $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.

l) Helyettesítéses határérték:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-2+3}{x-1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{x-1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x \left(1 + \frac{\frac{3}{2}}{x-1}\right)^x$$

A helyettesítés: $\frac{1}{u} = \frac{\frac{3}{2}}{x-1}$, vagyis $x = \frac{3}{2}u + 1$. Ezzel a zárójelben lévő kifejezés határértéke:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right]^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{1}{u}\right) = e^{\frac{3}{2}}$$

De $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty$, tehát $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^x = +\infty$.

m) A tangens definíciója, és a szögfüggvények transzformációjával:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \sin x = 1$$

n) Racionális törtfüggvény határértéke esetében a nevező legnagyobb fokszámú tagjával egyszerűsítünk:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - x + 2}{8x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{8 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{5}{8}$$

o) $\frac{\sin x}{x}$ típusú határértéket kapunk, ha bővítünk $5x$ -szel:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{8x} \cdot \frac{5x}{\operatorname{tg} 5x} = \frac{8}{5}$$

9) Számoljuk ki a következő függvényhatárértékeket.

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 100x}{x}; & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{1-x^2} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{2x}; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{2x^2}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^3}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^4}; \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin 4x}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{x}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}; \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - x^3}{x - 3}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}; & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3^x + 7^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}; & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right); & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^2-1} \right); \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x^2}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x^2}}; & \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x^2)^{\frac{1}{x^2}}; & \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{ctg} x}; \\ \lim_{x \rightarrow 3} \left(2 - \frac{x}{3} \right)^{\frac{1}{x-3}}; & \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}; & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\sin x}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \arcsin x)}{x}; & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x - 1}; \end{array}$$

10) Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin x$ függvénynek létezik-e határértéke a $+\infty$ -ben?

11) Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3-1}{3x^3+x+2}$ függvény esetén számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ -et.

12) Számoljuk ki a következő határértékeket:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}); & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}); \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}; & \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2}; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x - \cos x}{x}; & \end{array}$$

13) Igazoljuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, úgynevezett Dirichlet függvénynek egyetlen pontban sincs határértéke. Tehát sehol sem folytonos.

14) Folytonos-e az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\{x\}$ függvény, ahol $\{x\}$ az x törtrészét jelöli.

15) Vizsgáljuk a következő függvények folytonosságát:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} ;$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} ;$$

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0 \end{cases} .$$

16) Folytonos-e az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ függvény?