

Függvények – Feladatok

Értelmezési tartomány

1) Adja meg a következő függvények legbővebb értelmezési tartományát!

a) $\sqrt{5 - 10x}$

b) $\sqrt[3]{\frac{x}{x^2 + x + 1}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{x - |x|}}$

d) $\lg \operatorname{tg} x$

e) $\ln x + \ln(-x)$

Megoldás:

a) $5 - 10x \geq 0$

$$\frac{1}{2} \geq x$$

b) $x^2 + x + 1 \neq 0 \implies x \in \mathbb{R}$

c) $\sqrt{x - |x|} \neq 0$ és $x - |x| \geq 0$ sosem teljesül.

d) $\operatorname{tg} x: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ esetén van értelmezve.

$\lg \operatorname{tg} x: \operatorname{tg} x > 0$, azaz $\frac{\pi}{2} + k\pi > x > k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), tehát ez utóbbi az értelmezési tartomány.

e) $x > 0$ és $-x > 0$ egyszerre kellene, hogy teljesüljön. Vagyis az értelmezési tartomány \emptyset .

2) Határozzuk meg a következő függvény értelmezési tartományát!

$$y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$$

A négyzetgyök értelmezési tartománya miatt teljesülnie kell az alábbi feltételeknek:

$$1+x \geq 0 \quad \text{és} \quad 1-x \geq 0$$

Ezek átrendezésével:

$$-1 \leq x \quad \text{és} \quad x \leq 1$$

Innen az értelmezési tartomány: $D_f = [-1, 1]$.

3) Határozzuk meg a következő függvény értelmezési tartományát!

$$y = \frac{x+1}{x^2-3x}$$

A tört nevezője nem lehet 0, ami azt jelenti, hogy $x \neq 0$ és $x \neq 3$. További megszorítás nincs, ezért az értelmezési tartomány: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0,3\}$.

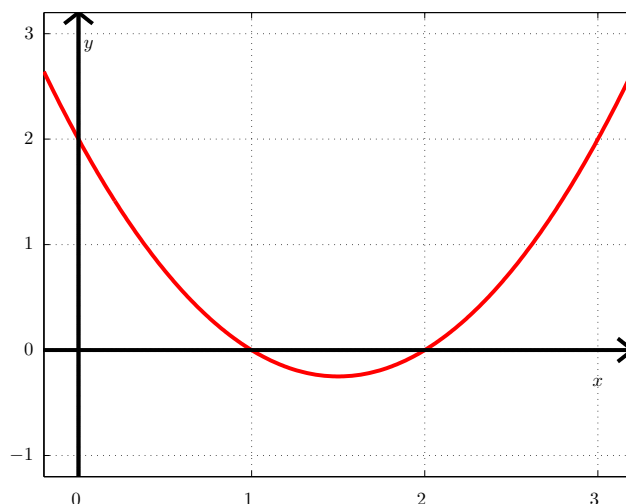
4) Határozzuk meg a következő függvény értelmezési tartományát!

$$y = \ln(x^2 - 3x + 2)$$

A logaritmus miatt:

$$x^2 - 3x + 2 > 0$$

A bal oldal gyökei $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$. Ábrázolva a függvényt:



1. ábra. Az area kotangens hiperbolikus függvény grafikonja

Leolvasható, hogy $D_f = (-\infty, 1[\cup]2, \infty)$

5) Határozzuk meg a következő függvény értelmezési tartományát!

$$y = \sqrt{\ln \frac{5x - x^2}{4}}$$

A gyökjel alatti kifejezés nemnegatív kell, hogy legyen:

$$\frac{5x - x^2}{4} \geq 1 \implies -x^2 + 5x - 4 \geq 0$$

A bal oldal gyökei $x_1 = 1$ és $x_2 = 4$, vagyis az előbbi egyenlőtlenség $1 \leq x \leq 4$ esetén teljesül. Vagyis ez épp az értelmezési tartomány $D_f = [1,4]$.

6) Határozzuk meg a következő függvény értelmezési tartományát!

$$y = \arcsin \frac{3-2x}{5}$$

Az arkusz szinusz értékkészlete miatt:

$$-1 \leq \frac{3-2x}{5} \leq 1$$

Innen átrendezéssel:

$$-5 \leq 3-2x \leq 5$$

$$-8 \leq -2x \leq 2$$

$$4 \geq x \geq -1$$

Az értelmezési tartomány tehát: $D_f = [-1, 4]$.

7) Határozzuk meg a következő függvény értelmezési tartományát!

$$y = 2\arccos \sqrt{9-x^2}$$

Egyrészt a négyzetgyök értelmezési tartománya miatt:

$$9-x^2 \geq 0,$$

vagyis $3 \geq x \geq -3$.

Másrészt az arkusz koszinusz értelmezési tartománya miatt:

$$9-x^2 \leq 1$$

$$x^2 \geq 8$$

Ez alapján $x \geq \sqrt{8}$ vagy $-\sqrt{8} \leq x$ kell, hogy teljesüljön.

A két feltétel összevetéséből az értelmezési tartomány:

$$D_f = [-3, -\sqrt{8}] \cup [\sqrt{8}, 3].$$

8) Határozzuk meg a következő függvények értelmezési tartományát.

a) $f(x) = \frac{x}{x-|x|}$;

b) $f(x) = \sqrt{x^2-3x+4}$;

c) $f(x) = \sqrt{3+x-x^2}$;

d) $f(x) = \tan\left(\frac{4x+1}{3}\right)$;

e) $f(x) = \arctan(\sqrt{x^2-1})$;

f) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$;

g) $f(x) = \arccos(x^2)$;

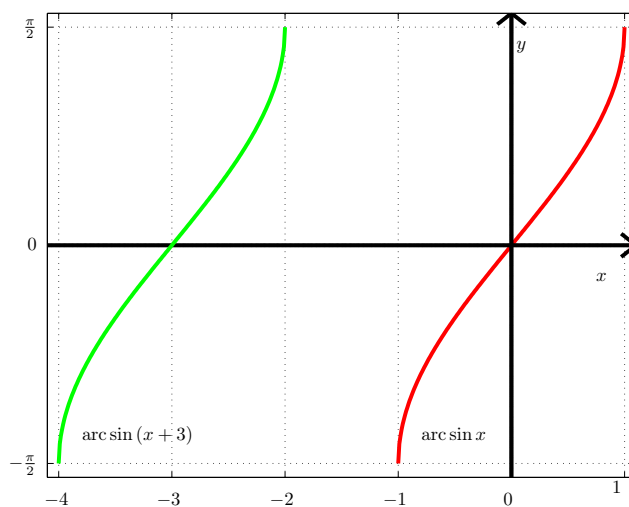
h) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

Értékkészlet

1) A következő feladatokban határozzuk meg a függvények értelmezési tartományát, értékkészletét és ábrázoljuk a függvényt!

a) $y = \arcsin(x + 3)$

Értelmezési tartomány: az arkusz szinusz argumentuma -1 és 1 közé kell, hogy essen. Emiatt $-1 \leq x + 3 \leq 1 \implies -4 \leq x \leq -2$. Vagyis $D_f = [-4, -2]$. *Értékkészlet:* nincs külső transzformáció, ezért $R_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

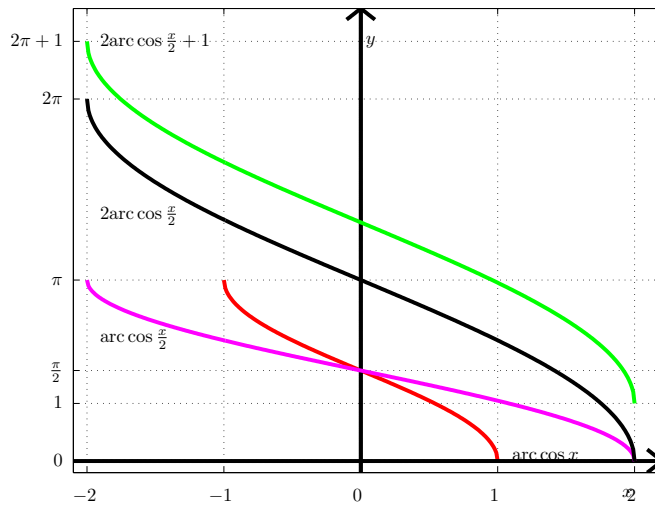


2. ábra. Függvényábrázolás transzformációval

b) $y = 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + 1$

Értelmezési tartomány: az arkusz koszinusz argumentuma -1 és 1 közé kell, hogy essen. Emiatt $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \implies -2 \leq x \leq 2$. Vagyis $D_f = [-2, 2]$.

Értékkészlet: a külső transzformáció miatt $R_f = [1, 2\pi + 1]$.

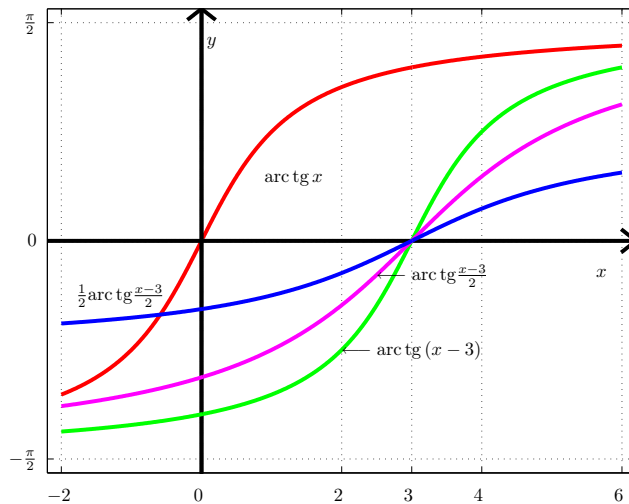


3. ábra. Függvényábrázolás transzformációval

c) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2}$

Értelmezési tartomány: Az arkusz tangens értelmezési tartományát nem szűkíti le ez a belső transzformáció, ezért $D_f = \mathbb{R}$.

Értékkészlet: a külső transzformáció miatt $R_f = \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[$.

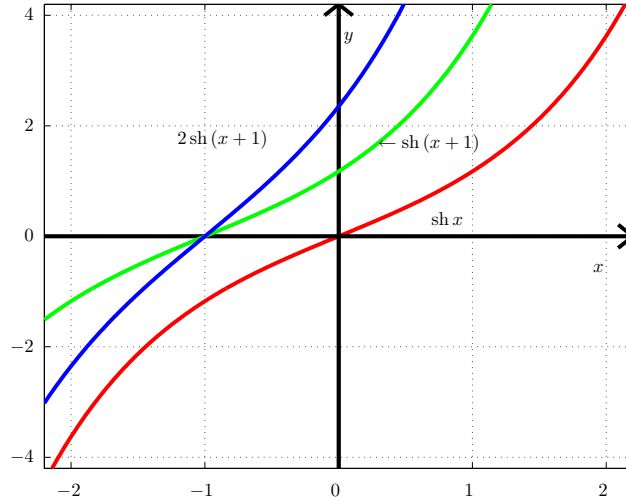


4. ábra. Függvényábrázolás transzformációval

d) $y = 2\operatorname{sh}(x+1)$

Értelmezési tartomány: $D_f = \mathbb{R}$.

Értékkészlet: $R_f = \mathbb{R}$.



5. ábra. Függvényábrázolás transzformációval

2) Határozza meg az $\frac{1}{f}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét, ha

a) $f(x) = 2 - \cos 3x$

b) $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$

Megoldás:

a) $2 - \cos 3x \neq 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ -re teljesül, vagyis az értelmezési tartomány \mathbb{R} .

$$1 \leq 2 - \cos 3x \leq 3$$

$$\text{Innen az értékkészlet: } \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos 3x} \leq 1.$$

b) $2 + x - x^2 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} \implies x_1 = -1; x_2 = 2$$

Az értelmezési tartomány tehát: $-1 < x < 2$.

Teljes négyzetté alakítással:

$$2 + x - x^2 = -(x^2 - x - 2) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

Ennek a teljes négyzetnek az értelmezési tartományon belül szélsőértéke van $\frac{1}{2}$ -nél és 2-nél. Előbbinél maximum van, értéke $f(x_{\max}) =$

$$= \sqrt{-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}} = \frac{3}{2}, \text{ a minimumhelye } x_{\min} = 2\text{-nél van, értéke } f(x_{\min}) = 0. \text{ Az } \frac{1}{f} \text{ függvénynek tehát minimuma van } \frac{2}{3}\text{-nál, maximuma}$$

ma nincs (hiszen az f tetszőlegesen kicsi pozitív értéket felvehet), vagyis az értékkészlet: $\frac{2}{3} < y$.

3) Hogyan változik az f függvény transzformáltjainak értelmezési tartománya és értékkészlete, ha $D_f = [-1, 2] \setminus \{0\}$, és $R_f = [3, \infty[$

- a) $f(x + 8)$
- b) $f(-2x)$
- c) $f(x^3)$
- d) $2f(x)$
- e) $5f(x) - 6$
- f) $f^2(x)$
- g) $-f(-x) - 1$
- h) $\frac{2}{3}f(3x - 1) + 5$

Megoldás:

Az első három függvény csak belső transzformációt tartalmaz, ezért R_f változatlan.

- a) $x + 8 \in [-1, 2] \setminus \{0\} \implies x \in [-9, -6] \setminus \{-8\}$
- b) $-2x \in [-1, 2] \setminus \{0\} \implies x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$
- c) $x^3 \in [-1, 2] \setminus \{0\} \implies x \in [-1, \sqrt[3]{2}] \setminus \{0\}$

A második három függvény csak külső transzformációt tartalmaz, ezért D_f változatlan.

- d) $f(x) \in [3, \infty[\implies 2f(x) \in [6, \infty[$
- e) $f(x) \in [3, \infty[\implies 5f(x) - 6 \in [9, \infty[$
- f) $f(x) \in [3, \infty[\implies f^2(x) \in [9, \infty[$

Az utolsó két esetben mindkét tartomány módosul:

- g) $D_f : -x \in [-1, 2] \setminus \{0\} \implies x \in [-2, 1] \setminus \{0\}$
 $R_f : f(x) \in [3, \infty[\implies -f(x) - 1 \in]-\infty, -4]$
- h) $D_f : 3x - 1 \in [-1, 2] \setminus \{0\} \implies 3x \in [0, 3] \setminus \{1\} \implies x \in [0, 1] \setminus \{\frac{1}{3}\}$
 $R_f : f(x) \in [3, \infty[\implies \frac{2}{3}f(x) \in [2, \infty[\implies \frac{2}{3}f(x) + 5 \in [7, \infty[$

4) Vizsgáljuk meg, hogy a következő függvények injektívek-e, szürjektívek-e. Ha a függvények bijektívek akkor, határozzuk meg a függvények inverzeit.

a) $f : (-\infty, 2) \rightarrow (-\infty, 0), f(x) = \frac{x^2+1}{x-2};$

b) $f : \mathbb{R} \setminus \pm\sqrt{3} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-2}{x^2-3};$

c) $f : (\sqrt{3}, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), f(x) = \frac{1}{x^2-3};$

d) $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), f(x) = e^{2x+1};$

e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 2x + 1;$

f) $f : (1, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0), \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right).$

5) Határozzuk meg a következő függvények értelmezési tartományát, értékkészletét, majd ábrázoljuk őket.

a) $\cos(-x - 1);$

b) $\sin\left(-\frac{x}{2}\right);$

c) $\tan\left(-\frac{x}{2}\right);$

d) $1 - 3 \cos\left(\frac{x}{3} - 1\right);$

e) $\frac{1+\sin(2x-1)}{2};$

f) $\arcsin\left(-\frac{x+1}{2}\right);$

g) $1 - \arccos\left(-\frac{x}{2}\right);$

h) $-\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right);$

i) $\sqrt{x-2}.$

Paritás

Állapítsuk meg az alábbi függvényekről, hogy párosak, vagy páratlanok, vagy nincs értelme a paritásnak!

1) $y = x^3 + x$

Páratlan függvény, hiszen két páratlan függvény összege.

2) $y = x^4 - x^2$

Páros függvény, hiszen két páros függvény különbsége.

3) $y = 3x^2 - \frac{2x^2}{x^6 + 1}$

Páros függvény, hiszen páros függvényekből áll elő. (Figyelem, $y = 1$ függvény is páros!)

4) $y = \sin x - x^6$

Nincs paritása, hiszen egy páros és egy páratlan függvény különbsége.

5) $y = x^3 \cos x$

Páratlan függvény; páros és páratlan függvény szorzata páratlan. Legyen ugyanis $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ a szorzatfüggvény, és $f(x)$ páros, $g(x)$ páratlan függvények. Ekkor:

$$h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot [-g(x)] = -f(x) \cdot g(x) = -h(x),$$

vagyis a $h(x)$ függvény tényleg páratlan.

6) $y = \frac{x^2 + x^6}{3x}$

Páratlan függvény, mert páros és páratlan függvények hányadosa.

7) $y = \frac{\sin 5x}{6x}$

Páros függvény, mert két páratlan függvény hányadosa.

8) $y = x^2 \sin^2 x$

Páros függvény, mert páros függvények szorzata.

Inverz függvény

Képezzük a következő függvények inverzeit:

1) $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

Átrendezés után:

$$x = \sqrt[3]{y^2 + 1} \implies x^3 = y^2 + 1 \implies y^2 = x^3 - 1 \implies y = \sqrt{x^3 - 1}$$

Az inverz függvény: $y = \sqrt{x^3 - 1}$.

2) $y = \ln \sqrt{2x + 5}$

$$x = \ln \sqrt{2y + 5} \implies e^x = \sqrt{2y + 5} \implies e^{2x} = 2y + 5 \implies y = \frac{1}{2} (e^{2x} - 5)$$

Az inverz függvény:

$$y = \frac{1}{2} (e^{2x} - 5)$$

3) $y = \sqrt[3]{1 + e^{4x}}$

$$x = \sqrt[3]{1 + e^{4y}} \implies x^3 - 1 = e^{4y} \implies \ln(x^3 - 1) = 4y$$

Az inverz függvény: $y = \frac{1}{4} \ln(x^3 - 1)$.

$$4) y = \frac{x-5}{6x}$$

$$x = \frac{y-5}{6y} \implies 6xy = y-5 \implies y(6x-1) = -5$$

$$\text{Az inverz függvény: } y = \frac{5}{1-6x}.$$

$$5) y = 5^{2x+3} - 6$$

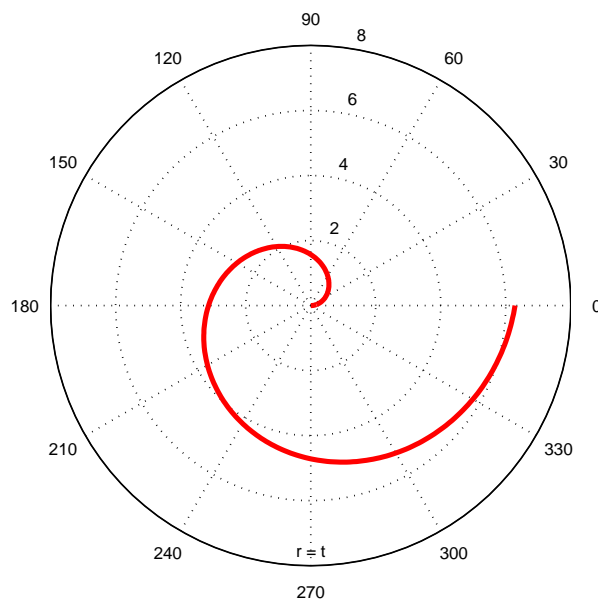
$$x = \frac{y-5}{2} \implies x+6 = \frac{y+7}{2} \implies \log_5(x+6) = \frac{y+7}{2}$$

$$\text{Az inverz függvény: } y = \frac{1}{2} [\log_5(x+6) - 7]$$

Polárkoordinátás ábrázolás

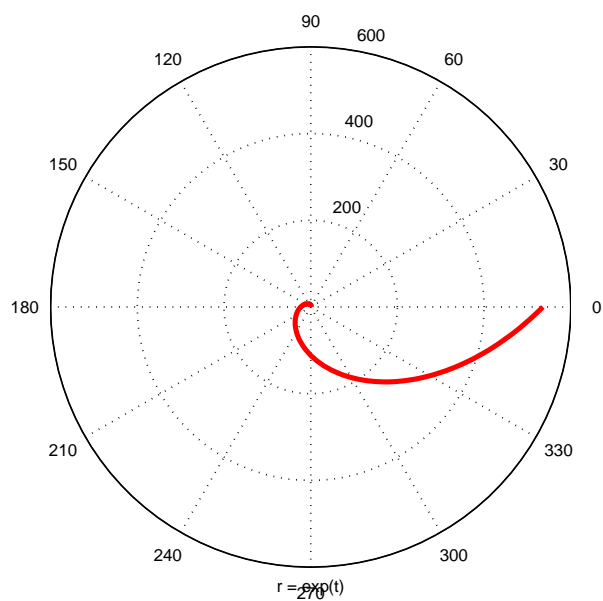
Ábrázoljuk polárkoordináta-rendszerben az alábbi függvényeket:

$$1) r(\varphi) = a \cdot \varphi$$



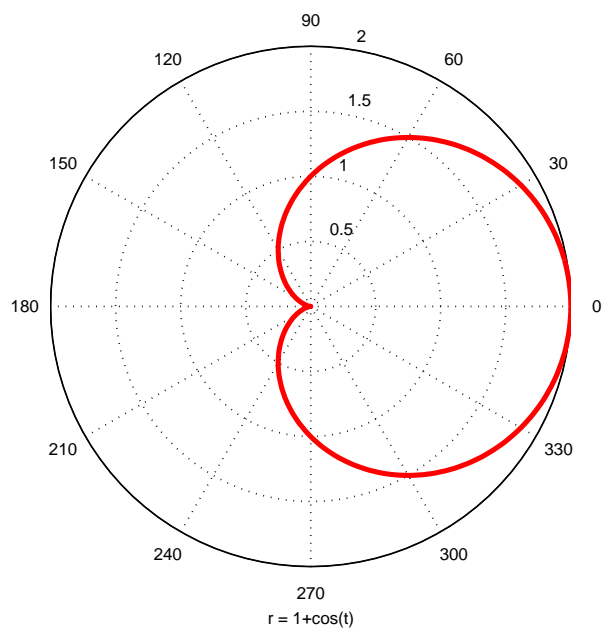
6. ábra. Archimédeszi spirál

$$2) r(\varphi) = e^\varphi$$



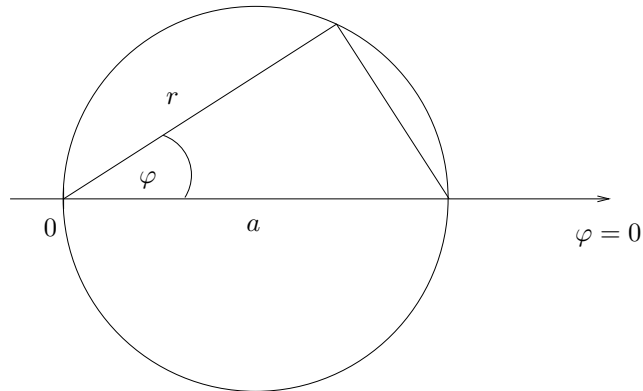
7. ábra. Logaritmicus spirál

3) $r(\varphi) = a(1 + \cos \varphi)$



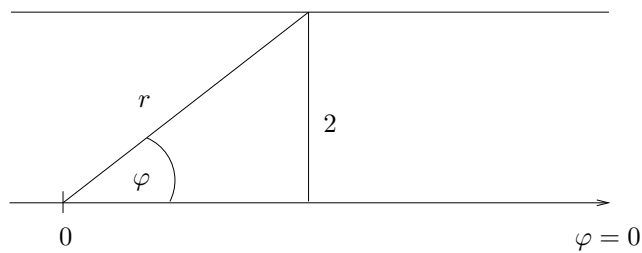
8. ábra. Kardiod

4) $r(\varphi) = a \cdot \cos \varphi$



9. ábra. Az $r = \frac{a}{2}$ sugarú kör ábrázolása polárdiagramon

- 5) Írjuk fel a polártengellyel párhuzamos, és tőle 2 egységre haladó egyenes egyenletét polárkoordinátás megadásban:



10. ábra. A polártengelytől 2 egységre lévő egyenes

Az ábráról látható, hogy $\frac{2}{r} = \sin \varphi$, ahonnan átrendezéssel az egyenes egyenlete: $r = \frac{2}{\sin \varphi}$.

- 6) A derékszögű koordináta-rendszer és a polár koordináta-rendszer közötti kapcsolat segítségével írjuk fel az archimédeszi spirális és a logaritmikus spirális paraméteres egyenletrendszerét!

– Archimédeszi spirális: polárkoordinátákban $r = a\varphi$. Ebből a megoldás:

$$\begin{aligned} x &= a\varphi \cos \varphi \\ y &= a\varphi \sin \varphi \end{aligned}$$

– Logaritmikusz spirális: polárkoordinátákban $r = e^\varphi$. Innen:

$$\begin{aligned}x &= e^\varphi \cos \varphi \\y &= e^\varphi \sin \varphi\end{aligned}$$

Implicit függvénymegadás

1) $x^2 - 4x + y^2 + 8y + 4 = 0$

Az x -et és y -t tartalmazó tagokat teljes négyzetté alakítjuk. Innen:

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 16,$$

ami egy $(2, -4)$ középpontú, $r = 4$ sugarú kör egyenlete.

2) $x^2 + 9y^2 - 16y = 0$

Hasonlóan járunk el, mint a kör esetében. Az átalakítás után:

$$x^2 + 9(y - 1)^2 = 9$$

Mindkét oldalt 9-cel elosztva egy ellipszis egyenletét kapjuk:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y - 1)^2}{1} = 1.$$

Az ellipszis középpontja $(0, 1)$, a két fél nagytengelye $a = 3$ és $b = 1$ hosszúságú.

3) $9x^2 - 4y^2 = 36$

Átalakítás után:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Ez egy hiperbola egyenlete.

Paraméteres függvénymegadás

1)
$$\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$$

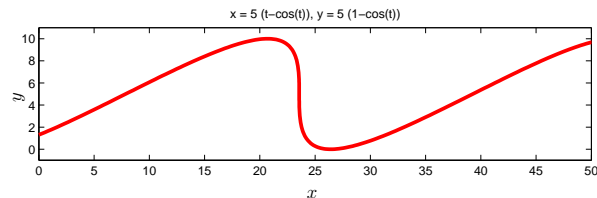
Látható $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ alapján, hogy ezzel ekvivalens:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

ami egy origó középpontú, $a = 5$ és $b = 3$ fél nagytengelyekkel rendelkező ellipszis egyenlete.

$$2) \begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$$

Ez egy ciklois, vagyis egy olyan görbe, amit egy $r = 5$ sugarú kör kerületi pontja ír le, miközben a kör gördül az x tengelyen.



11. ábra. Ciklois görbe

$$3) \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -t + 5 \end{cases}$$

Fejezzük ki a t -t x -szel; az első egyenletből:

$$t = \frac{x + 1}{3}$$

Ezt a második egyenletbe visszahelyettesítve:

$$y = 5 - \frac{x + 1}{3} = \frac{15 - x - 1}{3} = -\frac{1}{3}x + \frac{14}{3},$$

ami egy egyenes egyenlete, $m = -\frac{1}{3}$ meredekséggel, és $b = \frac{14}{3}$ tengelymetszettel.

4) Az alábbi, paraméteresen adott egyváltozós függvények egyenletrendszeréből küszöböljük ki a paramétert!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \left. \begin{array}{l} x = \sin t \\ y = \cos 2t \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} x = t^2 + 2t \\ y = t^2 + 2t + 3 \end{array} \right\} & \text{c) } \left. \begin{array}{l} x = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = \frac{at}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right\} \\ \text{d) } \left. \begin{array}{l} x = 10^t + 10^{-t} \\ y = 10^t - 10^{-t} \end{array} \right\} & & \end{array}$$

Megoldás:

a) $y = \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - x^2 - x^2 = 1 - 2x^2$

b) $y = x + 3$

$$c) x^2 + y^2 = \frac{a^2 + a^2 t^2}{1 + t^2} = a^2$$

$$d) x^2 - y^2 = 10^{2t} + 10^{-2t} - 10^{2t} + 2 - 10^{-2t} = 4$$

Függvényábrázolás

Ábrázoljuk a következő függvényeket:

1) Racionális törtfüggvény:

$$y = \frac{3x}{2-x}$$

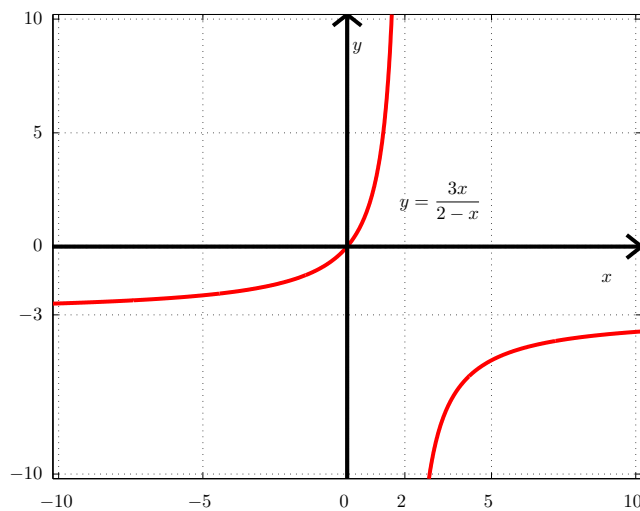
Rögtön látható, hogy az $x = 2$ egyenes aszimptota. Ezen túl érdemes megvizsgálni a függvény határértékeit, ezek segítik a törtfüggvény ábrázolását.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{2-x} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x}{2-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x}{2-x} = -\infty$$

A függvény grafikonja tehát:

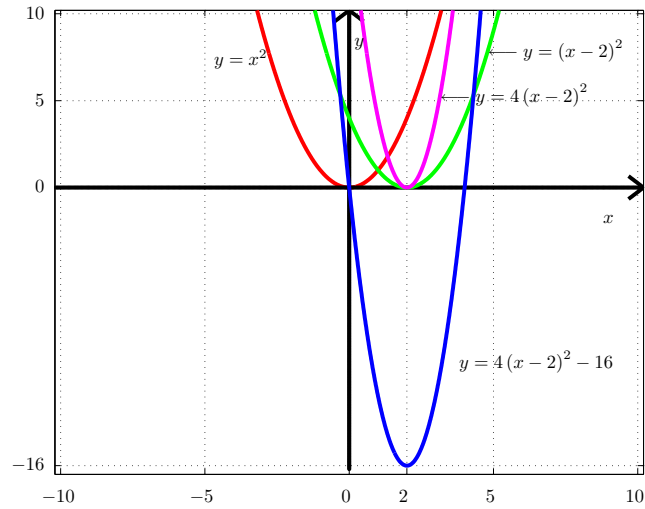


12. ábra. Transzformált reciprokfüggvény grafikonja

2) Teljes négyzetté alakítás:

$$y = 4x^2 - 8x = 4(x^2 - 4x + 4) = 4[(x-2)^2 - 4] = 4(x-2)^2 - 16$$

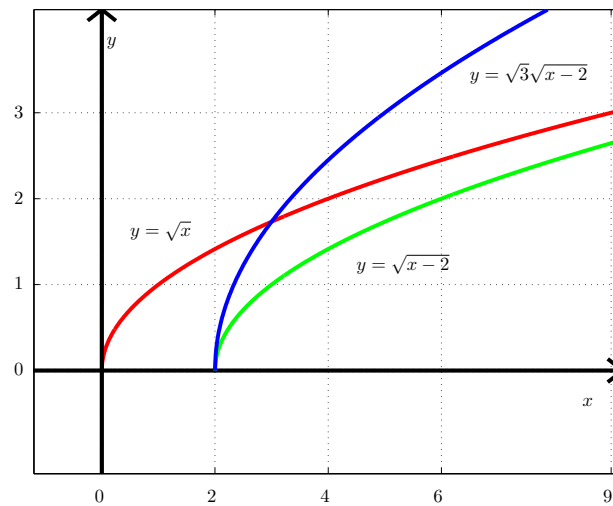
A függvény grafikonját az $y = x^2$ függvényből kiindulva transzformációkkal képezzük:



13. ábra. Másodfokú függvény transzformációja

3) Négyzetgyököt tartalmazó függvény:

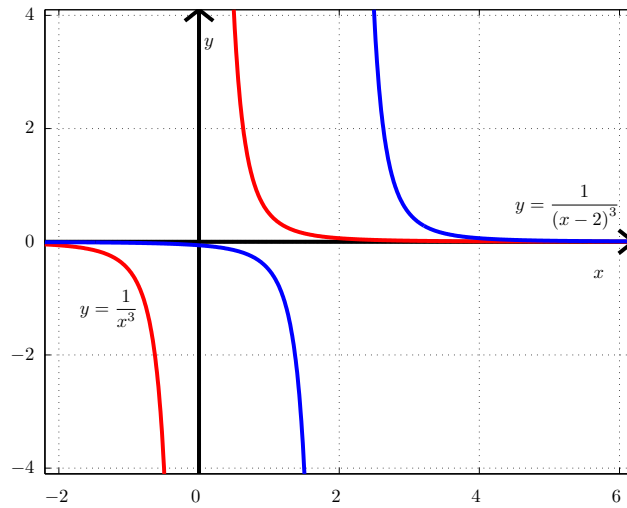
$$y = \sqrt{3x - 6} = \sqrt{3}\sqrt{x - 2}$$



14. ábra. Gyök függvény transzformációja

4) Reciprok függvény

$$y = \frac{1}{(x-2)^3}$$



15. ábra. Törtfüggvény transzformációval

5) Milyen geometriai transzformációval származik az $f(x)$ grafikonjából az $|f(x)|$, illetve a $f|x|$ függvények grafikonja?

Megoldás:

$|f(x)|$ -nél a függvény x tengely alatti részét x -re tükrözzük; $f|x|$ -nél az y -tól jobbra eső rész változatlan marad, és ezt y -ra tükrözzük.