Vektorok a térben

Egy (v_1, v_2, v_3) valós számokból álló hármast vektornak nevezzünk a térben ($\mathbb{R}^3$-ban). Használni fogjuk a $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ jelölést. A v_1, v_2, v_3-at a $\vec{v}$ vektor komponenseinek nevezzük. Tekintsük a $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3)$ vektorokat és λ valós számot.

- ⋄ *Összeadás*: $\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$.
- ⋄ *Skalárral való szorzás*: $\lambda \cdot \vec{\mathbf{v}} = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3)$.
- ⋄ *A $\vec{\mathbf{v}}$ vektor hossza*: $|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.
- ⋄ A $\vec{\mathbf{0}} = (0{,}0{,}0)$ vektort *nullvektornak* nevezzük.
- ⋄ *Kollinearitás*: a $\vec{\mathbf{v}}$ és $\vec{\mathbf{w}}$ kollineárisak, ha létezik olyan $\lambda \neq 0$ valós szám, hogy $\vec{\mathbf{v}} = \lambda \cdot \vec{\mathbf{w}}$. Ha λ pozitív akkor azt mondjuk, hogy $\vec{\mathbf{u}}$ és $\vec{\mathbf{v}}$ egyirányúak.
- ⋄ *Lineáris függő, illetve független vektorok.* A $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots \vec{\mathbf{v}}_n$ vektorokat lineárisan függő nevezzük, ha léteznek olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nem mind nulla valós számok, hogy

  $$\lambda_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}_1 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{\mathbf{v}}_n = \vec{\mathbf{0}}.$$

  Ellenkező esetben a $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ vektorokat lineárisan függetlennek nevezzük. A $\vec{\mathbf{v}}$ és $\vec{\mathbf{w}}$ vektorok lineárisan függetlenek, ha nem kollineárisak. Az $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ és $\vec{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3)$ vektorok lineárisan függetlenek, ha az

  $$\begin{cases} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 v_1 + \lambda_3 w_1 = 0 \\ \lambda_1 u_2 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 w_2 = 0 \\ \lambda_1 u_3 + \lambda_2 v_3 + \lambda_3 w_3 = 0 \end{cases}$$

  λ-kban három ismeretlenes egyenletrendszernek csak a $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ és $\lambda_3 = 0$ megoldása van. Háromnál több vektor mindig lineárisan összefügg. Megjegyezzük, hogy a nullvektor mindenkivel összefügg. Tehát, ha a null vektor szerepel a vektorok egy felsorolásában, akkor azok a vektorok lineárisan összefüggnek.
- ⋄ *Két vektor skalárszorzata.* Ha $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ két vektor akkor az ezek skalárszorzata a

  $$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

  szám. Megjegyezzük, hogy $|\vec{\mathbf{v}}|^2 = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$. A skalárszorzat tulajdonságai:

1. $\vec{\mathbf{0}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0$ minden $\vec{\mathbf{u}}$ vektor esetén,
2. $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}}$ minden $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ esetén,
3. $(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}$ minden $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ esetén,
4. $(\lambda \vec{\mathbf{u}}) \cdot = \lambda(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}})$ minde $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ vektorok és λ valós szám esetén,
5. $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = |\vec{\mathbf{u}}||\vec{\mathbf{v}}| \cos(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$, ahol $\cos(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$ az $\vec{\mathbf{u}}$ és $\vec{\mathbf{v}}$ vektorok szöge.

◇ *Merőlegesség.* Két nem nulla vektort merőlegesnek nevezzünk, ha skalárszorzatuk nulla.

◇ *Vektori szorzat.* Az $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorok vektori szorzata a

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

vektor. A vektori szorzatnak a következő tualjdonságai vannak:

1. $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}}$ minde $\vec{\mathbf{u}}$ vektor esetén,
2. $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = -\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}}$ minden $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ vektorok esetén,
3. $(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) \times \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$ minden $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ esetén,
4. $(\lambda \vec{\mathbf{u}}) \times \vec{\mathbf{v}} = \lambda(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}})$ minden $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ vektor és λ valós szám esetén,
5. ha $\vec{\mathbf{u}}$ és $\vec{\mathbf{v}}$ nem nulla vektorok és $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$, akkor ez a két vektor kollineáris,
6. $(\lambda \vec{\mathbf{u}} + \mu \vec{\mathbf{v}}) \cdot (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}})$ minden $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ vektorok és λ, μ valós számok esetén, tehát az $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ merőleges az $\vec{\mathbf{u}}$ és $\vec{\mathbf{v}}$ vektorok által meghatározott síkra.
7. $|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}| = |\vec{\mathbf{u}}||\vec{\mathbf{v}}| \sin(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$ minden nem nulla $\vec{\mathbf{u}}$ és $\vec{\mathbf{v}}$ vektor esetén

A vektori szorzat geometriai jelentése: $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ vektori szorzat merőleges az $\vec{\mathbf{u}}$ és $\vec{\mathbf{v}}$ vektorokra, hosszát az utolsó tulajdonság adja meg, míg az irányítását a jobbkézszabály.

◇ *Vegyes szorzat.* Az $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ vektorok vegyes szorzata az $\vec{\mathbf{u}}(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})$ valós szám melyet $(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}})$-vel is jelölünk. A vegyes szorzat tulajdonságai:

1. Az $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ vektorok esetén

$$(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) = (\vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = (\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{u}}) = -(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{v}}) = \ldots.$$

2. A vegyes szorzat lineáris mindhárom változóban, azaz

$$(\lambda \vec{\mathbf{u}} + \lambda' \vec{\mathbf{u}}', \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) = \lambda(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) + \lambda'(\vec{\mathbf{u}}', \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}),$$
$$(\vec{\mathbf{u}}, \lambda \vec{\mathbf{v}} + \lambda' \vec{\mathbf{v}}', \vec{\mathbf{w}}) = \lambda(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) + \lambda'(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}', \vec{\mathbf{w}}),$$
$$(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \lambda \vec{\mathbf{w}} + \lambda' \vec{\mathbf{w}}') = \lambda(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) + \lambda'(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}').$$

3. Az $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ nem nulla vektorok esetén $(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) = 0$ pontosan akkor, ha az $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ vektorok lineárisan függőek.

A vegyes szorzat geometriai jelentése: a $|(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}})|$ szám a $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ vektorok, mint élek által alkotott paralelepidon térfogata. Az $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ vektorok, mint élek által alkotott tetraéder térfogata $V = \dfrac{1}{6}|(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}})|$.

◇ Megjegyzés a lineáris függőség, függetlenséghez. A $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ pontosan akkor lineárisan függőek, ha a $(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}})$ vegyes szorzat nulla. Továbbá az $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ vektorok lineárisan függőek pontosan akkor, ha $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$.

Feladatok

1) Tekintsük az $\vec{\mathbf{a}}(-8{,}7{,}1)$, $\vec{\mathbf{b}}(0{,}3{,}2)$ és $\vec{\mathbf{c}}(1, -1{,}4)$ vektorokat. Bontsa fel a $\vec{\mathbf{d}}(31, -37{,}19)$ vektort $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ és $\vec{\mathbf{c}}$ irányú összetevőkre. (Keressük meg azokat a λ, μ, ν valós számokat, amelyre $\vec{\mathbf{d}} = \lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}} + \nu\vec{\mathbf{c}}$.)

2) Számítsa ki az alábbi vektorok hosszát:

$\vec{\mathbf{a}}(8, -14{,}8)$, $\quad\vec{\mathbf{b}}(0{,}3{,}0)$, $\quad\vec{\mathbf{c}}(\frac{5}{31}, -\frac{30}{31}, \frac{6}{31})$, $\quad\vec{\mathbf{d}}(4, -9{,}10)$.

3) Adja meg az alábbi vektorokkal egyirányú egységvektorok koordinátáit:

$\vec{\mathbf{a}}(4, -12{,}3)$, $\quad\vec{\mathbf{b}}(0{,}0, -7)$, $\quad\vec{\mathbf{c}}(1{,}2, -3)$, $\quad\vec{\mathbf{d}}(-5{,}0 - {,}12)$.

4) Számítsa ki a következő vektorpárok szögét:

a) $(7, -1{,}6)$, $\quad(2{,}20{,}2)$;

b) $(3{,}6, -2)$, $\quad(5{,}4, -20)$;

c) $(9{,}1{,}4)$, $\quad(5{,}4, -20)$;

d) $(-1{,}4{,}7)$, $\quad(5, -2{,}0)$;

e) $(4, -9)$, $\quad(2{,}5)$.

5) Bontsa fel az $\vec{\mathbf{a}}(3, -6{,}9)$ vektort a $\vec{\mathbf{b}}(2, -2{,}1)$ vektorral párhuzamos és rá merőleges összetevőkre.

6) Adjon meg olyan vektort, mely felezi az $\vec{\mathbf{a}}(-1{,}4{,}8)$ és $\vec{\mathbf{b}}(-5{,}4{,}20)$ vektorok szögét.

7) Legyenek $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}}$ és $\vec{\mathbf{u}}$ tetszőleges vektorok. Bizonyítsuk be, hogy az $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{u}}$ és $\vec{\mathbf{c}} \times \vec{\mathbf{u}}$ vektorok koplanárisak.

8) Számítsuk ki az $ABCD$ tetraéder térfogatát:

a)	$A(2,-1,1)$,	$B(5,5,4)$,	$C(3,2,1)$,	$D(4,1,3)$;
b)	$A(0,0,0)$,	$B(-2,2,3)$,	$C(0,2,-1)$,	$D(4,0,1)$;
c)	$A(0,0,0)$,	$B(1,0,0)$,	$C(0,1,0)$,	$D(0,0,1)$.

9) Döntse el, hogy egy síkban vannak-e az alábbi pontok:

a)	$(1,2,-1)$	$(0,1,5)$	$(-1,2,1)$	$(2,1,3)$;
b)	$(1,2,0)$	$(0,1,1)$	$(3,5,4)$	$(-4,-2,6)$.

10) Adottak az $\vec{\mathbf{a}}(2,-3,1)$, $\vec{\mathbf{b}}(4,2,-1)$, $\vec{\mathbf{c}}(1,0,-3)$ vektorok. Számítsa ki az $(\vec{\mathbf{a}} \times \times \vec{\mathbf{b}}) \times \vec{\mathbf{c}}$ koordinátáit.

11) A koordinátarendszerben úgy helyezzük el az egységkockát, hogy az origó az egyik csúcsba essék, a tengelyek pozitív fele pedig egy-egy kockaélt tartalmazzon. Adjuk meg a kockacsúcsok koordinátáit.

12) Egy szabályos hatszög középpontja $K(4,1,4)$, két szomszédos csúcsa $A(3,1,5)$ és $B(3,2,4)$. Adjuk meg a többi négy csúcs koordinátáit.

13) Az $ABCD$ paralelogramma csúcsai $A(3,-2,5)$, $B(0,1,0)$, $C(-5,2,7)$. Számítsuk ki a D csúcs koordinátáit.

14) Egy paralelogramma középpontja $K(-3,2,1)$, két szomszédos csúcsa $A(1,- -1,3)$, $B(-7,0,0)$. Adjuk meg a másik két csúcs koordinátáit.

15) Egy paralelepipedon egyik csúcsa az origó, az ebből kiinduló élek végpontjai $A(3,6,-4)$, $B(-4,7,0)$, $C(9,1,-3)$. Számítsuk ki a többi négy csúcs koordinátáit.

16) Egy szabályos ötszög egyik csúcsának a koordinátái $A_1(1,0,0)$, középpontja az origó. Adjuk meg a többi csúcs koordinátáit.

17) Döntsük el, hogy kollineárisak-e a következő vektorpárok:

a) $\mathbf{a}(-3,4,7)$ és $\mathbf{b}(2,5,1)$;

b) $\mathbf{c}(12,9,15)$ és $\mathbf{d}(8,6,10)$;

c) $\mathbf{e}(7,-4,2)$ és $\mathbf{f}(0,0,0)$.

18) Döntsük el, hogy az alábbi ponthármasok egy egyenesen vannak-e:

a) $A(-4{,}5{,}2)$, $B(2{,}0,-3)$, $C(14,-10,-13)$;

b) $D(0{,}3{,}5)$, $E(4{,}0{,}7)$, $F(4,-18,-23)$;

c) $G(0{,}0{,}0)$, $H(14,-6{,}8)$, $I(-21{,}9,-12)$;

d) $J(1{,}1{,}1)$, $K(4{,}1{,}7)$, $L(5,-1,-1)$.

19) Az adott $A(4,-1{,}3)$, $B(5{,}4{,}1)$ pontokhoz meghatározandók a $C(7,y,z)$ pont y, z koordinátái úgy, hogy az A, B, C pontok egy egyenesen legyenek.

20) Mik a $P(3,-4{,}8)$ pont $C(3{,}7,-2)$ pontra vonatkozó tükörképének a koordinátái?

21) Az $A(7{,}0,-1)$, $B(-2{,}4{,}0)$, $C(-5{,}4{,}2)$, $D(4{,}0{,}1)$ pontok egy paralelogramma négy csúcsa (mutassuk ezt meg!). A $P(1{,}3,-1)$ pontot tükrözzük az A-ra, a tükörképet B-re, az így nyert pontot a C-re, majd végül az így kapottat a D-re. Mik a negyedik tükörkép koordinátái? Általánosítsuk az eredményünket.

22) Adjuk meg a $\vec{\mathbf{v}}(a_1,a_2,a_3)$ vektornak a koordinátasíkokon lévő vetületeit.

23) Komplanárisak-e a $3\mathbf{a}-4\mathbf{b}$, $\mathbf{a}+7\mathbf{b}$, $-\mathbf{a}+43\mathbf{b}$ vektorok?

24) Adottak az $\mathbf{a}(2,-1{,}1)$, $\mathbf{b}(-1{,}3{,}0)$, $\mathbf{c}(1{,}0{,}7)$ vektorok. Bontsuk fel a $\mathbf{d}(9,-9{,}10)$ vektort $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ irányú összetevőkre.

25) Adottak az $\mathbf{a}(-8{,}7{,}1)$, $\mathbf{b}(0{,}3{,}2)$, $\mathbf{c}(1,-1{,}4)$ vektorok. Bontsuk fel a $\mathbf{d}(31,-37{,}19)$ vektort $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ irányú összetevőkre.

26) Bontsuk fel a $\vec{\mathbf{v}}(13{,}56)$ vektort az $\mathbf{a}(2{,}7)$ és $\mathbf{b}(-3{,}0)$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre.

27) Döntsük el, hogy az alábbi vektorhármasok lineárisan függetlenek-e:

a) $(-4{,}2{,}1)$, $(0{,}4{,}3)$, $(-4{,}6{,}4)$;

b) $(0{,}0{,}0)$, $(2,-9{,}7)$, $(-1,-1{,}0)$;

c) $(-9,-9{,}3)$, $(1{,}0{,}2)$, $(1{,}1{,}1)$;

d) $(-2{,}3)$, $(4{,}1)$, $(1{,}5)$.

28) Válasszuk ki az alábbi vektorok közül a független (nem kollineáris) vektorpárokat:

$$\mathbf{a}(4,-1,0),\quad \mathbf{b}(3,5,0),\quad \mathbf{c}(-8,2,0),\quad \mathbf{d}(-6,-10,2),\quad \mathbf{e}(0,0,0).$$

29) Döntsük el, függetlenek-e az alábbi vektorok:

$$\mathbf{a}(-1,5,19),\quad \mathbf{b}(17,1,4),\quad \mathbf{c}(-8,-9,-10),\quad \mathbf{d}(1,0,0).$$

30) Az egységnyi élhosszúságú kockában az egy csúcsból kiinduló két lapátló vektora $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$.

a) Számítsuk ki az $\mathbf{xy}$ szorzat értékét.

b) Számítsuk ki $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ szögét.

31) Az ABC szabályos háromszög oldalhossza 2. Számítsuk ki az $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ szorzat értékét.

32) Legyen $\mathbf{a}$ és $\vec{\mathbf{v}}$ az egységkocka egy csúcsból kiinduló egyik élvektora és a testátló vektora. Számítsuk ki az $\mathbf{a}\vec{\mathbf{v}}$ szorzat értékét és az $\mathbf{a}$, $\vec{\mathbf{v}}$ vektorok szögét.

33) Egy szabályos tetraéder egy csúcsából induló egyik élvektora $\mathbf{a}$, ebből a csúcsból a szemközti lap súlypontjába mutató vektor $\mathbf{s}$. Számítsuk ki az $\mathbf{as}$ szorzat értékét, ha a tetraéder élhossza 1.

34) Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok páronként merőlegesek. Bizonyítsuk be, hogy

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2.$$

35) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{a}$ merőleges a következő vektorokra:

a) $(\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$;

b) $\mathbf{b} - \dfrac{\mathbf{a}(\mathbf{ab})}{\mathbf{a}^2}$.

36) Hogyan kell megválasztani β értékét, hogy $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$ merőlegesek legyenek egymásra? ($\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem kollineáris vektorok.)

37) Három egységvektor páronként egyenlő szöget zár be egymással, összegük nullvektor. Mekkora ez a szög?

38) Négy egységvektor páronként egyenlő szöget zár be, összegük nullvektor. Mekkora ez a szög?

39) Adottak $\mathbf{a}(3,-2,5)$ és $\mathbf{b}(-1,0,2)$ vektorok. Számítsuk ki a következő szorzatok értékét:

$$\mathbf{ab}, \qquad (3\mathbf{a}-2\mathbf{b})\mathbf{a}, \qquad (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2, \qquad \mathbf{a}^2.$$

40) A szögek kiszámítása nélkül döntsük el, hogy az alábbi vektorpárok hegyes-, derék- vagy tompaszöget zárnak be egymással:

a) $(-3,2,0)$, $(4,1,5)$; b) $(1,-1,9)$, $(2,1,3)$;

c) $(1,1,1)$, $(-10,7,3)$; d) $(5,-3,4)$, $(1,-1,2)$.

41) Számítsuk ki az alábbi vektorok hosszát:

$\mathbf{a}(8,-14,-8)$; $\mathbf{b}(0,3,0)$; $\mathbf{c}\left(\frac{5}{31},-\frac{30}{31},\frac{6}{31}\right)$;

$\mathbf{d}(4,-9,10)$; $\mathbf{e}(24,-7)$; $\mathbf{f}(1,1)$.

42) Adjuk meg az alábbi vektorokkal egyirányú egységvektorok koordinátáit:

$\mathbf{a}(4,-12,3)$; $\mathbf{b}(0,0,-7)$; $\mathbf{c}(1,2,-3)$;

$\mathbf{d}(-5,0,12)$; $\mathbf{e}(12,-5)$; $\mathbf{f}(9,9)$.

43) Adjuk meg az alábbi vektorok irányába mutató egységvektorokat:

$$\vec{\mathbf{v}}_1(-3,0,4); \quad \vec{\mathbf{v}}_2(0,0,-6); \quad \vec{\mathbf{v}}_3(-1,4,-8); \quad \vec{\mathbf{v}}_4(9,16,-3).$$

44) Számítsuk ki a következő vektorpárok szögét:

a) $\mathbf{a}(7,-1,6)$, $\mathbf{b}(2,20,1)$;

b) $\mathbf{c}(3,6,-2)$, $\mathbf{d}(5,4,-20)$;

c) $\mathbf{e}(9,1,4)$, $\mathbf{f}(4,9,1)$;

d) $\mathbf{g}(-1,4,7)$, $\mathbf{h}(5,-2,0)$;

e) $\mathbf{m}(4,-9)$, $\mathbf{n}(2,5)$.

45) Adottak $\mathbf{a}(3,-6,1)$ és $\mathbf{b}(12,4,z)$ vektorok. Határozzuk meg z értékét úgy, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek legyenek egymásra.

46) Az ABC háromszög csúcsainak a koordinátái $A(-3{,}4{,}0)$, $B(-9{,}11{,}42)$, $C(1{,}2{,}4)$.

a) Mekkora a háromszög területe?
b) Mekkora az A csúcsnál fekvő szöge?

47) Bontsuk fel az $\mathbf{a}(3,-6{,}9)$ vektort a $\mathbf{b}(2,-2{,}1)$ vektorral párhuzamos és rá merőleges összetevőkre.

48) Bontsuk fel az $\mathbf{c}(3{,}6,-2)$ vektort a $\mathbf{d}(5{,}4,-20)$ vektorral párhuzamos és rá merőleges összetevőkre.

49) Mekkora a $\vec{\mathbf{v}}(-9{,}1{,}1)$ vektornak a $\mathbf{a}(5,-6{,}30)$ irányú egyenesen lévő vetülete?

50) Adjunk meg olyan vektort, amely felezi az $\mathbf{a}(-1{,}4{,}8)$ és $\mathbf{b}(-5{,}4{,}20)$ vektorok szögét.

51) Az $ABCD$ téglalap csúcsainak koordinátái: $A(2{,}6{,}0)$, $B(1{,}2{,}3)$, $C(-2{,}8,z)$. Számítsuk ki z értékét és a D csúcs koordinátáit.

52) Egy négyzet két csúcsának koordinátái: $A(5{,}4,-3)$, $B(4{,}6,-1)$, egy oldala pedig párhuzamos a $\vec{\mathbf{v}}(4,-2,z)$ vektorral. Számítsuk ki a négyzet másik két csúcsának a koordinátáit.

53) Igazoljuk a következő azonosságokat:

a) $(\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$;

b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})=(\mu-\lambda)(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$;

c) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b})=2\mathbf{b}\times\mathbf{a}$;

d) $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$.

54) Számítsuk ki az $\mathbf{a}(2,-2{,}1)$ és $\mathbf{b}(2{,}3{,}6)$ vektorok szögének szinuszát.

55) Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{u}$ tetszőleges vektorok. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{a}\times\mathbf{u}$, $\mathbf{b}\times\mathbf{u}$, $\mathbf{c}\times\mathbf{u}$ vektorok komplanárisak.

56) Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vektorokra fennállnak az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}\times\mathbf{d}$ és $\mathbf{a}\times\mathbf{c}=\mathbf{b}\times\mathbf{d}$ egyenlőségek. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{a}-\mathbf{d}$ és $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ vektorok kollineárisak.

57) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ akkor és csakis akkor helyvektora három kollineáris pontnak, ha $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

58) Az **a**, **b**, **c** egy sík három nem kollineáris pontjának helyvektorai. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ a sík egy normálvektora.

59) Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ egyenlőség egyenértékű az $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ egyenlőséggel. (**a**, **b**, **c** között nincs két kollineáris.)

60) Számítsuk ki annak a paralelogrammának a területét, amelynek élvektorai **a** és **b**:

a) $\mathbf{a}(-4{,}1{,}2)$, $\mathbf{b}(5{,}2{,}7)$;

b) $\mathbf{a}(-9{,}0{,}9)$, $\mathbf{b}(7{,}2,-5)$;

c) $\mathbf{a}(1,-7)$, $\mathbf{b}(-3{,}2)$.

61) Számítsuk ki az ABC háromszög területét, ha

a) $A(0{,}0{,}0)$, $B(-1{,}4{,}7)$ $C(5{,}2{,}1)$;

b) $A(1{,}0{,}2)$, $B(4{,}3{,}8)$ $C(0,-4{,}6)$;

c) $A(3{,}6)$, $B(2,-7)$ $C(4{,}4)$;

d) $A(4,-1,-3)$, $B(3{,}1,-2)$ $C(1{,}5{,}0)$.

62) Számítsuk ki az $\mathbf{a}(a_1, a_2)$, $\mathbf{b}(b_1, b_2)$ vektorok által kifeszített háromszög területét.

63) Számítsuk ki az ABC háromszög B csúcsához tartozó magasság hosszát, ha a csúcsok koordinátái: $A(1,-1{,}2)$, $B(5,-6{,}2)$, $C(1{,}3,-1)$.

64) Adjunk meg olyan **x** vektort, amely merőleges az $\mathbf{a}(2,-3{,}1)$ és $\mathbf{b}(1,-2{,}3)$ vektorokra, és a $\mathbf{c}(1{,}2,-7)$ vektorral szorozva: $\mathbf{cx} = 10$.

65) Adjuk meg az x és y értékeket úgy, hogy a $\mathbf{c}(x, y{,}16)$ merőleges legyen az $\mathbf{a}(1{,}5{,}4)$ és $\mathbf{b}(-1{,}3{,}1)$ vektorokra.

66) Egy kocka egy csúcsából kiinduló két élvektora **a** és **b**. Fejezzük ki ezek segítségével a csúcsból kiinduló harmadik élvektort.

67) Az **a**, **b**, **c** egységvektorok közül **a** és **b** merőlegesek egymásra, **c** pedig 30°-os szöget zár be síkjukkal. Számítsuk ki **abc** értékét.

68) Mutassuk meg, hogy ha **a**, **b**, **c** egy tégla egy csúcsból kiinduló élvektorai, akkor $\mathbf{abc} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$.

69) Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ nem komplanáris vektorok. Komplanárisak-e: $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$, $5\mathbf{b}-4\mathbf{c}$, $\mathbf{c}-\mathbf{a}$?

70) Mekkora az $\mathbf{a}(2{,}3{,}4)$, $\mathbf{b}(2{,}3{,}1)$, $\mathbf{c}(1{,}2{,}3)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata?

71) Számítsuk ki az $ABCD$ tetraéder térfogatát:

a) $A(2,-1{,}1)$, $B(5{,}5{,}4)$, $C(3{,}2,-1)$, $D(4{,}1{,}3)$;

b) $A(0{,}0{,}0)$, $B(-2{,}2{,}3)$, $C(0{,}2,-1)$, $D(4{,}0{,}1)$.

72) Az $ABCD$ tetraéder térfogata 5 egység. Mik a D csúcs koordinátái, ha D az y tengelyen van, és a másik három csúcs: $A(2{,}1,-1)$, $B(3{,}0{,}1)$, $C(2,-1{,}3)$?

73) Döntsük el, hogy komplanárisak-e az alábbi vektorhármasok:

a) $(2{,}3,-1)$, $(1,-1{,}3)$, $(1{,}9,-11)$;

b) $(3,-2{,}1)$, $(2{,}1{,}2)$, $(3,-1,-2)$;

c) $(2,-1{,}2)$, $(1{,}2,-3)$, $(3,-4{,}7)$.

74) Döntsük el, hogy egy síkban vannak-e az alábbi pontnégyesek:

a) $(1{,}2,-1)$, $(0{,}1{,}5)$, $(-1{,}2{,}1)$, $(2{,}1{,}3)$;

b) $(1{,}2{,}0)$, $(0{,}1{,}1)$, $(3{,}5,-4)$, $(-4,-2{,}6)$.

75) Válasszuk meg z értékét úgy, hogy az $\mathbf{a}(4,-1{,}2)$, $\mathbf{b}(1{,}2{,}3)$, $\mathbf{c}(3{,}3,z)$ vektorok komplanárisak legyenek.

76) Mekkora az $A(2{,}3{,}1)$, $B(4{,}1,-2)$, $C(6{,}3{,}7)$, $D(-5,-4{,}8)$ csúcsokkal rendelkező tetraéder D-hez tartozó magassága?

77) Bizonyítsuk be a következő azonosságokat:

a) $(\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b})\mathbf{bc}=\mathbf{abc}$;

b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{b}+\mathbf{c})(\mathbf{c}+\mathbf{a})=2\mathbf{abc}$;

c) $\mathbf{ab}(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c})=\gamma\mathbf{abc}$;

d) $(\mathbf{a}+\vec{\mathbf{v}})(\mathbf{b}+\vec{\mathbf{v}})(\mathbf{c}+\vec{\mathbf{v}})=\mathbf{abc}+\mathbf{ab}\vec{\mathbf{v}}+\mathbf{bc}\vec{\mathbf{v}}+\mathbf{ca}\vec{\mathbf{v}}$.

78) Bizonyítsuk be, hogy

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2+(\mathbf{ab})^2=\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2.$$

(Lagrange-féle azonosság)

79) Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ független vektorok, és legyen $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$. Fejezzük ki az α, β, γ együtthatókat az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vektorok segítségével.

80) Adottak az $\mathbf{a}(2, -3{,}1)$, $\mathbf{b}(4{,}2, -1)$, $\mathbf{c}(1{,}0, -3)$ vektorok. Számítsuk ki az $(\mathbf{a} \times \times\, \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ koordinátáit.

81) Legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőleges vektorok. Mutassuk meg, hogy $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = \mathbf{a}^2\mathbf{b}$.