

Számsorozatok

Binomiális együttható fogalma: Az $\binom{n}{k}$ -val jelölt binomiális együttható kiszámítása: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; jelentése: egy n elemű halmaz k -elemű részhalmazainak a száma (n elemből hányféleképpen lehet kiválasztani k elemet; ismétlés nélküli kombinációk száma). Néhány összefüggés:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$,
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$,
- $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$.

◇ **Binomiális tétel:** $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

◇ **Bernoulli-egyenlőtlenség:** Ha $\alpha > -1$, akkor $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$.

Számsorozat fogalma: Számsorozatnak nevezünk egy a_n ($n = 1, 2, \dots$) sortozatot, ahol $a_n \in \mathbb{R}$ minden n -re.

Zérussorozat fogalma: Az a_n sortozatot zérussorozatnak (vagy *nullsorozatnak*) nevezzük, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Konvergens számsorozat: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, azaz az a_n számsorozat határértéke az a szám (a_n konvergál a -hoz), ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ értékhez létezik olyan $N(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy $|a_n - a| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$.

◇ Konvergens számsorozat mindig korlátos.

◇ Minden korlátos, monoton sorozat konvergens.

◇ **Cauchy-féle konvergenckritérium:** Az a_n számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ értékhez létezik olyan $N(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy $|a_n - a_m| < \varepsilon$, ha $n, m > N(\varepsilon)$.

Részsorozat fogalma: Az a_n számsorozat egy részsorozatának nevezzük az a_{n_i} számsorozatot, ahol $i = 1, 2, \dots$ és a_{n_i} minden tagja eleme az a_n részsorozatnak.

- ◇ Konvergens számsorozat részsorozata is konvergens, és határértékeik egyenlők.

Következmények konvergens a_n és b_n sorozatokra:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$, ahol $b_n \neq 0 \forall n$ esetén és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{b_n} = a^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$,
- Ha b_n egy pozitív tagú sorozat, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^{a_n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n},$$

- Legyen a_n egy nullához tartó konvergens sorozat és b_n egy korlátos sorozat. Ekkor az $(a_n b_n)_{n \geq 1}$ sorozat konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0$.
- Ha a_n egy konvergens sorozat és b_n egy divergens sorozat, akkor $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$ divergens.
- Fogó tétel: Ha egy b_n sorozat esetén létezik két a_n és c_n konvergens sorozat és $N > 0$ természetes szám úgy, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ és $a_n \leq b_n \leq c_n$ minden $n > N$ esetén, akkor a b_n sorozat konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.
- A fogó tételhez hasonlóan, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$) és $a_n \leq b_n$ ($a_n \geq b_n$), akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$).
- Hányados kritérium: Ha az a_n pozitív tagú sorozat fennáll, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ akkor igazak a következő állítások:
 1. ha $l < 1$ akkor az a_n sorozat konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;
 2. ha $l < 1$ akkor az $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)_{n \geq 1}$ sorozat konvergens;
 3. ha $l > 1$ akkor az a_n sorozat divergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$;
 4. ha $l > 1$ akkor az $(a_1 + \dots + a_n)_{n \geq 1}$ sorozat divergens;
 5. ha $l = 1$ akkor az a_n sorozat lehet konvergens és divergens is.

Néhány fontos határérték

- Ha $\begin{cases} |q| < 1, \text{ akkor } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \\ q = 1, \text{ akkor } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1, \\ |q| > 1, \text{ akkor } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \pm\infty \text{ (divergens);} \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = \frac{1}{1-q}$, ha $|q| < 1$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!}\right) = e$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = e^p$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n!} = 0$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, ha $a > 0$;
- Legyen $P(n) = a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0$ egy p -ed fokú polinom ($p \geq 1$). Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \begin{cases} -\infty, & \text{ha } a_p < 0 \\ +\infty, & \text{ha } a_p > 0 \end{cases}$$

- Legyen $P(n) = a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0$ egy p -ed fokú, illetve $Q(n) = b_q n^q + \dots + b_1 n + b_0$ egy q -ad fokú polinom. Tegyük fel, hogy $Q(n) \neq 0$ bármely esetén. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \frac{a_p}{b_q}, & \text{ha } p = q \\ 0, & \text{ha } p < q \\ \pm\infty, & \text{ha } p > q \end{cases}$$

- Tegyük fel, hogy az a_n konvergens sorozat tagjai nem negatívak. Ekkor a $(\sqrt[k]{a_n})_{n \geq 1}$ sorozat konvergens minden $k > 1$ természetes számra és $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$.
- Ha $a_n > 0$ minden n esetén és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$.

Példák

- 1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$, azaz nullsorozat.
- 2) Az $1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$ sorozat divergens.
- 3) A $0,9; -0,99; 0,999; -0,9999; \dots$ sorozat páratlan indexű elemeiből álló részsorozat határértéke 1, míg a páros indexű tagokból álló részsorozat határértéke -1 . Az eredeti sorozatnak tehát két különböző sűrűsödési helye (torlódási pontja) van, tehát a sorozat divergens.
- 4) Az $a_n = \left\{ 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \dots \right\} = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ sorozat váltakozó előjelű (alternáló), illetve $|a_n| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$. Az ilyen sorozatokat *Leibniz-sorozatnak* nevezzük. Leibniz-sorozat mindig konvergens:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$
- 5) Az $a_n = \{1, -1, 1, -1, \dots\} = (-1)^{n-1}$ sorozat divergens.
- 6) $a_n = \{1; 1,1; 1,01; 1,001; \dots\} = 1 + \frac{1}{10^{n-1}}$, tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.
- 7) $a_n = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$, tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.
- 8) Az $a_n = \{0, 1, 0, 1, \dots\} = \frac{1 + (-1)^n}{2}$ sorozat divergens, mert két torlódási pontja van.
- 9) $a_n = \left\{ 0, \frac{4}{3}, \frac{8}{6}, \frac{12}{11}, \frac{16}{18}, \dots \right\} = \frac{4n}{n^2 + 2} = \frac{1}{\frac{n^2 + n}{4n}} = \frac{1}{\frac{n}{4} + \frac{1}{2n}}$, tehát
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$
- 10) $a_n = \frac{3n + 1963}{2n - 1526} = \frac{3 + \frac{1963}{n}}{2 - \frac{1526}{n}} \rightarrow \frac{3}{2}$, ha $n \rightarrow \infty$.
- 11) $a_n = \frac{n^2 - 6n + 7}{n^2 + 12n + 49} = \frac{1 - \frac{6}{n} + \frac{7}{n^2}}{1 + \frac{12}{n} + \frac{49}{n^2}} \rightarrow 1$, ha $n \rightarrow \infty$.

12)

$$a_n = \frac{(3n+2)(n^2-n+1)}{(n+1)^2(5n+3)} = \frac{3n^3+2n^2-3n^2-2n+3n+2}{5n^3+10n^2+5n+3n^2+6n+3} =$$

$$= \frac{3n^3-n^2+n+2}{5n^3+13n^2+11n+3} = \frac{3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{5+\frac{13}{n}+\frac{11}{n^2}+\frac{3}{n^3}} \rightarrow \frac{3}{5}, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

$$13) a_n = \frac{n^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{n^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^{3n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \text{ mert } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{3n} = 0 \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3} = 0.$$

$$14) a_n = \frac{5n^2 - 3n - 1}{n^3 + 1} = \frac{\frac{5}{n} - \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^3}} \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

$$15) S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = ?$$

$$\text{Mivel } \underbrace{\frac{1}{\nu+1}}_1 + \underbrace{\frac{1}{\nu+2}}_2 + \dots + \underbrace{\frac{1}{2\nu}}_\nu > \frac{1}{2} \quad (\nu = 2, 3, \dots), \text{ így}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots +$$

$$+ \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) > 1 + \frac{k}{2},$$

ami $k \rightarrow \infty$ esetén divergens sorozatot határoz meg. Ebből következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty, \text{ azaz divergens.}$$

$$16) S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}, \text{ így } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

$$17) a_n = \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n} - \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} - 1} \rightarrow -1, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

18)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n+2} - \frac{n}{2} = \\ &= \frac{n^2+n-n^2-2n}{2(n+2)} = \frac{-n}{2(n+2)} = \frac{-1}{2\left(1+\frac{2}{n}\right)} \rightarrow -\frac{1}{2}, \text{ ha } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

19)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1+4+9+\dots+n^2}{n^3} = \frac{1}{6} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \\ &= \frac{1}{6} \frac{2n^3+3n^2+n}{n^3} \rightarrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \text{ ha } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

20)

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} = \\ &= \frac{\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} \left(\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1} \right) = \\ &= \frac{n^2-n+1-n^2+n-1}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \rightarrow \frac{2}{1+1} = 1, \text{ ha } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

21)

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} \rightarrow \frac{1}{2}, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

22)

$$\begin{aligned} a_n &= n \left(\sqrt{n^2-1} - n \right) = \frac{n \left(\sqrt{n^2-1} - n \right) \left(\sqrt{n^2-1} + n \right)}{\sqrt{n^2-1} + n} = \\ &= \frac{n(n^2-1-n^2)}{\sqrt{n^2-1} + n} = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} + 1} \rightarrow -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}, \text{ ha } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

23) $a_n = nq^n$, ha $|q| < 1$

Legyen $q = \frac{1}{1+p}$ ($p > 0$), ekkor $nq^n = \frac{n}{(1+p)^n}$.

Mivel $(1+p)^n > 1 + np + \binom{n}{2}p^2$, így

$$\frac{n}{(1+p)^n} < \frac{n}{1 + np + \frac{n(n-1)}{2}p^2} = \frac{1}{\frac{1}{n} + p + \frac{n-1}{2}p^2} \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty,$$

tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1+p)^n} = 0$; ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

24) $a_n = \sqrt[n]{n} = 1 + q_n$, ahol q_n pozitív tagú sorozat

$$n = (1 + q_n)^n > 1 + nq_n + \binom{n}{2}q_n^2 = \frac{n^2 - n}{2}q_n^2$$

ezért

$$q_n^2 < \frac{2n}{n^2 - n} = \frac{2}{n - 1} \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty,$$

tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n^2 = 0$, így $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

25) Konvergencia-e az $a_n = \sqrt[n]{a}$ sorozat, ha $a > 0$?

a) Ha $a > 1$, akkor $\sqrt[n]{a} = 1 + p_n$, ahol $p_n > 0$. Ekkor

$$a = (1 + p_n)^n \geq 1 + np_n$$

így

$$\frac{a - 1}{n} \geq p_n, \text{ vagyis } p_n \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

b) Ha $0 < a < 1$, akkor $p > 1$ -re $a = \frac{1}{p}$. Tehát

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\sqrt[n]{p}} \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

26) $a_n = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} = \frac{n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{\infty}{e} = \infty$, tehát a_n divergens.

27)

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right) \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^n \rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^n \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

28) A következő két sorozatnál határozzuk meg azt a küszöbindexet, amelytől kezdve a sorozat minden elemének a sorozat határértékétől való eltérése kisebb, mint 10^{-4} .

a) $a_n = \{0,5; 0,55; 0,555; 0,5555; \dots\}$

A sorozat korlátos (felső korlát lehet például 0,56 vagy 0,556) és növekvő, tehát konvergens. Mivel

$$0,5555 < \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 0,5556;$$

így az a_n -től való eltérés kisebb, mint $0,0001 = 10^{-4}$. Tehát $N = 4$.

b) $a_n = \left\{ \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}, \frac{9}{5}, \dots \right\}$

A sorozat n -edik tagja: $2 + (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}$. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, így

$$|2 - a_n| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{10000}$$

azaz $n \leq 9999$. Tehát $N = 10000$.

29) $a_n = \frac{c^n}{n!}$, ahol c tetszőleges valós szám.

Állítás: A sorozat konvergens, és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Bizonyítás:

$c = 0$ esetén. az állítás nyilvánvaló.

$c < 0$ esetén. $\left| \frac{c^n}{n!} \right| = \frac{|c|^n}{n!} = \frac{|c|^n}{n!} \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$, abban az esetben, ha $c > 0$ -ra bizonyított az állítás.

$c > 0$ esetén. tegyük fel, hogy c az m és az $m + 1$ egész számok között van:

$m < c < m + 1$. Ekkor

$$0 < \frac{c^n}{n!} = \frac{c^m}{m!} \cdot \underbrace{\frac{c}{m+1} \dots \frac{c}{n}}_{\frac{c}{n} \text{ egynél kisebb számokkal szorozva } < \frac{c}{n}} < \frac{c^m}{m!} \cdot \frac{c}{n} \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

30) A konvergencia definíciója alapján bizonyítsuk be, hogy az alábbi sorozatok valóban konvergálnak A -hoz; azaz minden $\varepsilon > 0$ -hoz adjunk meg egy N küszöbszámot!

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & a_n = \frac{2n+5}{n-3} \\ \text{b)} & b_n = \frac{2^n}{5 \cdot 2^n - 1} \\ \text{c)} & c_n = \lg \frac{n+2}{n+3} \\ \text{d)} & d_n = \sqrt{\frac{n+1}{\frac{n}{2}}} \end{array}$$

Megoldások:

$$\text{a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

$$\left| \frac{2n+5}{n-3} - 2 \right| < \varepsilon \quad \text{mikortól teljesül?}$$

$$\left| \frac{2n+5-2n+6}{n-3} \right| = \frac{11}{n-3} < \varepsilon$$

$$\underbrace{\frac{11}{\varepsilon} + 3}_N < n$$

Tehát pl. $\varepsilon = 10^{-6}$ esetén $N = \frac{11}{10^{-6}} + 3 = 11\,000\,003$, azaz a 11 000 004. tagtól kezdve a sorozat tagjai benne vannak a 2 határérték $\varepsilon = 10^{-6}$ sugarú környezetében.

$$\text{b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{5}$$

$$\left| \frac{2^n}{5 \cdot 2^n - 1} - \frac{1}{5} \right| = \left| \frac{\frac{1}{5}}{5 \cdot 2^n - 1} \right| = \frac{1}{5(5 \cdot 2^n - 1)} < \varepsilon \quad \text{mikortól teljesül?}$$

$$\frac{1}{25\varepsilon} + 1 < 2^n \implies \underbrace{\log_2 \left(\frac{1}{25\varepsilon} + \frac{1}{5} \right)}_N < n$$

$$\text{c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$

$$\left| \lg \frac{n+2}{n+3} \right| < \varepsilon \quad \text{mikortól teljesül?}$$

$\frac{n+2}{n+3} < 1$ miatt a logaritmus negatív, ezért

$$\begin{aligned} \lg \frac{n+2}{n+3} > -\varepsilon &\implies \frac{n+2}{n+3} > \frac{1}{10^\varepsilon} \implies 1 - \frac{1}{n+3} > \frac{1}{10^\varepsilon} \implies \\ \implies 1 - \frac{1}{10^\varepsilon} > \frac{1}{n+3} &\implies \underbrace{\frac{10^\varepsilon}{10^\varepsilon - 1}}_N < n \end{aligned}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \sqrt{2}$$

$$\left| \lg \frac{n+2}{n+3} \right| < \varepsilon \quad \text{mikortól teljesül?}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2(n+1)}{n}} - \sqrt{2} &\implies \sqrt{\frac{n+1}{n}} < \frac{\varepsilon + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \implies \\ \implies 1 + \frac{1}{n} &< \frac{\varepsilon^2 + 2\sqrt{2}\varepsilon + 2}{2} \implies n > \underbrace{\frac{2}{\varepsilon^2 + 2\sqrt{2}\varepsilon}}_N \end{aligned}$$

- 31) Konvergens-e az az a_n sorozat, amelyre minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik N küszöbszám, hogy $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$ teljesül bármely $n > N$ esetén?

Megoldás: Nem, ellenpélda lehet a harmonikus sor: $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Ugyanis, ekkor $|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ fennáll, ha $\frac{1}{\varepsilon} < n$, de a sorozat divergens.

- 32) Vizsgáljuk konvergencia szempontjából a következő sorozatokat:

$$a) \quad a_n = \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}} \qquad b) \quad b_n = \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \right)^n$$

Megoldások:

- a) $-1 \leq \sin n\frac{\pi}{2} \leq 1$, így a rendőr-elv miatt a sorozat 0-hoz tart.
 b) $\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \right)^n \geq 1 + n\frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \sqrt{n}$ a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt, így a sorozat divergens.

- 33) Vizsgáljuk monotonitás és korlátosság szempontjából a következő sorozatokat:

$$\begin{aligned} a) \quad a_n &= \frac{2n^2 + 1}{n^2 - n + 1} & b) \quad b_n &= \frac{10n}{\sqrt{n^2 - 1}} & c) \quad c_n &= \frac{n!}{n^5} \\ d) \quad d_n &= \frac{(-3)^n}{4\sqrt[4]{n} + 2} & e) \quad e_n &= \frac{\binom{n}{4}}{\binom{n}{5}} \end{aligned}$$

Megoldások:

a) **Monotonitás:** $a_{n+1} - a_n \leq 0$ alapján:

$$\begin{aligned} & \frac{2(n+1)^2 + 1}{(n+1)^2 - (n+1) + 1} - \frac{2n^2 + 1}{n^2 - n + 1} = \frac{2n^2 + 4n + 3}{n^2 + n + 1} - \frac{2n^2 + 1}{n^2 - n + 1} = \\ & = \frac{(2n^2 + 4n + 3)(n^2 - n + 1) - (2n^2 + 1)(n^2 + n + 1)}{(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)} = \frac{-2n^2 + 2n + 2}{n^4 + n^2 + 1}, \end{aligned}$$

aminek a számlálója n növekedtével negatív, nevezője pozitív, így a tört negatív. Tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

Korlátosság: A sorozat korlátos, mert konvergens (korlátok lehetnek például 3,5 és 2).

b) **Monotonitás:** $b_{n+1} - b_n \leq 0$ alapján:

$$\frac{10(n+1)}{\sqrt{(n+1)^2 - 1}} - \frac{10n}{\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{10(n+1)\sqrt{n^2 - 1} - 10n\sqrt{n^2 + 2n}}{\sqrt{n^2 + 2n} \cdot \sqrt{n^2 - 1}}$$

aminek a nevezője mindig pozitív, tehát a számláló dönti el az előjelet:

$$\sqrt{(n^2 + 2n + 1)(n^2 - 1)} - \sqrt{n^4 + 2n^3} = \sqrt{n^4 + 2n^3 - 2n - 1} - \sqrt{n^4 + 2n^3}$$

n növekedtével negatív, így a tört negatív. Tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

Korlátosság: A sorozat korlátos, mert konvergens (korlátok lehetnek például 12 és 10).

c) **Monotonitás:** $c_{n+1} - c_n \leq 0$ alapján:

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^5} - \frac{n!}{n^5} = \frac{n^5(n+1)! - (n+1)^5 n!}{[(n+1)n]^5} = \frac{(n+1)!(n^5 - (n+1)^4)}{(n^2 + n)^5}.$$

A számláló és a nevező is pozitív, így a sorozat szigorúan monoton növekvő.

Korlátosság: A sorozat nem korlátos, ugyanis

$$\begin{aligned} \frac{n!}{n^5} &= \frac{(n-1)!}{n^4} > \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n^4} = \\ &= \frac{n^5 - 15n^4 + 85n^3 - 225n^2 + 274n - 120}{n^4} > \frac{n^5 - 15n^4}{n^4} = n - 15, \end{aligned}$$

tehát felső korlát nincs. Alsó korlát lehet például 1.

d) **Monotonitás:** A sorozat tagjai felváltva negatívak illetve pozitívak, ezért az $d_{n+1} - d_n$ különbség hol negatív, hol pozitív. Tehát a sorozat

nem monoton.

Korlátosság: A sorozat nem korlátos, ugyanis

$$\left| \frac{3^n(-1)^n}{4\sqrt[4]{n}+2} \right| = \frac{3^n}{4\sqrt[4]{n}+2} > \frac{3^n}{5\sqrt[4]{n}} > \frac{3^n}{5n} \rightarrow \infty, \text{ ha } n \rightarrow \infty,$$

hiszen $0 < q < 1$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$.

e) **Monotonitás:**

$$\frac{\binom{n}{4}}{\binom{n}{5}} = \frac{n!}{4!(n-4)!} \cdot \frac{5!(n-5)!}{n!} = \frac{5}{n-4}$$

miatt a sorozat $n > 5$ -re szigorúan monoton csökken.

Korlátosság: A sorozat korlátos, mert konvergens (korlátok lehetnek például 5 és -3).

34) Mi a következő sorozatok határértéke?

a) $a_n = \frac{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}$

b) $b_n = \frac{n}{3^n}$

c) $c_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}$

d) $d_n = \sqrt[n]{5n^2 - 30n + 21} \quad (n \geq 2)$

e) $e_n = \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^n$

f) $f_n = \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n$

g) $g_n = \left(\frac{2^n+3}{2^n+1}\right)^n$

Megoldások:

a) $\frac{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{1}{n^3}}}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \rightarrow 1, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n} < \frac{n}{3^n} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, így a rendőr-elv miatt a sorozat $n \rightarrow \infty$ esetén 0-hoz tart.

c) $\sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{n}$, így a rendőr-elv miatt a sorozat $n \rightarrow \infty$ esetén 1-hez tart.

d) $\sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{5n^2 - 30n + 21} < \sqrt[n]{5n^2} = \sqrt[n]{5} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{n}$, így a rendőr-elv miatt a sorozat $n \rightarrow \infty$ esetén 1-hez tart.

e)

$$\begin{aligned} \left(\frac{3n+2-3}{3n+2}\right)^{2n} &= \left(1 - \frac{1}{3n+2}\right)^{2n} = \left\{ \left[\left(1 - \frac{1}{3n+2}\right)^{\frac{3n+2}{3}} \right]^{\frac{3}{3n+2}} \right\}^{2n} = \\ &= \left[\left(1 - \frac{1}{3n+2}\right)^{\frac{3n+2}{3}} \right]^{\frac{6}{3+\frac{2}{n}}} \rightarrow e^{-2}, \text{ ha } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

$$\text{f) } 2^n \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n = 2^n \left[\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n} \right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty \cdot e^{-\frac{1}{2}}, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \left(1 + \frac{2}{2^n+1}\right)^n &= \left\{ \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2^n+1}{2}}\right)^{\frac{2^n+1}{2}} \right]^{\frac{2}{2^n+1}} \right\}^n \rightarrow e^{\frac{2n}{2^n+1}} \rightarrow e^0 = 1, \\ &\text{ha } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Feladatok

1) Tanulmányozzuk az ε -os konvergencia kritérium alapján a következő általános tagú sorozatok konvergenciáját. Ha konvergens a sorozat, akkor határozzuk meg a határértéküket és a küszöbszámot.

$$\text{a) } a_n = \frac{1}{n}, \quad \text{b) } b_n = n^2 \quad \text{c) } c_n = 0,99 \dots 9, \text{ (} n \text{ db 9-es)}$$

$$\text{d) } d_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad \text{e) } e_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} \quad \text{f) } f_n = \frac{2n-1}{n}$$

$$\text{g) } g_n = \frac{3n-1}{2n+1} \quad \text{h) } h_n = \frac{2n^2-3n+3}{5n} \quad \text{i) } i_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

2) A Cauchy-féle konvergenciakritérium segítségével igazoljuk, hogy az

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

általános tagú sorozat divergens.

3) Hasonlítsuk az előbbi feladatban szereplő $(s_n)_{n>0}$ sorozatot egy divergens sorozathoz úgy, hogy abból következtethessünk az $(s_n)_{n>0}$ sorozat divergenciájára.

4) Vizsgáljuk meg, hogy a következő általános tagú sorozatok konvergensek-e. Ha konvergensek akkor számítsuk ki a határértéküket.

$$a) a_n = \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n} - n}, \quad b) b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2-1} - n}, \quad c) c_n = n(\sqrt{n^2-1} - n),$$

$$d) d_n = \sqrt[3]{n^6+1} - n^2, \quad e) e_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad f) f_n = \frac{\sqrt[3]{2n+1}}{\sqrt[3]{3n+1} - \sqrt[3]{2n}}.$$

5) Számoljuk ki a következő határértékeket:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{3n^2 - 1}, \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n - 5}{7n + 3}, \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4n - 1},$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}, \quad e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 1}{n^2 + n + 1}, \quad f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^5 + 1}{5n^3 + n^2 - n}.$$

6) Számoljuk ki az $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}$ határértéket $k = 0, 1, 2, 3, 4$ esetén.

7) Igazoljuk, hogy az $s_n = 1 + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{n^k}$ sorozat konvergens minden $k > 1$ természetes szám esetén.

8) Számoljuk ki az $a_n = nq^n$ sorozat határértékét, ha $|q| < 1$.

9) Számoljuk ki a következő általános tagú sorozatok határértékeit:

$$a) a_n = \frac{\sqrt{n} + 1}{3\sqrt{n} + 2}, \quad b) b_n = \frac{\sqrt[3]{2n} + \sqrt{3n} + 1}{\sqrt[3]{n} + \sqrt{5n} + 1},$$

$$c) c_n = \frac{\sqrt[3]{n} - 1}{\sqrt[5]{n} + 1}, \quad d) d_n = \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2}}{\sqrt{n^2 + 5}}.$$

10) Számoljuk ki a következő határértékeket:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{5 \cdot 2^n - 1}, \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n},$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n + 4^n}{n3^n}, \quad d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5^n}{n5^n - n^2 4^n}.$$

11) A fógó tételt alkalmazva számoljuk ki a következő általános tagú sorozatok határértékeit:

$$a) a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}};$$

$$b) b_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n};$$

$$c) c_n = \frac{n^2}{n^3+1} + \frac{n^2}{n^3+2} + \dots + \frac{n^2}{n^3+n};$$

$$d) d_n = \sqrt[n]{n};$$

$$e) e_n = \frac{n}{2^n};$$

$$f) f_n = \frac{\cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n}{n^2};$$

$$g) g_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}.$$

12) Igazoljuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2$.

13) Számítsuk ki az $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin n$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cos n$ határértékeket.

14) Számítsuk ki a következő határértékeket:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 3n + 1}{n^2 + n + 1} \right)^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + \sqrt{n}}{n + 3\sqrt{n} + 2} \right)^{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}))^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{1}{n} \right)^n$$

15) Igazoljuk a következő állításokat, ha $(x_n)_{n>0}$ egy nullához tartó sorozat ($x_n > -1$ minden n esetén) és $a > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow 0} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \ln a, \quad \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x_n)}{x_n} = 1.$$

16) Számoljuk ki a következő határértékeket:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lg \frac{n+2}{n+3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{2^n + 3^n}{4^n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^3+n-1}{n^2-2}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\ln n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\ln n^2}.$$