

Halmazelmélet

1. Írjuk fel az $\{a, b, c\}$ halmaz összes részhalmazát. Hány részhalmaz van? És ha a halmaz elemeinek száma n ?

2. Legyen A a budapest egyetemi hallgatók, B a budapesti egyetemista fiúk, C a budapesti egyetemista lányok halmaza. Állapítsuk meg, igazak-e a következő állítások:

a) $B \subset A$ b) $B \cup C = A$

3. Az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik nem (A és B tetszőleges halmazok):

a) $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ b) $(A \cap B) \subset A$

c) $(A \cap B) \subset (A - B)$ d) $(A - B) \subset (A \cup B)$

e) $\overline{(A \cup B)} \not\subset \bar{A}$ f) $(A - B) \not\subset B$

4. Mutassuk meg, hogy tetszőleges X és Y halmazok esetén:

$$(X \cap Y) \subset [X - (X - Y)] \quad \text{és} \quad [X - (X - Y)] \subset (X \cap Y).$$

5. Legyenek A , B és C a H alaphalmaz tetszőleges részhalmazai. Írjuk fel a halmazokra értelmezett műveletek segítségével a H azon elemeinek halmazát, amelyek

- a) csak a B halmaznak elemei,
- b) pontosan két halmaznak elemei,
- c) nem elemei mindhárom halmaznak,
- d) legfeljebb egy halmaznak elemei,
- e) legalább egy halmaznak elemei,
- f) legalább két halmaznak elemei.

6. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$ b) $(A \cup B) \cap (B \cup \bar{B})$ c) $(A \cup B) \cap \overline{(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})}$

7. Állapítsuk meg, hogy a következő összefüggések közül, amelyekben A , B és C tetszőleges halmazok, melyek igazak és melyek nem. (Célszerű a vizsgálatokat Venn-diagramokkal kezdeni, majd azokat, amelyek igaznak

bizonyulnak, valamilyen módon be is bizonyítani.)

- a) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$
- b) $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (B \cup C)$
- c) $[A - (A - \bar{B})] \cup B = A \cup B$
- d) $(A \cup B) - A = B$
- e) $\overline{(A \cup B)} - \bar{C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C$

8. Igazoljuk, hogy ha $A - B = B - A$, akkor $A = B$.

9. Igazoljuk, hogy minden A , B és C halmaz esetén érvényesek a következő egyenlőségek (azonosságok):

- a) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$
- b) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$
- c) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- d) $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$

10. Bizonyítsuk be, hogy ha A és C diszjunktak, akkor az

$$A - B, \quad A - \bar{B}, \quad (B - A) - C, \quad B - \bar{C}, \quad \text{és} \quad C - B$$

halmazok is páronként diszjunktak.

11. Legyenek A_1, A_2, A_3 és A_4 páronként diszjunktak és egyesítésük legyen a H halmaz. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $B \subset H$ halmazra

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup (A_4 \cap B)$$

és a jobb oldal tagjai páronként diszjunktak.

A következő feladatokban \mathbb{N} a természetes számok, azaz a nemnegatív egészek halmazát, \mathbb{Z} az egész számok halmazát, \mathbb{Q} a racionális számok, \mathbb{R} pedig a valós számok halmazát jelenti.

12. Legyen $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ páros}\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 4\}$, $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 2\}$.

Állapítsuk meg, mik lesznek az

$$X = [A - (B \cap C)] \cup [(A - B) - C]$$

halmaz elemei.

13. Tekintsük a következő halmazokat:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0, x \leq 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ 2-vel osztható egész szám}\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 6k + 1, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

Állapítsuk meg, A , B és C közül melyik részhalmaza a természetes számok halmazának.

14. Legyen $X = \{1,2\}$, $Y = \{1,2,3\}$. Írjuk fel az

$$(X \times Y) \cap (Y \times X) \quad \text{és az} \quad (X \times Y) - (Y \times X)$$

halmazok elemeit.

15. Legyen

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = cx + d\}$$

Mit mondhatunk az a , b , c , d paramétereikről, ha tudjuk, hogy

a) $A - B = A$

b) $A - B = \emptyset$

c) $A \cap B = \{(0,0)\}$

d) $\{(1,0), (0,1)\} \subset A \cap B$

16. Ábrázoljuk a

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$$

halmazokat a koordinátasíkon.

17. Írjuk fel a koordinátasík negatív abszcisszájú pontjainak halmazát a valós számok és a nemnegatív valós számok halmazával segítségével.

Teljes indukció

Természetes számokkal kapcsolatos állításokat gyakran igazolhatunk a *teljes indukció* módszerével. Ez lényegében két részből áll:

I. Keresünk olyan természetes számot, amelyre az állítás teljesül.

II. Feltételezzük, hogy n -re igaz az állítás, majd bebizonyítjuk, hogy ebből $(n+1)$ -re is következik (öröklődik) az állítás érvényessége.

A következő feladatokban n mindig természetes számot jelent. A megoldást keresve, némelyeknél gondolhatunk a teljes indukció módszerére is.

18. Legyen az A_1 halmaz elemeinek száma k_1 , az A_2 elemeinek száma k_2, \dots , az A_n elemeinek száma k_n . Igazoljuk, hogy $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ elemeinek száma $k_1 k_2 \dots k_n$.

19. Mutassuk meg, hogy tetszőleges A_1, A_2, \dots, A_n halmazok esetén

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$$

és

$$\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$$

A teljes indukció módszerét természetesen nem csak halmazokkal kapcsolatos feladatokra alkalmazhatjuk.

Igazoljuk teljes indukcióval a következő állításokat is:

20. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

21. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

22. $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$

23. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$

24. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

25. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$

Keressünk képletet a következő összegek kiszámítására, majd igazoljuk ezeket teljes indukcióval:

26. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1)$

27. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

28. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$$29. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$30. 1!1 + 2!2 + \cdots + n!n = (n+1)! - 1$$

A következő feladatokban szereplő egyenlőtlenségek is igazolhatók teljes indukcióval:

$$31. \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 1, \quad \text{ha } n \geq 2$$

$$32. \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \quad \text{ha } n \geq 2$$

$$33. \frac{(2n)!}{(n!)^2} < 4^{n-1}, \quad \text{ha } n \geq 5$$

$$34. \frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}, \quad \text{ha } n \geq 2$$