1. Birkhoff–Hincsin Tétel Bizonyítása (Katznelson–Weiss, 1982)

$(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ endomorfizmus ergodikus (**!**)

1.1. állítás: *$\forall f \in L_1$-re μ-majdnem minden x-re*

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x) \overset{n\to\infty}{\to} \int f\,\mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás: Elegendő $f \geq 0$-ra.
Legyen

$$f^{+(-)}(x) = \limsup\,(\liminf)\,\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x)$$

1. $$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j T x) = \frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(T^i x) - \frac{f(x)}{n+1}\right)$$

   miatt $f^+(Tx) = f^+(x)$, $f^-(Tx) = f^-(x)$ μ-majdnem mindenütt. Így ergodicitás miatt μ-majdnem mindenütt $f^+, f^- = \text{const}$.

2. Elegendő belátni: $f^+ \leq \int f\,\mathrm{d}\mu \leq f^-$, mivel akkor a triviális $f^- \leq f^+$ miatt $f^- = f^+$ μ-majdnem mindenütt.

1. lépés: Legyen $\varepsilon > 0$ fix, és $n\colon M \to \mathbb{Z}_+$

$$n(x) := \inf\left\{ n \geq 1 \;\middle|\; f^+ \leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x) + \varepsilon \right\}.$$

Nyilván

$$n(x) f^+ \leq \sum_{j=0}^{n(x)-1} f(T^j x) + \varepsilon n(x). \tag{1.1}$$

2. lépés: $n(x)$ helyett korlátos függvényt veszünk. Legyen $N > 0$ fix, $A = \{x \in M \mid n(x) > N\}$. Legyen N olyan nagy, hogy

$$\mu(A) < \frac{\varepsilon}{f^+}. \tag{1.2}$$

Új függvények:

$$\hat{n}(x) = \begin{cases} n(x) \\ 1 \end{cases} \qquad \text{és} \quad \hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \notin A \\ \max\{f(x), \hat{f}(x)\} & x \in A. \end{cases}$$

Defininíció szerint: $\hat{n}(x) \le N$.

(1.1)-ből

$$\hat{n}(x) f_1^+ \le \sum_{j=0}^{\hat{n}(x)-1} \hat{f}(T^j x) + \varepsilon \hat{n}(x).$$

A definíciókból és (1.2)-ből

$$\int \hat{f}\, \mathrm{d}\mu \le \int f\, \mathrm{d}\mu + f^+ \mu(A) \le \int f\, \mathrm{d}\mu + \varepsilon. \tag{1.3}$$

3. lépés: Legyen L nagy, hogy

$$\frac{N f^+}{L} < \varepsilon.$$

Definiáljuk rekurzíve $n_k(x)\colon M \to \mathbb{Z}_+$-t: $(k \ge 0)$

$$\begin{aligned} &n_0(x) = 0 \\ &n_1(x) = n_0(x) + \hat{n}(T^{n_0(x)} x) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &n_k(x) = n_{k-1}(x) + \hat{n}(T^{n_{k-1}(x)} x). \end{aligned}$$

Továbbá

$$k(x) = \sup\{k \in \mathbb{Z}_+ \mid n_k(x) \le L - 1\}.$$

Nyilván

$$\hat{n}(x) \le N \left[\begin{array}{ll} \rightsquigarrow n_k - n_{k-1} \le N & \quad (\forall k \ge 1), \\ \rightsquigarrow L - n_{k(x)} \le N. & \end{array} \right.$$

Tehát

$$L f^+(x) = \sum_{k=1}^{k(x)} f^+(x)(n_k(x) - n_{k-1}(x)) + f^+(x)(L - n_{k(x)}(x)) \le$$

ami (1.3) miatt

$$\begin{aligned} &\le \sum_{k=1}^{k(x)} \left[\sum_{j=n_{k-1}(x)}^{n_k(x)-1} \hat{f}(T^j x) + \varepsilon \hat{n}(T^{n_{k-1}(x)} x) \right] + f^+ N \le \\ &\le \sum_{j=0}^{L-1} \hat{f}(T^j x) + \varepsilon L + f^+ N. \end{aligned} \tag{1.4}$$

4. lépés: (1.4)-et integrálva μ szerint

$$Lf^+(x) \le L \int \hat{f}\,\mathrm{d}\mu + L\varepsilon + f^+ N$$

azaz

$$\begin{aligned} f^+ &\le \int \hat{f}\,\mathrm{d}\mu + \varepsilon + f^+ \frac{N}{L} \le \\ &\le \int_{\overline{A}} f\,\mathrm{d}\mu + \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_A f^+\,\mathrm{d}\mu + \varepsilon + f^+ \frac{N}{L} \le \\ &\le \int f \mathrm{d}\mu + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon. \end{aligned}$$

Tehát

$$f^+ \le \int f\,\mathrm{d}\mu.$$

Hasonlóan

$$f^- \ge \int f\,\mathrm{d}\mu.$$

□

5. lépés: Annak igazolása, hogy $f_- \ge \int f\,\mathrm{d}\mu$ (vázlatosan)

$$\frac{1}{n} \sum_0^{n-1} f(T^i x) \le f^-(x) + \varepsilon \tag{A}$$

$$\sum_0^{n(x)-1} f(T^i x) \le \sum_0^{n(x)-1} f^-(T^i x) + n(x) \cdot \varepsilon. \tag{B}$$

Legyen

$$A = (n(x) > N), \quad \int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon, \text{ és } x \in A\text{-ra } \tilde{f}(x) = 0,\ \tilde{n}(x) = 1$$

$$\text{míg } x \notin A\text{-ra } \tilde{f}(x) = f(x),\ \tilde{n}(x) = n(x) \tag{C}$$

$$\sum_0^{n(x)-1} \tilde{f}(T^i x) \le \sum_0^{n(x)-1} f^-(T^i x) + n(x) \cdot \varepsilon \tag{D}$$

$$\int \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu \ge \int_A f\,\mathrm{d}\mu \ge \int f\,\mathrm{d}\mu - \varepsilon \tag{E}$$

$$\sum_0^{L-1} f^-(T^i x) = \sum_{k=1}^{k(x)} \sum_{j=n_{k-1}(x)}^{n_k(x)-1} f^-(T^j x) + \sum_{j=n_k(x)}^{L} f^-(T^j x)$$

$$\sum_0^{L-1} f^-(T^i x) \ge \sum_0^{L-1} \tilde{f}(T^i x) - L \cdot \varepsilon$$

$$
\begin{aligned}
\int f^- \, \mathrm{d}\mu &\geq \int f \, \mathrm{d}\mu - 2\varepsilon \\
\int f^- \, \mathrm{d}\mu &\geq \int f \, \mathrm{d}\mu. && \text{(F)}
\end{aligned}
$$

2. Szubadditív Ergod-Tétel (Kingman, 1963) à la Katznelson–Weiss, 1982

2.1 szubadditivitási lemma: (Fekete Mihály, 1923). *Legyen* $a\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ *és tegyük fel, hogy* $\forall n, m \in \mathbb{Z}_+$*-ra*

$$a_{n+m} \le a_n + a_m.$$

Akkor

$$\lim \frac{a_n}{n} \exists \textit{ és } = \inf\left\{\frac{a_n}{n}\right\}.$$

Bizonyítás:
Feltehető, hogy $\alpha = \inf\left\{\frac{a_n}{n}\right\} > -\infty$.
Akkor $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ m \frac{a_m}{m} < \alpha + \varepsilon$.
Legyen $n = l \cdot m + r$.

$$\begin{aligned}
a_n &\le l a_m + a_r\\
\frac{a_n}{n} &\le \frac{lm}{lm+r} + \frac{a_m}{m} + \frac{a_r}{n}\\
\limsup_n \frac{a_n}{n} &\le \alpha + \varepsilon\\
\rightsquigarrow \limsup \frac{a_n}{n} &\le \alpha = \inf \frac{a_n}{n}.
\end{aligned}$$ $\square$

2.2. szubadditív ergod-tétel: $(M, \mathcal{F}, T, \mu)$ *ergodikus endomorfizmus. Tegyük fel, hogy* $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots \in L_1$ *szubadditív, azaz* $\forall n, k \ge 1$

$$F_{n+k}(x) \le F_k(x) + F_n(T^k x) \qquad \mu\textit{-majdnem mindenütt.} \tag{2.1}$$

Akkor

- $\exists \lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$*, hogy*

$$\lim_n \frac{1}{n} F_n(x) = \lambda \qquad \mu\textit{-majdnem mindenütt}$$

- $\lambda = \inf\left\{\frac{1}{n}\int F_n \,\mathrm{d}\mu \;\middle|\; n \ge 1\right\}.$

Bizonyítás: (2.1)-ből

$$\int F_{n+k}\,\mathrm{d}\mu \leq \int F_k\,\mathrm{d}\mu + \int F_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Így 2.1 lemma miatt

$$\lambda = \inf\left\{\frac{1}{n}\int F_n\,\mathrm{d}\mu \;\middle|\; n \geq 1\right\} = \lim \frac{1}{n}\int F_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Belátjuk, hogy ezzel igaz az állítás.

Jelölés:

$$F^+ = \limsup \frac{1}{n}F_n(x)$$
$$F^- = \liminf \frac{1}{n}F_n(x).$$

1. lépés:

$$\frac{1}{n}F_n(x) \leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} F_1(T^j x) \tag{2.2}$$

Birkhoff–Hincsin ergodtétele miatt

$$F^+(x) \leq \int F_1\,\mathrm{d}\mu \qquad \mu\text{-majdnem mindenütt.}$$

Viszont integrálva (2.2)-t

$$\lambda \leq \frac{1}{n}\int F_n\,\mathrm{d}\mu \leq \int F_1\,\mathrm{d}\mu.$$

2. lépés: Legyen $N > 1$ fix és n fix, de majd $\to \infty$. $\forall 1 \leq i \leq N$-re nézzük az i, $i+N$, $i+2N, \ldots, i+m_iN \leq n-N$ $(< i+(M_i+1)N)$ számtani sorozatokat. (2.1)-ből

$$F_n(x) \leq F_i(x) + \sum_{l=0}^{m_i} F_N(T^{i+lN}x) + F_{N-(i+m_iN)}(T^{i+m_iN}x).$$

Ezeket összegezve $1 \leq i \leq N$-re

$$NF_n(x) \leq \sum_{i=1}^{N-1} F_i(x) + \sum_{i=0}^{n-N} F_N(T^i x) + \sum_{i=1}^{N-1} F_i(T^{n-i}x)$$

azaz

$$\frac{1}{n}F_n(x) \leq \underbrace{\frac{1}{N}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-N} F_N(T^i x)\right]}_{\mathbf{I}} + \frac{1}{n}\left[\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1} F_i(x)}_{\mathbf{II}} + \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1} F_i(T^{n-i}x)}_{\mathbf{III}}\right]. \tag{2.3}$$

Birkhoff–Hincsin ergodtétele miatt $\mathbf{I} \to \frac{1}{N}\int F_N \,\mathrm{d}\mu$ μ-majdnem minden x-re.
Másrészt nyilvánvalóan μ-majdnem minden x-re $\mathbf{II} \to 0$ és $\mathbf{III} \to 0$.
Tehát $F^+(x) \leq \frac{1}{N}\int F_N \,\mathrm{d}\mu \quad \forall N \geq 1$-re.

Innen

$$F^+(x) \leq \lambda = \inf_N \frac{1}{N}\int F_N \,\mathrm{d}\mu. \tag{2.4}$$

3. lépés: (2.4) fényében elég belátni, hogy $\lambda \leq F^-(x)$.
Feltehető: $-\infty < \lambda$.
Legyen $\varepsilon > 0$ fix.
Definiáljuk:

- $n(x) = \min\left\{n \geq 1 \;\middle|\; \frac{1}{n}F_n(x) \leq F^-(x) + \varepsilon\right\}$ $\qquad$ (2.5)
- $A = \{x \in M \mid n(x) > N\}$

ahol $N \gg 1$, hogy

$$\int_A (|F_1(x)| + |F^-(x)|) \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Megjegyzés: F^+ és F^- invariáns függvények.
Ugyanis: $\frac{F_{n+1}(x)}{n+1} \leq \frac{F_1(x)}{n+1} + \frac{n}{n+1}\frac{F_n(Tx)}{n}$
Így

$$\limsup\,(\liminf)\,\frac{F_n(x)}{n} \leq \limsup\,(\liminf)\,\frac{F_n(Tx)}{n}$$

azaz

$$F^-(x) \leq F^-(Tx) \qquad\qquad F^+(x) \leq F^+(Tx)$$

de

$$\int F^-(x)\,\mathrm{d}\mu = \int F^-(Tx)\,\mathrm{d}\mu \quad \rightsquigarrow \quad F^-(x) = F^-(Tx),$$

és ugyanígy

$$F^+(x) = F^+(Tx).$$

Legyen

$$\tilde{F}^-(x) = \begin{cases} F^-(x) \\ F_1(x) \end{cases} \qquad \text{és} \qquad \tilde{n}(x) = \begin{cases} n(x) & x \notin A \\ 1 & x \in A. \end{cases}$$

Mármost a definíció szerint $F^-(x) \le \tilde{F}^-(x)$ (ugyanis $x \in A$-ra $n(x) > 1$, így $F_1(x) > F^- + \varepsilon$).
(2.6) miatt

$$\int \tilde{F}^- \, \mathrm{d}\mu \le F^- + \varepsilon. \tag{2.7}$$

4. lépés: (2.5)-ből és a definíciókból $x \notin A$-ra

$$\begin{aligned} F_{\tilde{n}(x)}(x) &\le \tilde{n}(x)F^- + \varepsilon\tilde{n}(A) \le \\ &\le \sum_{j=0}^{n(x)-1} F^-(T^j x) + \tilde{n}(x)\varepsilon \le \\ &\le \sum_{j=0}^{\tilde{n}(x)-1} \tilde{F}^-(T^j x) + \tilde{n}(x) \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Ugyanakkor $x \in A$-ra $F_1(x) = \tilde{F}_1(x) \le \tilde{F}_1^-(x) + \varepsilon$.
Ugyanúgy mint Birkhoff–Hincsin ergodtételének bizonyításában (1.4)-ben $L > N$-re

$$F_L(x) \le \sum_{j=0}^{L-1} \tilde{F}^-(T^j x) + \varepsilon L + NF^- + \sum_{j=L-N}^{L} |F_1(T^j x)|.$$

Integrálva és L-lel osztva

$$\lambda \le \int \frac{1}{L} F_L \, \mathrm{d}\mu \le \int \tilde{F}^- \, \mathrm{d}\mu + \varepsilon + \frac{NF^-}{L} + \frac{N}{L} \int |F_1| \, \mathrm{d}\mu.$$

Most $L \to \infty$ esetén (2.7) miatt

$$x \le \int F^- + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \quad \rightsquigarrow \quad \lambda \le F^-$$

Megjegyzés: Ha $\lambda > -\infty$, akkor L_1-konvergencia is igaz. Ugyanis: $\dfrac{1}{n}(f_n)_+$ is egyenletesen integrálható. $\square$

Fő lépések (Összefoglaló)

1. $F^+(x) \le \int F_1 \, \mathrm{d}\mu \qquad \mu$-majdnem minden x-re

$$\lambda \le \int F_1 \, \mathrm{d}\mu$$

2. $\limsup \frac{1}{n} F_n \leq \frac{1}{N} \int F_N \, \mathrm{d}\mu \qquad \forall N$-re μ-majdnem minden x-re

$F^+(x) \leq \lambda$

3. F^+ és F^- inv.

4. $n(x)$, $A = A(\varepsilon)$, $\tilde{F}^-$, $\tilde{n}$

- $F^- \leq \tilde{F}^-(x)$
- $\int \tilde{F}^- \, \mathrm{d}\mu \leq F^- + \varepsilon$
- $F_{\tilde{n}(x)}(x) \leq \sum_{j=0}^{\tilde{n}(x)-1} \tilde{F}^-(T^j x) + \tilde{n}(x) \cdot \varepsilon$

5. Mint Birkhoff–Hincsin ergodtételében

$$F_L(x) \leq \sum_{j=0}^{L-1} \tilde{F}^-(T^j x) + \varepsilon L + N F^- + \sum_{j=L-N}^{L} F_1(T^j x).$$

Tehát integrálva és L-lel osztva

$$\lambda \leq \frac{1}{L} \int F_L \, \mathrm{d}\mu \leq \int \tilde{F}^- \, \mathrm{d}\mu + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \leq F^- + 4\varepsilon$$

$$\lambda \leq F^-.$$

3. Oseledec Multiplikatív Ergodtétele (1968)

Objektum: kompakt Riemann sokaságok C^1-diffeomorfizmusai.

Jelölés: $F\colon M \circlearrowright M$ C^1-diffeomorfizmus.

$$D_x f\colon \text{ differenciál } T_x M \circlearrowright \text{lineáris op.}$$

$$D_x(f^n) = (D_{f^{n-1}x} f) \cdot (D_{f^{n-2}x} f) \cdots (D_{fx} f) \cdot (D_x f).$$

Fürstenberg–Kesten tétel (1960)

Ha μ ergodikus mérték, akkor $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|D_x f^n\| = \lambda \qquad \mu\text{-majdnem minden } x\text{-re.}$$

Értelmezés: $\exists$ belső szorzat az érintő nyaláb $\forall T_x M\colon x \in M$ fibrumán.

$\|D_x f^n\|$ a $D_x f^n\colon T_x M \circlearrowright$ lineáris leképezés normája az indukált norma szerint.

Nyilván ha más, ekvivalens Riemann-metrikát választunk, akkor $\log \|D_x f^n\|$ változása csak korlátos, így $\dfrac{1}{n} \log \|D_x f^n\|$ limesze ugyanaz.

Bizonyítás: Alkalmazzuk a szubadditív ergodtételt az $(M, \mathcal{B}, \mu)$-re $F_n(x) = \log \|D_{f^n x}\|$-szel $(n \geq 1)$.

Kompaktság $\rightsquigarrow$ $D_x f^n$ korlátos, $F_n \in L_1$.

$$\|D_x f^{n+k}\| = \|D_{f^n x} f^k D_x f^n\| \leq \|D_{f^n x} f^k\| \|D_x f^n\|.$$

Tehát μ-majdnem minden x-re $\exists \lambda = \lim \dfrac{1}{n} \| \log D_x f^n\|$. $\square$

Nyilván

$$\frac{1}{\|Df^{-1}\|^n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per. def.}}}{\leq} \frac{1}{\|D_{f^n x}(f^{-1})^n\|} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{láncszabály}}}{\leq} \|D_x f^n\|$$

ahol $\|Df^{-1}\| = \sup\{\|D_x f^{-1}\| \mid x \in M\}$ ezért $\forall n \geq 1$-re

$$-\log \|Df^{-1}\| \leq \frac{1}{n} F_n(x) = \frac{1}{n} \log \|D_x f^n\|$$

azaz $\lambda \geq -\log \|Df^{-1}\|$.

3.1. Oseledec tétele felületekre (1960)

$f\colon M \circlearrowleft C^1$-diffeomorfizmus, M kompakt felület, μ-ergodikus mérték.

3.1. állítás: *Vagy* $\exists \lambda_1 > \lambda_2$, *és* $\exists T_xM = E_x^1 \oplus E_x^2$ *mérhető felbontás, hogy* μ*-majdnem minden* x*-re*

$$\begin{aligned} &\forall v_1 \notin E_x^2\text{-re} \quad \lim \frac{1}{n} \log \|Df^n(v_1)\| = \lambda_1 \\ &\forall v_2 \in E_x^2\text{-re} \quad \lim \frac{1}{n} \log \|Df^n(v_2)\| = \lambda_2. \end{aligned}$$

Oseledec általánosan

$f\colon M \circlearrowleft M$ C_1-diffemorfizmus, M kompakt, μ-ergodikus mérték.

$$\exists\ \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k \qquad (k \le d)$$

$$\exists\ n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}_+ : n_1 + \cdots + n_k = d$$

$$\exists\ T_xM = E_x^1 \oplus \cdots \oplus E_x^k \quad \text{mérhető felbontás,}$$

hogy

$$\dim E_x^j = n_j \quad \text{és} \quad D_x f E_x^j = E_{fx}^j$$

legyen és μ-majdnem minden x-re

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|D_x f^n(v)\| = \lambda_l$$

hacsak $v \notin E_x^1 \oplus \cdots \oplus E_x^{l-1}$.

Megjegyzések:

1. $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ az f Lyapunov-exponensei
2. f^{-1} Lyapunov exponensei $-\lambda_k, \ldots, -\lambda_1$
3. Ha f-re a Riemann mérték invariáns és ergodikus, akkor $\sum n_j \lambda_j = 0$.

Bizonyítás: ($d = 2$)

1. lemma: *Ha* B *négyzetes mátrix, akkor* $\exists A \ge 0$, *hogy*

- $A^2 = B^*B$
- $\|Av\| = \|Bv\|$

(A a B polár felbontásában szereplő abszolút érték és általában az A sajátértékei a B mátrix szinguláris értékei).

Jelölés:

$$B_n = D_x f^n, \qquad n \geq 1$$
$$A_n = (B_n^* B_n)^{1/2}$$
$$A_n e_i^{(n)} = \mu_i^{(n)} e_i^{(n)} \qquad i = 1, 2, \quad (\|e_i^{(n)}\| = 1), \quad e_1^{(n)} \perp e_2^{(n)}.$$

Feltesszük: $\mu_1^{(n)} \geq \mu_2^{(n)}$.

1. lépés:

- 1. lemma és Fürstenberg–Kesten tétel miatt μ-majdnem minden x-re

$$\lambda_1 = \lim_n \frac{1}{n} \log \|B_n\| \exists \text{ és } = \lim_n \frac{1}{n} \log \|A_n\| = \lim_n \frac{1}{n} \log \mu_1^{(n)}$$

- f helyett f^{-1}-t véve μ-majdnem minden x-re

$$\exists \lim \frac{1}{n} \log \|D_x f^{-n}\| = -\lambda_2.$$

Első eset: $\lambda_1 > \lambda_2$

2. lépés: $T_x M = E_x^1 \oplus E_x^2$ konstrukciója:

$$E_i^{(n)} = \operatorname{span} e_i^{(n)}, \qquad i = 1, 2.$$

1. szublemma: $E_i^{(n)} : n \geq 1$ *Cauchy* $(i = 1, 2)$.

Megjegyzés: Ehhez elég belátni, hogy $\exists \delta > 0$, $c > 0$, hogy $\forall n \geq 1$-re

$$\left\| e_1^{(n)} - e_1^{(n+1)} \right\| \leq C e^{-n\delta} \qquad (\delta > 0). \tag{3.1}$$

Valóban, akkor

$$\left\| e_1^{(n)} - e_1^{(n+k)} \right\| \leq \frac{C e^{-n\delta}}{1 - e^{-\delta}}. \tag{3.2}$$

Bizonyítás:

$$1 = \left\| e_1^{(n+1)} \right\|^2 = \left\| \left(e_1^{(n)}, e_1^{(n+1)} \right) \right\|^2 + \left\| \left(e_2^{(n)}, e_1^{(n+1)} \right) \right\|^2.$$

Így

$$\left\| e_1^{(n)} - e_1^{(n+1)} \right\|^2 = 2 \left[1 - \left(e_1^{(n)}, e_1^{(n+1)} \right) \right] = 2(1 - \cos\varphi) \leq$$
$$\leq C |\sin\varphi|.$$

Ha $\sin\varphi = \left(e_2^{(n)}, e_1^{(n+1)}\right)$ kicsi.

Legyen $\varepsilon > 0$.

Már tudjuk, hogy ha n nagy, akkor

$$\left|\lambda_1 - \frac{1}{n}\log\mu_1^{(n)}\right| < \varepsilon.$$

Lényeg:

$$\left|\left(e_1^{(n+1)}, e_2^{(n)}\right)\right| = \left|\left(\frac{A_{n+1}e_1^{(n+1)}}{\mu_1^{(n+1)}}, e_2^{(n)}\right)\right| \leq \frac{\left|\left(e_1^{(n+1)}, A_{n+1}e_2^{(n)}\right)\right|}{e^{(n+1)(\lambda_1-\varepsilon)}}.$$

Viszont

$$\begin{aligned}\left|\left(e_1^{(n+1)}, A_{n+1}e_2^{(n)}\right)\right| &\leq \left\|A_{n+1}e_2^{(n)}\right\| = \left\|B_{n+1}e_2^{(n)}\right\| \leq \\ &\leq \|D_{f^n x}f\| \left\|B_n e_2^{(n)}\right\| = \|D_{f^n x}f\| \left\|A_n e_2^{(n)}\right\|.\end{aligned}$$

Jelölés: $D = \sup\{\|D_y f\| \mid y \in M\}$.

Ha $n \gg 1$, akkor

$$\left\|A_n e_2^{(n)}\right\| = \mu_2^{(n)} \leq e^{(\lambda_2+\varepsilon)n} \tag{3.3}$$

tehát

$$\left\|\left(e_1^{(n+1)}, e_2^{(n)}\right)\right\| \leq \frac{D}{e^{\lambda_1-\varepsilon}} e^{-n(\lambda_1-\lambda_2-2\varepsilon)}.$$

Innen (3.1) és az 1. szublemma következik. Tehát: $E_x^1 = \lim E_n^1$. □

3. lépés:

2. szublemma: *μ-majdnem minden x-re $\forall u \in E_1$-re*

$$\lim_n \frac{1}{n}\log\|B_n u\| = \lambda_1$$

Bizonyítás: Tegyük fel: $\|u\| = 1$.
Becsüljük:

- $\left|\|B_n u\| - \left\|B_n e_1^{(n)}\right\|\right| \leq \left\|B_n\left(u - e_1^{(n)}\right)\right\|$
- (3.2) $\rightsquigarrow$ $\left\|e_1^{(n)} - u\right\| \leq \dfrac{Ce^{-n\delta}}{1-e^{-\delta}}$ ha $n \gg 1$.
- $\|B_n\| \leq e^{\left(\lambda_1+\frac{\delta}{2}\right)n}$
- $\left\|B_n e_1^{(n)}\right\| = \left\|A_n e_1^{(n)}\right\| = \mu_1^{(n)}$

- Legyen $\varepsilon' < \frac{\delta}{2}$. Akkor $n \gg 1$-re

$$e^{(\lambda_1-\varepsilon')n} \leq \mu_1^{(n)} \leq e^{(\lambda_1+\varepsilon')n}$$

Summa summarum

$$e^{(\lambda_1-\varepsilon')n} - C \cdot \frac{e^{\left(\lambda_1-\frac{\delta}{2}\right)n}}{1-e^{-\delta}} \leq \|B_n u\| \leq e^{(\lambda_1+\varepsilon')n} + C \cdot \frac{e^{\left(\lambda_1-\frac{\delta}{n}\right)n}}{1-e^{-\delta}}$$

azaz

$$\begin{aligned} &\limsup \log \frac{1}{n} \|B_n u| \leq \lambda_1 + \varepsilon' \\ &\liminf \qquad\qquad \leq \lambda_1 - \varepsilon'. \end{aligned}$$

□

4. lépés: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ eset

$$u = \alpha_n e_1^{(n)} + \beta_n e_2^{(n)}$$

és $\|B_n u\|$ becslése adódik $\left\|B_n e_1^{(n)}\right\|$ és $\left\|B_n e_2^{(n)}\right\|$ becsléséből.

2. lemma:

$$\lim_n \frac{1}{n} \lim \mu_2^{(n)} \exists (= \lambda_2). \tag{3.4}$$

Bizonyítás: (Simon Károlytól származik) Legyen $\tilde{B}_n(x) = D_x f^{-n}$ és $\tilde{\mu}_1^{(n)}(x) \geq \tilde{\mu}_2^{(n)}(x)$ a $\tilde{B}_n(x)$ szinguláris értékei. Fürstenberg–Kesten tételéből $\rightsquigarrow$

$$\exists \lim_n \frac{1}{n} \log \tilde{\mu}_1^{(n)} = \tilde{\lambda}_1. \tag{3.5}$$

3.2. állítás: *μ-majdnem minden $x \in M$-re*

$$\lim \frac{1}{n} \log \mu_2^{(n)}(x) \exists = (-\tilde{\lambda}_1 = \lambda_2).$$

Birkhoff–Khintchine tételéből $\rightsquigarrow \exists$

$$\lambda^* = \lim_n \frac{1}{n} \log |\det B_n(x)| = \lim_n \frac{1}{n} \log |\mu_1^{(n)}(x) \mu_2^{(n)}(x)|$$

Tehát:

$$\lim_n \frac{1}{n} \mu_2^{(n)}(x) = \lambda^* - \lambda_1. \tag{3.6}$$

Mivel $\forall x \in M_1$, $\forall n \geq 0$-ra $B_n(x) = \tilde{B}_n^{-1}(f^n x)$ azért

$$\mu_2^{(n)}(x) = \frac{1}{\tilde{\mu}_1^{(n)}(f^n x)} \tag{3.7}$$

(3.5) és (3.6) és Egorov tételéből $\rightsquigarrow$ $\exists H \subset M$, $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\mu(H) > 1-\varepsilon$, továbbá $\forall n > N$-re $\forall x \in H$-ra

$$e^{n(\tilde{\lambda}_1-\varepsilon)} \le \tilde{\mu}_1^{(n)}(x) \le e^{n(\tilde{\lambda}_1+\varepsilon)} \tag{3.8}$$

$$e^{n(\lambda^*-\lambda_1-\varepsilon)} \le \mu_2^{(n)}(x) \le e^{n(\lambda^*-\lambda_1+\varepsilon)} \tag{3.9}$$

$\exists x \in H$ és $m > N$, hogy $f^m x \in H$ (Poincaré rekkurrencia). Akkor alkalmazva (3.8)-t $f^m x$-re, (3.7)-ből

$$e^{-n\tilde{\lambda}_1-n\varepsilon} \le \mu_2^{(n)}(x) \le e^{-n\tilde{\lambda}_1+n\varepsilon}.$$

Tehát:

$$\lambda^* - \lambda_1 = -\tilde{\lambda}_1 = \lambda_2 \qquad \square$$

Oseledec még általánosabban

$(M, \mathcal{F}, \mu, f)$ endomorfizmus.

$$A \colon M \to GL(n, \mathbb{R}) \text{ mérhető}$$

és

$$A_x^n = A(f^{n-1}x)\dots A(x) \quad \text{(mérhető kociklus)}$$

Feltevés:

$$\log^+ \|A(\cdot)\| \in L_1(M, \mu).$$

3.3. állítás: *$\exists \Gamma \subset M$, hogy $\mu(\Gamma) = 1$ és $\forall x \in \Gamma$-ra*

a.) $\lim_n \left[(A_x^n)^* A_x^n\right]^{1/2n} = \Lambda_x \ \exists$

b.) *Legyenek* $\exp \lambda_x^{(1)} < \cdots \exp \lambda_x^{(s)}$ Λ_x *sajátértékei* $(\lambda_x^{(1)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$

$$U_x^{(1)}, \dots, U_x^{(s)} \text{ a sajátalterek}$$

és

$$\dim U_x^{(r)} = n_x^{(r)}.$$

Akkor

$$n_x^{(r)}, \lambda_x^{(r)} \text{ invariánsak.}$$

c.) *Ha* $V_x^{(0)} = \{0\}$, $V_x^{(r)} = U_x^{(1)} + \dots + U_x^{(r)}$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n v\| = \lambda_x^{(r)}$$

ha

$$v \in V_x^{(r)} \setminus V_x^{(r-1)}.$$

3.1. propozíció: *Ha* $(A_n)_{n>0} \in GL(n, \mathbb{R})$

$$\limsup \frac{1}{n} \log \|A_n\| \le 0$$

és $T^n = T_n \dots T_1$ *írásmóddal*

$$\lim_n \frac{1}{n} \log \|(A^n)^{\wedge q}\| \, \exists \quad q = 1, \dots, m\text{-re}$$

akkor a) $\lim[(A^n)^* A^n]^{\frac{1}{2n}} = \Lambda \, \exists$ *és* b.), c.)-*vel analóg állítások igazak.*

Szubadditív Ergod Tétel és Oseledec Tétel alkalmazásai

1. *Véletlen mátrixok*

a. $A_1, A_n, \dots$ pozitív elemű véletlen mátrixok $\in GL(n_1, \mathbb{R}_+)$

b. $E|\log A_i| < \infty$, $A^n = A_n A_{n-1}, \dots, A_1$

c. $Y_1, Y_2, \dots$ stacionárius.

3.4. állítás: $\lambda = \lim \frac{1}{n} A^n_{j,k} \exists$ μ-*majdnem mindenütt* L_1-*ben, és* j, k-*tól független.*

2. *Véletlen permutációk*

$\mathcal{S}_n$: perm. csoport.

$\pi \in \mathcal{S}_n$-re $l(\pi)$: max növekvő részsorozat hossza.

Hammersley (1972). Ha π_n véletlen, akkor

$$\frac{l(\pi_n)}{\sqrt{n}} \to c \qquad (c = 2?)$$

3. Véletlen bolyongás véletlen közegben. Key, 1984. Solomon 1975.

4. Véletlen Schrödinger operátor.

4. Modellek

1. Lorenz attraktor E. Lorenz (1963, J. Athmospheric Sci.)

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= \underbrace{-\sigma X}_{} && \underbrace{+\sigma Y}_{} && \\
\dot{Y} &= -\ X && + RY && \underbrace{-XY}_{} \\
\dot{Z} &= \underbrace{-b\,Z}_{\text{módusok csillapítása}} && \underbrace{}_{\text{parametrikus gerjesztés}} && \underbrace{+XY}_{\text{nemlineáris csatolás}}
\end{aligned}$$

$$\sigma \text{ (Prandtl-szám)} = 10 \qquad \left(= \frac{\nu}{\kappa}\right) \quad \nu \text{ – viszkozitás}, \ \kappa \text{ – hővezetési együttható}$$

$$b = \frac{8}{3}$$

$$R = \frac{\alpha g d^3}{\nu\kappa}\Delta T$$

$$R = 28$$

ahol: α – hőtágulási együttható
d – vastagság
R – Rayleigh-szám (kontroll P.M.)

2. Hénon-attraktor (1976) Egyszerűsített Lorentz

$$H(x, y) = (y + 1 - ax^2, bx) \quad a = 1{,}4 \quad b = 0{,}3.$$

3. Rössler-attaktor (1976)

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= -(y + z) \quad a = 0{,}2 \quad b = 0{,}2 \\
\dot{Y} &= x + ay \\
\dot{Z} &= b + xz - cz.
\end{aligned}$$

5. Indukált leképezések

$(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ endomorfizmus $\mu(A) > 0$.

Definíció: (Derivált leképezés) $T_A \colon A \circlearrowleft$

$$T_A x = T^{n(x)} x$$

ahol $n(x) = \min\{k \geq 1 \mid T^k x \in A\}$ (Poincaré rekurrencia miatt: $\mu(x \in A \mid n(x) = \infty) = 0$).

5.1. állítás: *$(A, \mathcal{F}_A, \mu_A, T_A)$ endomorfizmus, ahol $\mu_A(B) = \mu(A \cap B)/\mu(A)$.*

$(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ endomorfizmus, $f \colon M \to \mathbb{N}$ mérhető.

Legyen $M_f := \{(x, k) \mid x \in M,\ 1 \leq k \leq fx\} \subset M \times \mathbb{N}$. $\mathcal{F}_f$ - a szorzat által generált σ-algebra. $\mu_f(A \times \{k\}) = \mu(A)$, ha $x \in A$-ra $f(x) \geq k$.

Definíció: Torony vagy primitív leképezés:

$$T_f : M_f \circlearrowleft \qquad T_f(z, k) = \begin{cases} (x, k+1) & \text{ha} \quad k < fx \\ (Tx, 1) & \text{ha} \quad k = fx. \end{cases}$$

5.2. állítás: *Ha $\mu(M) < \infty$, és $f \in L_1$, akkor $\mu_f(M_f) = \displaystyle\int_M fx \, \mathrm{d}M$.*

5.3. állítás: *$(M_f, \mathcal{F}_f, T_f, \mu_f)$ mértéktartó.*

Feladat: T_f derivált leképezése az $M \times \{1\}$ halmazon éppen T.

AFIM létezése toronynál

Jelölések: (Δ, F) a torony. $F \colon \Delta \circlearrowleft$.

- Δ_0 a torony alapja.
- $\Delta_0 = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_{0,i}$ és $R \colon \Delta_0 \to \mathbb{Z}_+$ a visszatérési idő, úgy hogy $R|_{\Delta_{0,i}} = \text{const}$.
- $\Delta = \{(z, n) \in \Delta_0 \times \mathbb{Z}_+ \mid n < R(z)\}$

  $\Delta_l = \Delta \cap \{n = l\}$ a torony l-edik emelete.

  $\Delta_{l,i} = \Delta_l \cap \{z \in \Delta_{0,i}\}$

  $R_i = R \mid \Delta_{0,i}$ így $\Delta_{R_i - 1, i}$ a tető $\Delta_{0,i}$ felett.

- $F\colon \Delta \circlearrowleft \; F(z,l) = (z, l+1) \quad$ ha $l+1 < R(z)$

  $$F\Delta_{R_{i-1,i}} \overset{1-1}{\leftrightarrow} \Delta_0.$$

- Konvenció: Δ_0-t azonosítjuk Δ megfelelő részhalmazával

  $$F^R\colon \Delta_0 \circlearrowleft, \qquad F^R x = F^{R(x)} x.$$

- $\mathcal{F}$ a generált σ-algebra Δ-n.

- $x, y \in \Delta_0$-ra

  $$s(x,y) = \min\{n \mid (F^R)^n x, (F^R)^n y \text{ különböző } \Delta_{0,i}\text{-kbe esnek}\}$$

  $\uparrow$ szeparációs idő

  azaz

  $$s(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \Delta_0$$
  $$s(x,y) \geq 1 \quad \forall x, y \in \Delta_{0,i}$$

  $s(x,y)$ kiterjesztése Δ-ra:

  $$s(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in \Delta_{l,i},\ y \in \Delta_{l',i'} \text{ és } (l,i) \neq (l',i') \\ s(\pi x, \pi y) & \text{egyébként } (\pi(z,n) := z). \end{cases}$$

Feltevések:

- LNKO $\{R_i\} = 1$
- $\eta = \{\Delta_{l,i}\}$ generáló, azaz $\bigvee_{i=0}^{\infty} F^{-i}\eta$ pontokból áll.
- $\exists$ m referencia mérték $(\Delta, \mathcal{F})$-n, hogy $m(\Delta_0) < \infty$ (egyszerűség kedvéért $m = \text{Leb}$)

  $$F_*(m \mid \Delta_{l,i}) = m(\Delta_{l+1,i}) \text{ ha } l < R_i - 1$$

- $F^R \mid \Delta_{0,i}\colon \Delta_{0,i} \to \Delta_0$ és inverze sem szinguláris. Azaz F^R Jakobianja m-re vonatkozólag $\exists$ és > 0 μ-majdnem mindenütt.

Megjegyzés: f differenciálható $x_0 \in \mathbb{R}^d$ környezetében, azaz

$$f(x) = f(x_0) + Df_{x_0}(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

$$Jf = \det Df \quad \text{vagy} \quad = |\det Df|$$

- Regularitási feltevés

$$\exists C>0\ \exists\beta\in(0,1)\colon \forall i\ \forall x,y\in\Delta_{0,i}$$

$$\left|\frac{JF^R(x)}{JF^R(y)}-1\right|\le C\beta^{s(F^Rx,F^Ry)} \tag{5.1}$$

$$C_\beta(\Delta)=\{\varphi\colon\Delta\to\mathbb{R}\mid \exists C_\varphi\colon |\varphi(x)-\varphi(y)|\le C_\beta\beta^{s(x,y)}\quad \forall x,y\in\Delta\}$$

$$C_\beta^+(\Delta)=\big\{\varphi\in C_\beta(\Delta)\mid \exists C_\varphi^+\colon \forall l,i \text{ vagy } \varphi\equiv 0,$$

vagy

$$\varphi>0 \text{ és } \left|\frac{\varphi(x)}{\varphi(y)}-1\right|\le C_\beta^+\beta^{s(x,y)}\ \forall x,y\in\Delta_{l,i}\Big\}.$$

5.4. Tétel: (AFIM létezése és tulajdonságai) *Tegyük fel a fentieken kívül, hogy*

- $DF\big|_{\Delta_{0,i}}$ *folytonos*
- (5.1)
- $\displaystyle\int R\,\mathrm{dm}<\infty.$

Akkor

(i) $F:\Delta\circlearrowright$ *-re* $\exists$ *AFIM* $(\nu\ll m)$

(ii) $\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}\in C_\beta^+$ *és* $\inf\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}>0$

(iii) (F,ν) *ergodikus és keverő.*

Bizonyítás: Legyen $m_0=m\mid\Delta_0$.

1. lemma: $\exists\ F^R$ *invariáns mérték* ν_0 Δ_0*-n, hogy az* (i)–(iii) *állítások teljesülnek.*

$\mathcal{P}_0=\eta\mid\Delta_0$.
Legyen $A\in\displaystyle\bigvee_{j=0}^{i-1}(F^R)^{-j}\mathcal{P}_0$.
Legyen $\rho_{i,A}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}(F^R)^i_*\ (m\mid A)$.
Legyen $x,y\in\Delta_0$ és $x',y'\in A$, hogy $(F^R)^ix'=x_1$, $(F^R)^iy'=y$.

Akkor $j \le i$-re

$$s((F^R)^j x', (F^R)^j y') = s(x,y) + (i-j).$$

Ezért

$$\log \frac{\rho_{i,A}(y)}{\rho_{i,A}(x)} = \log \frac{J(F^R)^i x'}{J(F^R)^i y'} = \sum_{j=0}^{i-1} \log \frac{JF^R((F^R)^j x')}{JF^R((F^R)^j y')}$$
$$\le \sum_{j=0}^{i-1} C\beta^{s(x,y)+(i-j)-1} \le C'\beta^{s(x,y)}.$$

Legyen

$$\rho_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(F^R)^i_* m_0\right).$$

Mivel ρ_n konvex lineáris kombinációja $\rho_{i,A}$-knak, azért $\forall x, y \in \Delta_0$-ra

$$\frac{\rho_n(y)}{\rho_n(x)} \le e^{C'}$$

és

$$\forall x \cong y \left(\bmod \bigvee_0^{k-1}(F^R)^{-i}\mathcal{P}_0\right)\text{-ra}$$

$$\frac{\rho_n(y)}{\rho_n(x)} \le e^{C'\beta^k}$$

[1, 9. fejezete] miatt (Arzela–Ascoli tétel!) $\{\rho_n\}_n$ relatív kompakt $L^\infty(\Delta_0, m)$-ben és $\exists \nu_0$, hogy $\frac{\mathrm{d}\nu_0}{\mathrm{d}m} = \lim_{n'} \rho_{n'}$.

2. lemma: *ν_0-ból egyszerűen megkonstruálható a kívánt ν.*

Legyen $\nu' = \sum_{l=0}^{\infty} F^l_*(\nu_0 \mid \{R > l\})$.

Mivel $\frac{\mathrm{d}\nu_0}{\mathrm{d}m} \le e^{C'}$ és $\int R \,\mathrm{d}m < \infty \rightsquigarrow \nu'(\Delta) < \infty$.

Legyen $\nu = \frac{1}{\nu'(\Delta)}\nu'$. ν eleget tesz (i)-nek.

(ii) [1, 9. fejezet] szerint, mivel

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}(x) = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}(\pi x)$$

(iii) [1, 9. fejezet] szerint.

6. Tágító lokális kör-diffeomorfizmus neutrális fix-ponttal: invariáns mértékek.

Modell: f d-edrangú lokális diffeomorfizmus S^1-en $(d > 1)$

(i) $f \in C_1$, és $f' > 1$ $S \backslash \{0\}$-ban.

(ii) $f \in C_2$ $S \backslash \{0\}$-n

(iii) $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ és $\exists \gamma > 0$ $\forall x \neq 0$-ra $x f''(x) \asymp |x|^\gamma$.

Példa: $f(x) = x(1 + x^\gamma)$ $x = 0$ környezetében.

Kiegészítés: Ha $\gamma \to 0$, akkor $x \neq 0$-ra $|f' - 1| \gg \varepsilon$, így $\gamma = 0$ eset az lesz, amikor $f' \geq \lambda > 1$ és f'' korlátos.

$$\mathcal{H}_\beta \{\varphi \colon S \to \mathbb{R} \mid \exists C \mid \varphi(x) - \varphi(y)| \leq C \cdot |x - y|^\beta\}.$$

6.1. tétel:

(a) *Ha* $\gamma \geq 1$, *akkor* $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta f_x^i \Rightarrow \delta_0$ μ*-majdnem minden* $x \in S$*-re. (Nincs véges invariáns mérték).*

(b) *Ha* $\gamma < 1$, *akkor* $\exists$ *AFIM* ν, *és* (f, ν) *keverő.*

(c) *Ha* $0 \leq \gamma < 1$, *akkor ha* $\mathcal{P}_f$ *a Perron–Frobenius operátor és* $\rho = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}$, *akkor* $\forall$ $\varphi \in \mathcal{H}$*-ra* $\left(\int \varphi \, \mathrm{d}m = 1 \right)$

$$\int |\mathcal{P}^n \varphi - \rho| \, \mathrm{d}m \asymp n^{1 - \frac{1}{\gamma}}$$

$\forall \varphi \in L^\infty(L_1, m)$*-re és* $\psi \in \mathcal{H}$*-ra*

$$\begin{aligned} \left| \int (\varphi \circ f^n) \psi \, \mathrm{d}m - \int \varphi \, \mathrm{d}m \int \psi \, \mathrm{d}m \right| &\leq O(n^{1 - \frac{1}{\gamma}}) \quad (0 < \gamma < 1) \\ &\leq C \theta^n \qquad\quad (\gamma = 0) \end{aligned}$$

(d) $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$ *esetén CHT* $\forall \varphi \in \mathcal{H}$*-ra.*

Lokális analízis a fixpont környezetében

Legyen $\varepsilon_0 > 0$ alkalmasan rögzített, tekintsük, $f \mid [0, \varepsilon_0]$-t és legyen $x_0 \in (0, \varepsilon_0)$, továbbá

$$fx_n = x_{n-1},\ n = 1, 2, \ldots$$

3. lemma: $x_n \asymp \frac{1}{n^\alpha} \left(\alpha = \frac{1}{\gamma}\right)$ *és*

$$\exists K > 0 \text{ hogy } \# \left\{ k \;\middle|\; \left[\frac{1}{(k+1)^\alpha}, \frac{1}{k^\alpha}\right] \cap [x_{n+1}, x_n] \neq \emptyset \right\} \leq K.$$

Bizonyítás: Legyen

$$\Delta x_n = x_n - x_{n+1},\ \ \Delta\frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}.$$

Akkor

$$x_n \in \left[\frac{1}{(k+1)^\alpha}, \frac{1}{k^\alpha}\right] \rightsquigarrow \Delta x_n \asymp \Delta\frac{1}{k^\alpha}$$

ugyanis

$$\Delta\frac{1}{k^\alpha} \asymp \frac{1}{k^{\alpha+1}} = \left(\frac{1}{k^\alpha}\right)^{\gamma+1}. \qquad \square$$

4. lemma: (Disztorziós becslés) $\exists C_1 : \forall i, n \in \mathbb{Z}_+,\ i \leq n$ *és* $\forall x, y \in [x_{n+1}, x_n]$-*re*

$$\left|\log\frac{(f^i)'x}{(f^i)'y}\right| \leq C\frac{|f^i x - f^i y|}{\Delta x_{n-i}} \leq C_1.$$

Bizonyítás: Először gyengébb korlát: $\exists\, \zeta_j \in [f^j x, f^j y]$

$$\begin{aligned}
\left|\log\frac{(f^i)'x}{(f^i)'y}\right| &\leq \sum_{j=0}^{i-1} |\log f'(f^j x) - \log f'(f^j y)| \\
&\leq \sum_{j=0}^{i-1} \frac{|f''(\zeta_j)|}{f'(\zeta_j)} |f^j x - f^j y| \\
&\lesssim \sum_{0}^{i-1} (x_{n-j+1})^{\gamma-1} (x_{n-j+1})^{\gamma+1}
\end{aligned}$$

$$\lesssim \sum_{0}^{i-1} \frac{1}{(n-j+1)^2} \leq \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Itt használtuk, hogy $f_x^j, f_y^j \in [x_{n+1-j}, x_{n-j}]$.

Másrészt, ha $x, y \in [x_{n+1}, x_n]$, akkor $f^j x, f^j y \in [x_{n+1-j}, x_{n-j}]$ azért $\forall x, y \in \Delta_{n-j}$-re és $\forall j < i$-re

$$\frac{|f^j x - f^j y|}{\Delta x_{n-j}} \asymp \frac{|f^i x - f^i y|}{\Delta x_{n-i}}.$$

Ezt visszahelyettesítve

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{(f^i)' x}{(f^i)' y} \right| &\lesssim \underbrace{(x_{n-j+1})^{\gamma - 1}}_{\mathbf{I}} \cdot \underbrace{\Delta x_{n-j}}_{\mathbf{II}} \frac{|f^i x - f^i y|}{\Delta x_{n-i}} \\ &\leq \text{const.} \frac{|f^i x - f^i y|}{\Delta x_{n-i}} \end{aligned}$$

Indoklás:

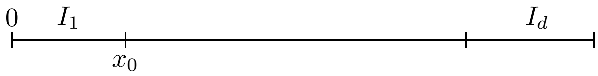
$$\mathbf{I} \to \asymp \left[\frac{1}{(n-j)^\alpha} \right]^{\gamma - 1} = \frac{1}{(n-j)^{1-\alpha}}$$

$$\mathbf{II} \to \asymp \frac{1}{(n-j)^{1+\alpha}}.$$ □

Tétel bizonyítása: Csak az AFIM.

Legyen $\gamma > 0$.

Torony konstrukció: $S = \bigcup_{1}^{d} I_j$, hogy $f I_j = S$.



I_1 felbontása: $f x_{n+1} = x_n$, $J_n = [x_{n+1}, x_n)$, $n \geq 0$

I_d felbontása analóg: J'_n

$$\mathcal{A} = \{I_2, \ldots, I_{d-1}; J_n, J'_n \colon n \geq 0\}.$$

Torony a korábbiak szerint, de nem teljesen (!)

Fő lépések (Összefoglaló)

1. Legyen $\Delta_0 = S$, $\mathcal{A} = \{\Delta_{0,i}\}$

2. Legyen

$$\begin{aligned} R &= 1 && I_2 \cup \cdots \cup I_{d-1} \cup J_0 \cup J_0'\text{-n} \\ R \mid J_n = R \mid J_n' &= n+1 && \text{ha } n \geq 1. \end{aligned}$$

3. Legyen

$$F \mid \Delta_{R_i - 1, i} = f^R \mid \Delta_{0,i}.$$

4. Tehát

$$f^R I_j = S \qquad \text{ha } 2 \leq j \leq d-1$$

és

$$\begin{aligned} f^R J_n &= I_2 \cup \cdots \cup I_d \\ f^R J_n' &= I_1 \cup \cdots \cup I_{d-1}. \end{aligned}$$

5. $m_0 = \text{Leb} \mid \Delta_0$ továbbá $JF = 1$ $\Delta \backslash U_i \Delta_{R_i - 1}$-en már definiálja m-et Δ-n.

6. **Állítás:** $\exists \beta < 1$, hogy $(f^R)'x \geq \dfrac{1}{\beta}$ $\forall x \in S$-re.

Bizonyítás: $x \in J_n$-re

$$(f^R)'x = \prod_{i=0}^{n} f'(f^i x) \geq \frac{1}{\beta}, \text{ ahol } \beta = \min\{f'x \mid x \notin [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]\}$$

7. Ha $s(x,y) \geq n \rightsquigarrow |x-y| \leq \beta^n$.

Lemma: A konstruált toronyra teljesülnek az AFIM létezésének feltételei (kivéve, hogy $f^n J_n \neq S$; de ez nem lesz gond.)

Bizonyítás: A disztorziós becslés a lemma és [1, 9. fejezete] következménye.

Továbbá:

$$m(R > n) = m\left(\bigcup_{i \geq n} J_n\right) + m\left(\bigcup_{i \geq n} J_n'\right) \asymp \frac{1}{n^{1/\gamma}}.$$

Mármost, ha $0 \leq \gamma < 1$ akkor $\int R \,\mathrm{d}m < \infty$.

8. $\gamma = 0$-ra $\exists \theta_0 < 1, C$

$m\{R > n\} \leq C\theta_0^n$.

De egyszerűbb: $\{\Delta_{0,i}\}_i = \{I_1, \dots, I_d\}$. Ekkor $R \equiv 1$.

($\gamma > 0$-ra disztorzióval van baj.)

9. *Invariáns mérték végessége:*

Legyen $\pi \colon \Delta \to S_1$ a természetes vetítés, így $\pi \circ F^R = f^R \circ \pi$.

Az absztrakt tétel bizonyításából és [1, 9. fejezete] szellemében folyik, hogy F^R-nek $\exists\, \overline{\nu}_0 \ll m$ inv. mértéke Δ_0-n, amelyre $0 < C_0 \leq \dfrac{\mathrm{d}\overline{\nu}_0}{\mathrm{d}m_0} \leq C_1$ alkalmas C_0, C_1-gyel.

$\overline{\nu}_0$-ból megkonstruálható az F-invariáns $\overline{\nu}$ Δ-n. Ez csak akkor véges, ha $\int R \, \mathrm{d}m < \infty$, azaz $\gamma < 1$. Legyen végül $\nu = \pi_* \overline{\nu}$.

10. Legyen $\rho = \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}$.

$\gamma > 0$ esetén $\rho \mid J_k \approx k$.

Ugyanis: $\nu(J_k) = \overline{\nu}(\pi^{-1} J_k) \asymp k \dfrac{\mathrm{d}\overline{\nu}}{\mathrm{d}m}\Big|_{J_k} \asymp k m_0(J_k)$.

Így disztorzió miatt

$$\rho \mid J_k \approx \frac{k^{-\alpha}}{m_0(J_k)} \approx k.$$

11. *m-tipikus pontok aszimptotikus eloszlása $\gamma \geq 1$-re:*

Rögzítsük az origó valamely (X'_N, X_N) környezetét, $\varepsilon > 0$-t. Megmutatjuk, hogy m-majnem minden x-re

$$\frac{1}{n} \# \left\{ 0 \leq k \leq n \mid f^k x \in (X'_N, X_N) \right\} \geq 1 - \varepsilon \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

Legyen $N_1 > N$, hogy

$$\frac{\nu(S^1 \backslash (X'_N, X_N))}{\nu(S^1 \backslash (X'_{N_1}, X_{N_1}))} < \varepsilon.$$

Jelölje $f^{(N_1)}$ az első visszatérés leképezést $S^1 \backslash (X'_{N_1}, X_{N_1})$-en akkor $\nu \mid (S^1 \backslash (X'_{N_1}, X_{N_1})$ véges, $f^{(N_1)}$-invariáns mérték, amelyről könnyű látni, hogy ergodikus (pl. $d \geq 3$-ra az I_2-n való indukáltja ergodikus). Így m-majdnem minden pontjára $S^1 \backslash (X'_{N_1}, X_{N_1})$-nek az $f^{(N_1)}$-re az (X'_N, X_N)-ben töltött relatív idő $\geq 1 - \varepsilon$. Ugyanakkor az f-orbitok (X'_N, X_N)-ben töltött relatív ideje nagyobb mint az $f^{(N_1)}$-orbitoké. $\square$

7. Indukált leképezések

A. Egyensúlyhoz való konvergencia sebessége

Legyen $\hat{R}\colon \Delta \to \mathbb{Z}_+$, $\hat{R}(k) = \min\{k > 0 \mid F^k x \in \Delta_0\}$.

7.1. tétel:

I. Alsó korlátok *$\exists$ sok λ valószínűségi mérték Δ-n, amely eleget tesz*

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}m} \in C_\beta^+\text{-nak, hogy alkalmas } c = c(\lambda) > 0\text{-ra}$$

$$|F_*^n \lambda - \nu| \geq c m\{\hat{R} > n\}.$$

(Nyilván:

$$m(\hat{R} > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n) m_0(R = k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} m_0(R \geq k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} m(\Delta_k).\Big)$$

II. Felső korlátok *Ha $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}m} \in C_\beta^+$, akkor $|F_*^n\lambda - \nu|$ felső becslése megadható $m(\hat{R} > n)$ aszimptotikájával bizonyos exponenciális függvények terminusaiban. Két speciális eset:*

(a) *Ha $m(\hat{R} > n) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ valamely $\alpha > 0$-ra, akkor $\forall$ fenti λ-ra*

$$|F_*^n \lambda - \nu| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

(b) *Ha $m(\hat{R} > n) = O(\theta^n)$ valamely $0 < \theta < 1$-re, akkor $\exists\ \tilde{\theta} < 1$, hogy $\forall$ fenti λ-ra*

$$|F_*^n \lambda - \nu| = O(\hat{\theta}^n).$$

7.2. tétel: (korreláció csökkenés) *Az előbbi tétel* **(II)** *állításai igazak maradnak, ha $|F_*^n\lambda - \nu|$ helyett Cov$(\varphi \circ F^n, \psi) = \int (\varphi \circ F)^n \psi \,\mathrm{d}\nu - \int \varphi \,\mathrm{d}r \int \psi \,\mathrm{d}\nu$-t írunk és $\varphi \in L^\infty(\Delta, m)$, $\psi \in C_\beta(\Delta)$.*

7.3. tétel: (CHT) *Ha $m(\hat{R} > n) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ $\alpha > 1$-gyel, akkor a CHT áll $\forall$ $\varphi \in C_\beta^0$-ra (itt $C_\beta^0 = \{\varphi \in C_\beta \mid \int \varphi \,\mathrm{d}\nu = 0\}$) azaz*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ F^i \Rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Továbbá $\sigma > 0$ csak akkor, ha $\varphi \circ F \neq \psi \circ F - \psi$ áll $\forall \psi \in C_\beta$-ra.

7.1. tétel bizonyítása:

a. Alsó korlát

Legyen λ valószínűségi mérték mérték Δ-n, amelyre alkalmas pici $c_1 > 0$-val

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}m} \geq \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m} + c_1 \quad \bigcup_{l\geq 1} \Delta_l\text{-en.}$$

Mivel $JF \equiv 1$ ha $x \in \Delta \backslash F^{-1}\Delta_0$ és $F_*\nu = \nu$ azért $\forall n \geq 1$-re

$$\frac{\mathrm{d}(F_*^n\lambda)}{\mathrm{d}m} \geq \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m} + c_1 \quad \bigcup_{l\geq n+1} \Delta_l\text{-en.}$$

Így

$$|F_*^n\lambda - \nu| = \int \left|\frac{\mathrm{d}F_*^n\lambda}{\mathrm{d}m} - \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}\right| \mathrm{d}m \geq c_1 \sum_{l=n+1}^{\infty} m(\Delta_l) = c_1 m(\hat{R} > n).$$

Nyilván: Nem igaz, hogy $m_0(R > n)$ meghatározná a konvergencia sebességet. Például: ha $F\colon \Delta \circlearrowright$ és $\nu = m$ izomorf egy véges Markov-lánccal, akkor a konvergencia sebesség exponenciális, de $m(\hat{R} > n) = 0$, ha n elég nagy, elérhető könnyen.

b. Felső korlát, csatolás előkészítése: lineáris (Markov) eset

Legyen λ, λ' valószínűségi mértékek Δ-n és $\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}m}, \dfrac{\mathrm{d}\lambda'}{\mathrm{d}m} \in C_\beta^+$.

Cél: $|F_*^n\lambda - F_*^n\lambda'|$ becslése minél jobb csatolással.

$$F \times F\colon \Delta \times \Delta \circlearrowright$$

$$P := \lambda \times \lambda'$$

$\pi, \pi'\colon \Delta \times \Delta \to \Delta$ vetítés az 1. ill. 2. koordinátára.

Trivi: $F^n \circ \pi = \pi \circ (F \times F)^n$

$\eta \times \eta$ felbontás $\Delta \times \Delta$-n (Markov!)

$$(\eta \times \eta)_n := \bigvee_{i=0}^{n-1} (F \times F)^{-i}(\eta \times \eta)$$

Jelölje $(\eta \times \eta)_n(x, x')$ az $(\eta \times \eta)_n$-nek az $(x, x') \in \Delta \times \Delta$-et tartalmazó elemét.

$T\colon \Delta \times \Delta \to \mathbb{Z}^+$ az első szimultán visszatérési idő, azaz

$$T(x,x') = \min\{n > 0 \mid F^n x, F^n x' \in \Delta_0\}.$$

Állítás: Ha $T(x,x') = n$, akkor

$$T \mid (\eta \times \eta)_n(x,x') = n$$

és

$$(F \times F)^n((\eta \times \eta)_n(x,x')) = \Delta_0 \times \Delta_0.$$

Ideiglenes feltevés:

- $JF =$ conts. $\forall \Delta_{l,i}$-n
- $\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}m}, \dfrac{\mathrm{d}\lambda'}{\mathrm{d}m}$ is konstans $\forall \Delta_{l,i}$-n.

Innen, ha $T(x,x') = n$, akkor

$$\begin{aligned}\pi_*(F \times F)^n_*(P \mid (\eta \times \eta)_n(x,x')) &= \frac{P((\eta \times \eta)_n(x,x'))}{m(\Delta_0)}(m \mid \Delta_0) = \\ &= \pi'_*(F \times F)^n_*(P \mid (\eta \times \eta)_n(x,x'))\end{aligned}$$

ugyanis, ha $(\eta \times \eta)_n(x,x') = A_1 \times A_2$, akkor $P((\eta \times \eta)_n(x,x')) = \dfrac{m(A_1)m(A_2)}{(m(\Delta))^2}$ és a baloldalon ennyi súly van Δ_0-n egyenletesen elosztva.

Tehát

$$\begin{aligned}|F^n_*\lambda - F^n_*\lambda'| \le{}& |\pi_*(F \times F)^n_*(P \mid \{T > n\}) - \pi'_*(F \times F)^n_*(P \mid \{T > n\})| + \\ &+ \left| \sum_{i=1}^{n} F^{n-i}_* \left[\pi_*(F \times F)^i_*(P \mid \{T = i\}) - \right.\right. \\ &\left.\left. -\pi'_*(F \times F)^i(P \mid \{T = i\})\right] \right| \le \\ \le{}& 2P\{T > n\}.\end{aligned}$$

Tehát: az ideiglenes feltevés mellett a mértékek különbsége T farok-súlyával becsülhető. Ha ui. F lineáris, akkor (F,ν) Markov-lánccal izomorf, és Markov-láncok csatolásáról van szó.

De a mienk **nemlineáris** eset!

Kihasználandó: szép kezdeti sűrűségek, disztorziós becslések.

Cél: Ha $T_1(x,x') = T(x,x')$ definiálható, akkor legyen $T_1 < T_2 < \cdots$ hogy $T_k = T \circ (F \times F)^{T_{k-1}}$ $k \geq 1$-re. Minden k-ra fix része a mértékeknek csatolható, kivonható a rendszerből, végül a teljes csatolás megvalósul, és felső korlátot nyerünk $|F_*^n\lambda - F_*^n\lambda'|$-re.

De óvatosan: nyilván a sűrűségből konstanst kivonva, a disztorziós becslés sérülhet, erre vigyázni kell.

Láttuk: $|F_*^n\lambda - F_*^n\lambda'|$ becsülhető $P\{T > n\}$-nel, majd: $P\{T > n\}$ természetes kapcsolatban van $m\{\hat{R} > n\}$-nel.

c. Csatolás: általános, nem-lineáris eset

I. Szimultán visszatérési idő és kapcsolata $\hat{R}$-hoz

Először segéd-fogalom: $0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots$ $\Delta \times \Delta$-n.

Legyen $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, hogy $m(F^{-n}\Delta_0 \cap \Delta_0) \geq \gamma_0 > 0$ $\forall n \geq n_0$-ra, ahol γ_0 alkalmas konstans. n_0 létezése következik (F,ν) keverő voltából és abból, hogy $\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m} \in L^\infty(m)$, ui.

$$m(A) = \int_A \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\nu}\,\mathrm{d}\nu \geq \inf \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\nu}\nu(A) = \frac{1}{\sup \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}}\nu(A).$$

Legyen

$$\begin{aligned}
\tau_1(x,x') &= n_0 + \hat{R}(F^{n_0}x)\\
\tau_2(x,x') &= \tau_1 + n_0 + \hat{R}(F^{\tau_1+n_0}x')\\
\tau_3(x,x') &= \tau_2 + n_0 + \hat{R}(F^{\tau_2+n_0}x)\\
\tau_4(x,x') &= \tau_3 + n_0 + \hat{R}(F^{\tau_3+n_0}x')\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Legyen

$$T = \tau_i = \min\{j \mid F^{\tau_j}x, F^{\tau_j}x' \in \Delta_0\}.$$

Mivel (F,ν) keverő, azért $(F \times F, \nu \times \nu)$ ergodikus, így T definiált μ-majdnem minden (x,x')-re. (v.ö. ZH-feladat: μ csak akkor ergodikus, ha $\forall A, B, \mu(A), \mu(B) > 0$-ra $\exists N_0$, hogy $\mu(A \cap T^{N_0}B) > 0$.)

Legyen $\xi_1 < \xi_2 \cdots$ növekedő felbontás-sorozat $\Delta \times \Delta$-n

$$\begin{aligned}
\xi_1(x,x') &:= \bigvee_{j=0}^{\tau_1-1} (F^{-j}\eta)(x) \times \Delta\\
\xi_2(x,x') &:= \xi_1
\end{aligned}$$

finomítása az x'-irányban, azaz $\forall\Gamma = A \times \Delta \in \xi_1$-et oly módon finomítunk, hogy $\tau_2 = \text{const.}$ $\forall\tilde{\Gamma} \subset \Delta$-n és $F^{\tau^2}\pi'\tilde{\Gamma} = \Delta_0$ (azaz ξ_2 a legdurvább olyan finomítás, hogy $\tau_2 = \text{constans}$ az elemein).

Hasonlóan ξ_i $i > 2$ felváltva.

Állítás: τ_i ξ_i mérhető.

Értsük meg jobban ξ_i-t. Legyen $T \in \xi_i$, $i \geq 2$ páros. Γ-n $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_i$ mind constans. Tegyük fel: $\Gamma \cap \{T \leq \tau_{i-1}\} = \emptyset$. A konstrukcióból folyólag Γ téglalap, azaz $\Gamma = A \times B$, ahol $A, B \subset \Delta$.

τ_{i-1} időpontban $F^{\tau_{i-1}}A \overset{1-1}{=} \Delta_0$, és $F^{\tau_{i-1}}B$ valamely $\Delta_{l,j}$-ben van.

τ_i időpontban $F^{\tau_i}B \overset{1-1}{=} \Delta_0$, míg $F^{\tau_i}A$ az $\bigcup\{\Delta_l, l \leq \tau_i - \tau_{i-1}\}$ különböző részein oszlik el.

T definíciója épp arról szól, hogy $T = \tau_i$ áll Γ azon részein, amelyek π vetületének képei τ_i időben Δ_0-t adják.

Mármost a 1. lemma arra ad alsó korlátot, hogy Γ-nak ez hányadrésze.

τ_{i+1} definíciójához először vakon iteráljuk F-et n_0-szor és az ezután az első visszatérés Δ_0-ba τ_{i+1}.

Most $\tau_{i+1} = \text{const.}$ a $\Gamma \cap \pi^{-1}\{x\}$ típusú halmazokon (ui. páratlan indexű visszatérés!), emellett tetszőleges nagy értékeket vehet fel. A 2. lemma tárgya $\tau_{i+1} - \tau_i$ eloszlása.

Vegyük észre, hogy a $\xi_{i+1} \mid \Gamma$ felbontás Γ-t megszámlálható sok vertikális sávra osztja, továbbá $\{T = \tau_i\}$ pedig ξ_{i+1}-mérhető, de nem ξ_i-mérhető.

II. Alap lemmák

Mindkét, itt következő becslésnek (ezek $\{\tau_i\}$-kre és T-re vonatkoznak) két verziója van. Az egyik igaz minden időre, a konstansok természetesen függnek λ, λ' regularitásától. F azonban simít, így az irregularitások elsimulnak, azaz elég sok iteráltat véve a konstansok λ, λ'-től függetlenek lesznek.

Legyen $\xi_0 :=$ triviális felbontás, $\tau_0 := 0$.

1. lemma: *$\exists\, \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\lambda, \lambda') > 0$, hogy $\forall i \geq 2$, $\forall\Gamma \in \xi_i$-re, amelyre $T \mid \Gamma > \tau_{i-1}$, igaz lesz:*

$$P\{T = \tau_i \mid \Gamma\} \geq \varepsilon_0.$$

A λ, λ'-től való függőség elhagyható, ha $i \geq i_0$ (λ, λ').

2. lemma: *$\exists K_0 = K_0(\lambda, \lambda')$, hogy $\forall i \geq 0$, $\forall\Gamma \in \xi_i$, $\forall n \geq 0$-ra*

$$P\{\tau_{i+1} - \tau_i > n_0 + n \mid \Gamma\} \leq K_0 m\{\hat{R} > n\}$$

K_0 függése λ, λ'-től elhagyható, ha $i \geq i_0(\lambda, \lambda')$.

Legyen $\mathcal{P}_n := \bigvee_{i=0}^{n-1} (F^R)^{-i}\mathcal{P}_0$. Az (5.1) regularitási feltételből $\rightsquigarrow$ hogy $\exists C_F > 0$, hogy $\forall n \in \mathbb{Z}_+$-ra és $\forall x \cong y \pmod{\mathcal{P}_n}$-ra.

$$\left| \frac{J(F^R)^n(x)}{J(F^R)^n(y)} - 1 \right| \leq C_F \beta^{s((F^R)^n x,(F^R)^n y)}. \tag{7.1}$$

Két szublemma

1. szublemma:

$\exists M_0$, *hogy* $\forall n \in \mathbb{Z}_+$*-ra*

$$\frac{\mathrm{d}F_*^n m}{\mathrm{d}m} \leq M_0.$$

Bizonyítás: Legyen $\mu_n = F_*^n m$. Alapgondolat: Δ_0-ra való visszatéréseknél (7.1) miatt lesz a korlát M_0, máskor viszont $J = 1$.

Tehát: $\mu_n(\Delta) = m(\Delta) < \infty$. Az előbbiek miatt $\exists M_0 \forall n \geq 0$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mu_n}{\mathrm{d}m}\right|\Delta_0 \leq M_0.$$

Másrészt

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mu_n}{\mathrm{d}m}\right|\Delta_l = 1, \text{ ha } n \leq l,$$

$l < n$-re pedig használható a $\left.\frac{\mathrm{d}\mu_{n-l}}{\mathrm{d}m}\right|\Delta_0$-ra kapott becslés.

2. szublemma: *$\forall k > 0$-ra legyen $\Omega \subset \bigvee_{i=0}^{k-1} F^{-i}\eta$ olyan, hogy $F^k\Omega = \Delta_0$, és legyen $\mu := F_*^k(\lambda \mid \Omega)$. $\exists C_0 = C_0(\lambda)$, hogy $\forall x, y \in \Delta_0$-ra*

$$\left| \frac{\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}(x)}{\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}(y)} - 1 \right| \leq C_0 \beta^j$$

ahol j a Δ_0-ban tett látogatások száma k-ig. C_0-nak λ-tól való függése megszüntethető, ha feltesszük, hogy alkalmas $j_0 = j_0(\lambda)$-ra a k előtti ($i \leq k$) Δ_0-ba való i visszatérések ($F^i\Omega \subset \Delta_0$) száma $\geq j_0$.

Bizonyítás: Legyen $\varphi = \dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}m}$ és legyen $x_0, y_0 \in \Omega$ olyan, hogy $F^k x_0 = x$, $F^k y_0 = y$.

$$\left|\frac{\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}(x)}{\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}(y)} - 1\right| = \left|\frac{\frac{\varphi x_0}{(JF^k)x_0}}{\frac{\varphi y_0}{(JF^k)y_0}} - 1\right| = \frac{(JF)^k y_0}{\varphi y_0}\left|\frac{\varphi x_0}{(JF^k)x_0} - \frac{\varphi y_0}{(JF^k)y_0}\right| \leq$$
$$\leq \frac{(JF^k)y_0}{\varphi y_0}\left[\varphi x_0 \left|\frac{1}{(JF^k)x_0} - \frac{1}{(JF^k)y_0}\right| + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{JF^k y_0}|\varphi x_0 - \varphi y_0|\right] \leq$$
$$\leq \frac{\varphi x_0}{\varphi y_0}\left|\frac{(JF^k)y_0}{(JF^k)x_0} - 1\right| + \left|\frac{\varphi x_0}{\varphi y_0} - 1\right| \leq$$
$$\leq (1 + C_\beta \beta^j) C_F \beta^j + C_\varphi \beta^j. \qquad \square$$

1. lemma bizonyítása: A meghatározottság kedvéért legyen i páros. Legyen $\Gamma = \xi_i$, mint a lemmában és legyen $\Omega = \pi\Gamma$. Mivel $P = \lambda \times \lambda'$, $\pi_*(P \mid \Gamma) =$ const. $(\lambda \mid \Omega)$, alkalmazható 2. szublemma $\mu = F_*^{\tau_{i-1}}(\lambda \mid \Omega)$-ra.

Tehát $P\{T = \tau_i \mid \Gamma\} = \dfrac{1}{\mu(\Delta_0)}\mu\{\Delta_0 \cap F^{-(\tau_i - \tau_{i-1})}\Delta_0\}$. Így az 1. lemma $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\lambda, \lambda')$-vel következik a disztorziós becslésből $\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}$-re, n_0 megválasztásából, és abból, hogy $\tau_i - \tau_{i-1} \geq n_0$. Pontosabban legyen $H = \Delta_0 \cap T^{-(\tau_i - \tau_{i-1})}\Delta_0$. Akkor

$$\frac{\mu(A)}{\mu(\Delta_0)} = \frac{\displaystyle\int_{\Delta_0} \mathbf{1}_A(x) \frac{\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}(x)}{\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}(x_0) - 1} \mathrm{d}m + m(A)}{\displaystyle\int_{\Delta_0} \frac{\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}(x)}{\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}(x_0) - 1} \mathrm{d}m + m(\Delta_0)} = \frac{m(A)}{m(\Delta_0)}[1 + C\beta^{j_0}] \geq \varepsilon_0.$$

Ha $j \geq j_0$, ahol j_0 mint j 1. lemma bizonyításában. Ha $i \geq 2j_0$, akkor a disztorziós konstans, és ezzel együtt $\dfrac{\mu(A)}{\mu(\Delta_0)}$ alsó korlátja független λ és λ'-től.

$\square$

2. lemma bizonyítása: Legyen először $i \geq 2$, pl. i páros. Legyen $\mu := \dfrac{1}{(\pi_* P)(\Gamma)} F_*^{\tau_{i-1}} \pi_*(P \mid \Gamma)$.

Akkor μ valószínűségi mérték Δ_0-n, és

$$P\{\tau_{i+1} - \tau_i > n_0 + n \mid \Gamma\} = (F_*^{(\tau_i - \tau_{i-1}) + n_0}\mu)\{\hat{R} > n\} \leq$$
$$\leq \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\left(F_*^{(\tau_i - \tau_{i-1}) + n_0}\mu\right)\right|_\infty m\{\hat{R} > n\} \leq$$

$$\leq M_0 \left|\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}\right|_\infty m\{\hat{R} > n\} \qquad \text{1. sublemma miatt.}$$

Ugyanis

$$(F_*\mu)(A) = \mu(F^{-1}A) = \int_{F^{-1}A} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}\,\mathrm{d}m \leq \left|\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}\right|_\infty (F_*m)(A).$$

Mármost 2. szublemma miatt $\left|\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}\right|_\infty$ korlátos, a korlát Γ-tól független, és λ-tól is csak néhány kezdeti i-re függ.

Tehát $i \geq 2$-re az állítás igaz.

$i = 0$-ra

$$P\{\tau_1 > n_0 + n\} = (F_*^{n_0}\lambda)\{\hat{R} > n\} \leq \left|\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}m}\right|_\infty M_0 m\{\hat{R} > n\}$$

$i = 1$ ugyanígy. □

III. A csatolás és a százalékos becslés

$F_*^n\lambda$ és $F_*^n\lambda'$ csatolása

Témánk $\hat{F}\colon \Delta \times \Delta \circlearrowleft$, ahol $\hat{F} = (F \times F)^T$.

Ha tehát $\hat{\xi}_1$ $\Delta \times \Delta$ felbontása olyan Γ téglalapokra, amelyeken T konstans, és $(F \times F)^T$ Γ-t injektive képezi $\Delta_0 \times \Delta_0$-ra, akkor $\hat{F} \mid \Gamma\colon = (F \times F)^T \mid \Gamma$. A referencia mérték $m \times m$, és $J\hat{F}$ jelöli $\hat{F}$ Jacobianját $m \times m$-re vonatkozólag.

Az $\hat{F}$-ra vonatkozó szeparációs idő $\hat{s}(\cdot,\cdot)$: $w, z \in \Delta \times \Delta$-ra

$$\hat{s}(w,z)\colon = \min\{n \geq 0 \mid \hat{F}^n w \text{ és } \hat{F}^n z \;\hat{\xi}_1 \text{ különböző elemeibe esnek}\}.$$

Nyilván, ha $w = (x, x')$, $z = (y, y')$, akkor

$$\hat{s}(w,z) \geq n \rightsquigarrow s(x,y) \geq n \text{ és } s(x',y') \geq n.$$

(Ugyanis $\hat{s}(w,z) = \min\{s(x,y), s(x',y')\}$.)

Legyen $\varphi = \dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}m}$, $\varphi' = \dfrac{\mathrm{d}\lambda'}{\mathrm{d}m}$ és legyenek C_φ, $C_{\varphi'}$ oly konstansok, hogy $\forall x, y \in \Delta$-ra

$$\left|\log\frac{\varphi x}{\varphi y}\right| \leq C_\varphi \beta^{s(x,y)}, \qquad \left|\log\frac{\varphi' x}{\varphi' y}\right| \leq C_{\varphi'} \beta^{s(x,y)}$$

(ha $\varphi x, \varphi y, \varphi' x, \varphi' y > 0$).

Legyen

$$\Phi = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}(m \times m)}, \text{ azaz } \Phi(x,x') = \varphi(x)\varphi'(x').$$

3. szublemma:

1. *$\forall n \geq 0$-ra, ha $\forall w, z \in \Delta \times \Delta$-ra, amelyre $\hat{s}(w,z) \geq n$,*

$$\left|\log \frac{J\hat{F}^n(w)}{J\hat{F}^n(z)}\right| \leq C_{\hat{F}} \beta^{\hat{s}(\hat{F}^n w, \hat{F}^n z)}$$

ahol $C_{\hat{F}}$ vehető $2C_F$-nek.

2. *$\forall w, z \in \Delta \times \Delta$-ra*

$$\left|\log \frac{\Phi(w)}{\Phi(z)}\right| \leq C_\Phi \beta^{\hat{s}(w,z)}$$

ahol $C_\Phi = C_\varphi + C_{\varphi'}$.

Bizonyítás: Ha $w = (x, x')$, $z = (y, y')$ és $\hat{F}^n(w) = (F \times F)^k(w)$, akkor

$$\begin{aligned}\left|\log \frac{J\hat{F}^n(x,x')}{J\hat{F}^n(y,y')}\right| \leq \left|\log \frac{J\hat{F}^n(x,x')}{J\hat{F}^n(y,x')}\right| + \left|\log \frac{J\hat{F}^n(y,x')}{J\hat{F}^n(y,y')}\right| &= \\ = \left|\log \frac{JF^k(x)JF^k(x')}{JF^k(y)JF^k(x')}\right| + \left|\log \frac{JF^k(y)JF^k(x')}{JF^k(y)JF^k(y')}\right| &\leq \\ \leq C_F \beta^{s(F^k x F^k y)} + C_F \beta^{s(F^k x', F^k y')} &\leq \\ \leq 2C_F \beta^{\hat{s}(w,z)}&.\end{aligned}$$

2. ugyanígy igazolható. □

Most leírjuk a tényleges csatolást. Legyenek $T_1 < T_2 < \cdots$ megállási idők $\Delta \times \Delta$-n, olyanok, hogy $T_1 = T$, és $T_n = T_{n-1} + T \circ \hat{F}^{n-1}$ $n > 1$-re. Nyilván $\hat{F}^n = (F \times F)^{T_n}$. Legyen $\hat{\xi}_n := \hat{F}^{-(n-1)}\hat{\xi}_1$, vagyis $\hat{\xi}_n$ elemei olyan Γ téglalapok, hogy T_n konstans Γ-n, és azt injektive képezi $\Delta_0 \times \Delta_0$-ra.

Ha adott $\Phi = \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}(m \times m)}$, akkor bevezetjük sűrűségek olyan $\hat{\Phi}_0 \geq \hat{\Phi}_1 \geq \hat{\Phi}_2 \geq \cdots$ sorozatát, hogy $\forall i$-re és $\forall \Gamma \in \hat{\xi}_i$-ra

$$\pi_* \hat{F}^i_*((\hat{\Phi}_{i-1} - \hat{\Phi}_i)((m \times m) \mid \Gamma)) = \pi'_* \hat{F}^i((\hat{\Phi}_{i-1} - \hat{\Phi}_i)(m \times m) \mid \Gamma)) \quad (7.2)$$

vagyis, $\hat{\Phi}_i \mid \Gamma$ a $P \mid \Gamma$ azon részének sűrűsége, ami T_i ideig még nem lett csatolva, és $(\hat{\Phi}_{i-1} - \hat{\Phi}_i) \mid \Gamma$ az éppen az i időben csatolt sűrűség.

$\hat{\Phi}_i$-k definíciója. Legyen $\varepsilon > 0$ később meghatározandó kis szám. ε függ F-től (pontosabban β-tól) de Φ-től nem függ. Legyen $i_1 = i_1(\Phi)$ olyan, hogy

$C_\Phi \beta^{i_1} < C_{\hat{F}}$. Ha $i < i_1$, akkor $\hat{\Phi}_i :\equiv \Phi$, azaz nem csatolunk. Ha $i \geq i_1$, akkor legyen

$$\hat{\Phi}_i(z) := \left[\frac{\hat{\Phi}_{i-1}(z)}{J\hat{F}^i(z)} - \varepsilon \min_{w \in \hat{\xi}_i(z)} \frac{\hat{\Phi}_{i-1}(w)}{J\hat{F}^i(w)}\right] J\hat{F}^i(z).$$

Könnyű látni, hogy $\{\hat{\Phi}_i\}$-ra teljesül (7.2).

Az alapvető eredmény a százalékos becslés.

3. lemma: *$\forall$ elég kis $\varepsilon > 0$-ra, $\exists$ $\varepsilon_1 > 0$, amely független Φ-től, hogy $\forall i \geq i_1$-re*

$$\hat{\Phi}_1 \leq (1 - \varepsilon_1)\hat{\Phi}_{i-1} \quad \textit{egész } \Delta \times \Delta\textit{-n.}$$

A lemma igazolásához elegendő belátni, hogy elég kis ε-ra $\exists C$, hogy $\forall \Gamma \in \hat{\xi}_i$-ra

$$\max_{w \in \Gamma} \frac{\hat{\Phi}_{i-1}(w)}{J\hat{F}^i(w)} \Big/ \min_{w \in \Gamma} \frac{\hat{\Phi}_{i-1}(w)}{J\hat{F}^i(w)} \leq C. \tag{7.3}$$

Valóban: az egyszerűség kedvéért jelölje

$$\mathbf{H}(z) = \frac{\hat{\Phi}_{i-1}(z)}{J\hat{F}^i(z)}; \qquad \mathbf{H}_+(z) = \frac{\hat{\Phi}_i(z)}{J\hat{F}^i(z)}$$

akkor egyrészt

$$\mathbf{H}_+(z) = \mathbf{H}(z) - \varepsilon \min_w \mathbf{H}(w)$$

másrészt

$$\frac{\max_w \mathbf{H}(w)}{\min \mathbf{H}(w)} \leq C.$$

Az állítás ekvivalens

$$\mathbf{H} - \mathbf{H}_+ \geq \varepsilon_1(\mathbf{H})$$

azaz $\varepsilon \min_w \mathbf{H}(w) - \varepsilon_1 \mathbf{H} \geq 0$ de

$$\begin{aligned}
\varepsilon \min_w \mathbf{H}(w) - \varepsilon_1 \mathbf{H} &\geq \varepsilon \min \mathbf{H}(w) - \varepsilon_1 \max \mathbf{H}(w) \geq \\
&\geq \varepsilon \min \mathbf{H}(w) - \varepsilon_1 C \min \mathbf{H}(w) = \\
&= \min \mathbf{H}(w)[\varepsilon - \varepsilon_1 C] \geq 0
\end{aligned}$$

hacsak $\varepsilon_1 < \dfrac{\varepsilon}{C}$.

(7.3) viszont a következő disztorziós lemma következménye:

3′. lemma: *$\exists \hat{C}$, hogy $\forall$ elég kis $\varepsilon > 0$-ra $\forall w, z \in \Delta \times \Delta$-ra, amelyre $w \in \hat{\zeta}_i(z)$ és $\forall i \geq i_1$-re*

$$\left| \log \frac{\dfrac{\hat{\Phi}_i(w)}{J\hat{F}^i(w)}}{\dfrac{\hat{\Phi}_i(z)}{J\hat{F}^i(z)}} \right| \leq \hat{C} \beta^{\hat{s}(\hat{F}^i w, \hat{F}^i z)}.$$

4. lemma: *$\forall n \in \mathbb{Z}_+$-ra*

$$|F_*^n \lambda - F_*^n \lambda'| \leq 2P\{T_{i_1} > n\} + 2 \sum_{i=i_1}^{\infty} (1 - \varepsilon_1)^{i - i_1 + 1} P\{T_i \leq n < T_{i+1}\}.$$

4. szublemma: *$\exists K_1 = K_1(P)$ hogy $\forall i$-re és $\forall \Gamma \in \hat{\xi}_i$-ra*

$$P\{T_{i+1} - T_i > n \mid \Gamma\} \leq K_1 (m \times m)\{T > n\}.$$

Itt K_1-nek a P-től való függése elhagyható, ha $i \geq i(P)$.

Összegzés

Az eddigiek célja kapcsolatot teremteni $|F_*^n \lambda - F_*^n \lambda'|$ és $m\{\hat{R} > n\}$ között, az utóbbira vonatkozó további feltevések nélkül.

Tehát $F \times F \colon \Delta \times \Delta \circlearrowleft$, és T visszatérési idő volt $\Delta_0 \times \Delta_0$-ba. $P = \lambda \times \lambda'$. Akkor

(1) T és $m\{\hat{R} > n\}$ viszonya:

$\exists$ megállási idők $0 \equiv \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$ sorozata $\Delta \times \Delta$-n, hogy $T = \tau_i$ valamely $i = i(x, x')$-re, és

(a) $P\{\tau_{i+1} - \tau_i > n_0 + n \mid \tau_i\} \leq K_0 \; m\{\hat{R} > n\}$

(b) $P\{T = \tau_{i+1} \mid T > \tau_i\} \geq \varepsilon_0 > 0$.

Itt n_0 csak F-től függő konstans, K_0 és ε_0 függnek P-től is de ez a függőség eltüntethető ha $i \geq i_0 = i_0(P)$.

(2) T kapcsolata $|F_*^n \lambda - F_*^n \lambda'|$-höz:

legyen $T_1 = T$, $T_n = T_{n-1} + T \circ (F \times F)^{T_{n-1}}$ $n \geq 1$-re.

Akkor $|F_*^n \lambda - F_*^n \lambda'| \leq C \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_1)^i P\{T_i \leq n < T_{i+1}\}$,

ahol $\varepsilon_1 > 0$ csak F-től függő konstans.

d. Polinomiális csökkenés

Feltesszük, hogy $m\{\hat{R} > n\} = O(n^{-\alpha})$ valamely $\alpha > 0$-ra, és belátjuk, hogy $\forall$ a 7.1. tétel feltételeinek eleget tevő λ, λ'-re $|F_*^n \lambda - F_*^n \lambda'| = O(n^{-\alpha})$.

A továbbiakban C függhet F, λ, λ'-től, de független n-től, ill. a szóbanforgó iterálttól.

Először $P\{T > n\}$-et becsüljük. Legyen $P\{T > n\} = \mathbf{I} + \mathbf{II}$, ahol

$$\mathbf{I} = \sum_{i \leq \frac{1}{2}[\frac{n}{n_0}]} P\{T > n,\ \tau_{i-1} \leq n < \tau_i\}$$

$$\mathbf{II} = P\left\{T > n, \tau_{\frac{1}{2}[\frac{n}{n_0}]} \leq n\right\}.$$

Vegyük észre, hogy $\mathbf{II} \leq C(1-\varepsilon_0)^{\frac{1}{2}[\frac{n}{n_0}]}$, ahol ε_0 a 2. lemma konstansa. Valóban, $n \geq 4n_0$-ra

$$\begin{aligned}\mathbf{II} &\leq P\{T > \tau_{\frac{1}{2}[\frac{n}{n_0}]}\} = \\ &= P\{T > \tau_2\} P\{T > \tau_3 \mid T > \tau_2\} \dots P\{T > \tau_{\frac{1}{2}[\frac{n}{n_0}]} \mid T > \tau_{\frac{1}{2}[\frac{n}{n_0}]-1}\}\end{aligned}$$

így 1. lemma miatt mindegyik tényező $\leq 1 - \varepsilon_0$.
I. A főtag először is, $k \geq 2n_0$-ra

$$m\{\hat{R} > k - n_0\} \leq \frac{C}{(k-n_0)^\alpha} = \frac{C}{k^\alpha}\left(\frac{k}{k-k_0}\right)^\alpha \leq \frac{C}{k^\alpha}.$$

Ahonnan

$$m\left\{\hat{R} > \frac{n}{i} - n_0\right\} \leq \frac{Ci^\alpha}{n^\alpha} \qquad \forall i \leq \frac{1}{2}\left[\frac{n}{n_0}\right]\text{-ra.}$$

Visszatérve I.-hez, $\forall$ fix i-re

$$\begin{aligned} P\{T > n, \tau_{i-1} \leq n < \tau_i\} &\leq P\{T > \tau_{i-1},\ n < \tau_i\} \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{i} P\left\{T > \tau_{i-1}, \tau_j - \tau_{j-1} > \frac{n}{i}\right\} \end{aligned} \tag{7.4}$$

(ui. $\tau_i > n$ csak úgy lehetséges, ha legalább egy j-re $\tau_j - \tau_{j-1} > \frac{n}{i}$).

Azt állítjuk, hogy az utóbbi összeg minden tagja $\leq C(1-\varepsilon_0)^i \frac{i^\alpha}{n^\alpha}$.

Tegyük fel először, hogy $i, j \geq 3$. Ekkor

$$P\left\{T > \tau_{i-1}, \tau_j - \tau_{j-1} > \frac{n}{i}\right\} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}, \text{ ahol} \tag{7.5}$$

$$\mathbf{A} = P\{T > \tau_2\}P\{T > \tau_3 \mid T > \tau_2\} \dots P\{T > \tau_{j-2} \mid T > \tau_{j-3}\}$$
$$\mathbf{B} = P\left\{T > \tau_{j-1}, \tau_j - \tau_{j-1} > \frac{n}{i} \;\middle|\; T > \tau_{j-2}\right\}$$
$$\mathbf{C} = P\left\{T > \tau_j \;\middle|\; T > \tau_{j-1}, \tau_j - \tau_{j-1} > \frac{n}{i}\right\} \dots$$
$$\dots P\left\{T > \tau_{i-1} \;\middle|\; T > \tau_{i-2}, \tau_j - \tau_{j-1} > \frac{n}{i}\right\}.$$

A (7.5) azonosság igazolása: Jelöljük $D = \left\{\tau_j - \tau_{j-1} > \frac{n}{i}\right\}$ $E_l = \{T > \tau_l\}$. Akkor

$$P\{E_{i-1}D\} = P\{E_{i-1}D \mid E_{j-2}\}P\{E_{j-2}\}.$$

Mármost

$$P\{E_{j-2}\} = P\{E_{j-2} \mid E_{j-3}\}P\{E_{j-3} \mid E_{j-4}\} \dots P\{E_3 \mid E_2\}P\{E_2\}.$$

Tehát $P\{E_{j-2}\} = \mathbf{A}$. Viszont

$$P\{E_{i-1}D \mid E_{j-2}\} = P\{E_{j-1}D \mid E_{j-2}\} \cdot P\{E_j \mid E_{j-1}D\} \dots P\{E_{i-1} \mid E_{i-2}D\}.$$

Mivel $E_l \supset E_k$ ($k \leq l$-re) miatt

$$\frac{P\{E_{i-1}D\}}{P\{E_{j-2}\}} = \frac{P\{E_{j-1}D\}}{P\{E_{j-2}\}} \cdot \frac{P\{E_jD\}}{P\{E_{j-1}D\}} \cdot \frac{P\{E_{j+1}D\}}{P\{E_jD\}} \cdots \frac{P\{E_{i-2}D\}}{P\{E_{i-3}D\}} \cdot \frac{P\{E_{i-1}D\}}{P\{E_{i-2}D\}}$$

és itt az első tényező **B**, a többi szorzata **C**.

Nyilván **A** üres, ha $j \leq 3$ és **C** üres, ha $j = i$.

A tényezői 1. lemma miatt $\leq 1 - \varepsilon_0$. Ugyanis $P\{T > \tau_l \mid T > \tau_{l-1}\}$ feltétele ξ_l-mérhető, és rajta $T > \tau_{l-1}$.

C tényezői ilyen alakúak: $P\left\{T > \tau_l \;\middle|\; T > \tau_{l-1}, \tau_j - \tau_{j-1} > \frac{n}{i}\right\}$ $(l \geq j)$. ξ_l-re véve a feltételes valószínűségeik $\leq 1 - \varepsilon_0$.

A **B** tényezői $\leq P\left\{\tau_j - \tau_{j-1} > \frac{n}{i} \;\middle|\; T > \tau_{j-2}\right\}$. Mivel $\{T > \tau_{j-2}\}$ ξ_{j-1}-mérhető, azért 2. lemma miatt

$$\mathbf{B} \leq Cm\left\{\hat{R} > \frac{n}{i} - n_0\right\} \leq C\frac{i^\alpha}{n^\alpha}.$$

Kis tagok: $i < 3$; (7.4)-ban.

$i = 2$. Becsülendő

$$P\left\{T > \tau_1,\ \tau_1 - \tau_0 > \frac{n}{2}\right\} + P\left\{T > \tau_1, \tau_2 - \tau_1 > \frac{n}{2}\right\}.$$

Itt mindkét tag $O\left(\dfrac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\alpha}}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)$.

$i = 1$. $P\{T > \tau_0,\ n < \tau_1\} = O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)$.

$i \geq 3$ és pl. $j = 2$: ugyanúgy faktorizálunk és érvelünk, mint előbb.

Összegezve: beláttuk, hogy

$$\mathbf{I} \leq C \sum_{i=1}^{\infty} (1-\varepsilon_0)^i \frac{i^{\alpha+1}}{n^{\alpha}} \leq \frac{C}{n^{\alpha}}$$

azaz

$$P\{T > n\} \leq \frac{C}{n^{\alpha}} \qquad \forall n\text{-re.}$$

Befejezésül:

$$|F_*^n \lambda - F_*^n \lambda'| \leq C \sum_{i=0}^{\infty} (1-\varepsilon_0)^i P\{T_{i-1} \leq n < T_i\}.$$

4. lemma miatt, továbbá mint fent

$$\leq C \sum_{i=0}^{\infty} (1-\varepsilon_0)^i \sum_{j=1}^{i} P\left\{T_j - T_{j-1} > \frac{n}{i}\right\}$$

végül folytatva, 4. szublemma miatt

$$\leq C \sum_{i=0}^{\infty} (1-\varepsilon_0)^i i (m \times m) \left\{T > \frac{n}{i}\right\}.$$

A $P\{T > k\}$-ra adott korábbi becslésünk miatt ($P = m \times m$) az utolsó sor $\leq \dfrac{C}{n^{\alpha}}$ mint állítottuk. □

B. Korreláció csökkenés és CHT

Célunk a 7.2. tétel és a 7.3. tételek igazolása (27. oldal).

7.2. tétel bizonyítása: Jelölje $\mathcal{P}$ az F-hez tartozó Perron–Frobenius, azaz transzfer-operátort, azaz ha $\varphi = \dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}$ (μ előjeles mérték Δ-n), akkor $\mathcal{P}(\varphi) = \dfrac{\mathrm{d}(F_*\mu)}{\mathrm{d}m}$.

Legyen $\varphi \in L_\infty(\Delta, m)$ és $\psi \in C_\beta(\Delta)$, továbbá $\rho = \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}$ az invariáns valószínűségi sűrűség. Legyen $a \geq 0$ és $b > 0$ olyan, hogy $\tilde{\psi} := b(\psi + a)$-nak $\exists$ pozitív alsó korlátja, és $\int \tilde{\psi}\rho \,\mathrm{d}m = 1$. Legyen λ valószínűségi mérték Δ-n, amelyre $\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}m} = \tilde{\psi}\rho$.

Akkor

$$\left|\int(\varphi\circ F^n)\psi\,\mathrm{d}\nu-\int\varphi\,\mathrm{d}\nu\cdot\int\psi\,\mathrm{d}\nu\right|=$$
$$=\frac{1}{b}\left|\int(\varphi\circ F^n)\tilde\psi\,\mathrm{d}\nu-\int\varphi\,\mathrm{d}\nu\int\tilde\psi\,\mathrm{d}\nu\right|=$$
$$=\frac{1}{b}\left|\int\varphi\mathcal{P}^n(\tilde\psi\rho)\,\mathrm{d}m-\int\varphi\rho\,\mathrm{d}m\right|\le$$
$$\le\frac{1}{b}\int|\varphi||\mathcal{P}^n(\tilde\psi\rho)-\rho|\mathrm{d}m\le\frac{1}{b}|\varphi|_\infty|F_*^n\lambda-\nu|.$$

Lévén $\rho\in C_\beta^+$ (v.ö. „AFIM létezése” tétel), azért $\tilde\psi\rho\in C_\beta^+$, így a 7.1. tétel alkalmazható. □

C. CHT

7.3. tétel bizonyítása:

Általános tétel: (**Liverani, Pitman Research Notes in Maths. 362 (1996), 56–75.**)

$(X,\mathcal{F},\mu)$ valószínűségi mező, $T\colon X\circlearrowleft$ nem invertálható ergodikus mértéktartó transzformáció.

$\varphi\in L_\infty(X,\mu)$, amelyre $\int\varphi\,\mathrm{d}\mu=0$.

Ha

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\left|\int(\varphi\circ T^n)\varphi\,\mathrm{d}\mu\right|<\infty$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\hat T^{*n}\varphi$ *abszolút konvergens μ-majdnem mindenütt.*

Akkor

- *φ-re áll a CHT, a limesz $N(0,\sigma^2)$*
- *$\sigma^2=0$ csak akkor, ha $\exists$ mérhető ψ, hogy $\varphi\circ T=\psi\circ T-\psi$.*

Megjegyzés:

Itt $\hat T^*$ a $\hat T\colon L_2(X,\mu)\circlearrowleft$, $\hat T\varphi=\varphi\circ T$ operátor duálisa, azaz $\hat T^*\varphi(x)=\mathbb{E}(\varphi\mid T^{-1}\mathcal{F})(T^{-1}x)$.

Az alapgondolat a CHT-t ergodikus inverz martingál differencia-sorozatra vonatkozó CHT-re visszavezetni. Mivel a $\varphi\circ T^i$ függvény $T^{-i}\mathcal{F}$-mérhető (csökkenő σ-algebra sorozat), azért $\{\varphi \circ T^i\}$ inverz martingál differencia sorozat, ha $\hat{T}^*\varphi = 0$.

Általában ez nincs így, ezért $\varphi \circ T$-hez hozzáadunk egy $g - g \circ T$ tagot, ahol g a (ii)-ben szereplő összeg. Mivel a keletkező valószínűségi változó esetleg nincs L_2-ben, azért még a Kipnis–Varadhan approximációs trükköt alkalmazzuk.

Tehát a 7.3. tétel bizonyításához belátjuk, hogy az előző tétel feltételei állnak. Legyen tehát $\varphi \in C_\beta(\Delta)$, és $\int \varphi \, \mathrm{d}\nu = 0$.

Az (i) feltétel azonnal következik abból, hogy $m\{\hat{R} > n\} = O(n^\alpha)$ valamely $\alpha > 1$-re. A (ii) feltételhez először is

$$\hat{F}^{*n}(\varphi)(x) = \sum_{y \in F^{-n}x} \frac{\rho(y)}{\rho(x) JF^n(y)} \varphi(y) = \frac{1}{\rho(x)} (\mathcal{P}^n(\varphi\rho))(x)$$

ahol $\rho = \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}$ és $\mathcal{P}$ a Perron–Frobenius operátor. Mivel az „AFIM létezése" tétel miatt $\rho \geq C_0 > 0$, azért elegendő belátni, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}^n(\varphi\rho)$ μ-majdnem mindenütt konvergens.

8. Tágító kör-leképezések neutrális fixponttal (folytatás). Korreláció-csökkenés és CHT

A. Korreláció-csökkenés

Célszerű az 5. fejezetben adott sémában dolgozni, azaz tornyot definiálni. E célból új megállási időt vezetünk be: $R^*: S_1^* \to \mathbb{Z}_+$, mégpedig $R^*(x) = \min\{n \geq R(x) \mid f^n x \in I_1\}$.

Feladat: Becsüljük meg $m\{R^* > n\}$-et. E célból vezessük be az R_i megállási idők sorozatát: $R_1 = R$ és

$$R_i = R_{i-1} + R \circ f^{R_{i-1}}$$

így $R^*(x) = R_i(x)$, ahol $i = \min\{j \geq 1 \mid f^{R_j} x \in I_1\}$.

Legyen $\mathcal{B}_i$ S_1 azon σ-algebrája, amely az olyan

$$\omega \in \bigvee_{j=0}^{n-1} F^{-j}\mathcal{A} \text{ (ahol } \mathcal{A} \text{ ugyanaz, mint a 6. fejezetben)}$$

intervallumokból áll, amelyeken $R_i = n$.

Azt is állítjuk, hogy ha $i > 1$-re, $\omega \in \mathcal{B}_i$ és $R^* \neq R_j$ $1 \leq j \leq i-1$-re, akkor $m\{R^* = R_i \mid \omega\} \geq \varepsilon_0$ alkalmas $\varepsilon_0 > 0$-ra. Ez nyilvánvaló, mert probléma csak akkor lehet, ha $f^{R_i - 1}\omega \subset I_1$, de akkor R^* ténylegesen az a legkisebb $n \geq R_{i-1}$ lenne, amikor ω belép I_1-be.

A jelenlegi szituáció teljesen analóg a 7. fejezetbelivel: $f\colon S_1 \circlearrowleft$-t vesszük $F * F\colon \Delta * \Delta \circlearrowleft$ helyett, R_i-t τ_i helyett, végül R^*-t T helyett. A 7/A/d-beli bizonyítások adaptálásával belátható, hogy $m\{R^* > n\} = O\left(\frac{1}{n}\alpha\right)$ ha $\gamma > 0$ ($\gamma = 0$ teljesen analóg, de mivel $R \equiv 1$, azért könnyű látni, hogy $m\{R^* > n\} = O(\theta_1^n)$ valamely $\theta_1 < 1$-re.

Visszatérve az $F^*\colon \Delta^* \circlearrowleft$ toronyhoz, f^{R^*} természetes $\{\Delta^*_{0,i}\}$ felbontást határoz meg I_1-en, sőt ennek mindegyik elemét f^{R^*} bijektive képezi I_1-re. Az (5.1) regularitási feltétel is könnyen ellenőrizhető. □

Hivatkozások

[1] Szász, D.: *Ergodelmélet és Dinamikai Rendszerek*, BME–kurzus jegyzet, http://math.bme.hu/~szasz