Ami a jegyzetből kimaradt:
ad Periodikus Markov-láncok

P irreducibilis Markov-lánc átmenet-mátrixa d ciklikus osztállyal: $A_0, \ldots, A_{d-1}$

1. P^d minden A_i-re korlatozva irreducibilis, és valamilyen hatványa ott pozitív. Perron-Frobenius miatt tehát $\forall A_i$-n van $P^d\Pi_i$-nek egyetlen (és pozitív) $\tilde{\pi}_i^*$ baloldali sajátvektora (itt Π_i jelöli az A_i-re való megszorítást). Tehát P^d-nek az 1 pontosan d-szeres sajátértéke d sajátvektorral.

2. Következésképpen P sajátértékei a d-edik egyseggyökök: $\lambda_0 = 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}$, és ezek mind egyszeresek. Utóbbi azért igaz, mert a $\pi_i^* = (0, \ldots, 0, \tilde{\pi}_i^*, 0, \ldots, 0)$ vektorok az 1-hez tartozó invariáns alterét feszítik ki P-nek, és ezeken P ciklikusan hat. Ezért a ciklikus hatás karakterisztikus polinomja, azaz $z^d - 1$ osztója P karakterisztikus polinomjának.

3. Tehát $P = QDQ^{-1}$, ahol D-ről feltesszük, hogy diagonális (ha nem, akkor is igaz, hogy az egységkörön a spektruma csak az egységgyökökből áll, és az alábbi gondolatmenet akkor is alkalmazható). Tehát tetszőleges Φ_0 kezdeti eloszlás esetén

$$
\begin{aligned}
&\Phi_0^*(\frac{1}{d}\sum_{j=0}^{d-1} P^j)P^n \\
=\ &\Phi_0^* Q(\frac{1}{d}\sum_{j=0}^{d-1} D^j)Q^{-1}P^n \\
\asymp\ &\Phi_0^* QBQ^{-1}P^n \\
=&\Phi_0^* Q \begin{pmatrix} \pi^* \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} P^n \\
=\ &\Phi_0^* \begin{pmatrix} \pi^* \\ \pi^* \\ \ldots \\ \pi^* \end{pmatrix} P^n \\
=\ &\pi^* P^n \ =\ \pi^*
\end{aligned}
$$

ahol a B mátrix egyetlen nem-zérus eleme a bal-felső sarokban álló 1-es.

ad Visszatérés

Állítás: Visszatérőnek lenni osztálytulajdonság.

Bizonyítás: Legyen az irred. osztály két tetszőleges eleme: x, y. Tehát valamely n_0-ra $p_{n_0}(x, y) > 0$. Gondoljuk meg: ha a Markov-lánc x-ből eljut az y állapotba, aminek pozitív a valószínűsége, és $P_y(X_n = y \; valamely \; n\text{-}re) = q < 1$ lenne, akkor legalább $p_{n_0}(x, y).q$ valószínűséggel a lánc x-ből indulva nem térne vissza az x állapotba, ami ellentmondás.