

Sztochasztikus analízis házi feladat # 7-8-9

2005. április 15.

1. Legyen $0 \leq s < t < \infty$ és $F \in \mathcal{F}_s$. Ha $0 \leq s < s' < t < t' < \infty$, definiáljuk az $(s, t]$ indikátorának alábbi folytonos közelítését:

$$f(u) = \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \leq u \leq s \\ (u-s)/(s'-s) & \text{ha } s < u < s' \\ 1 & \text{ha } s' \leq u \leq t \\ (t'-u)/(t'-t) & \text{ha } t < u < t' \\ 0 & \text{ha } u \geq t'. \end{cases}$$

Legyen $X(u, \omega) = f(u)1_F(\omega)$, ha $(u, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$. Lássuk be, hogy ekkor X adaptált. Hasonlóan, ha $\epsilon > 0$, definiáljuk $\{0\}$ indikátorának alábbi folytonos közelítését:

$$g(u) = \begin{cases} 1 - (u/\epsilon) & \text{ha } 0 \leq u \leq \epsilon \\ 0 & \text{ha } u \geq \epsilon. \end{cases}$$

Bármely $F_0 \in \mathcal{F}_0$ esetén legyen $Y(u, \omega) = g(u)1_{F_0}(\omega)$, ha $(u, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$. Lássuk be, hogy Y is adaptált. Ezeknek alapján igazoljuk, hogy $\mathcal{P} \subset \sigma(c)$.

2. Legyen (\mathcal{F}_t) standard filtráció és S egy megállási idő (\mathcal{F}_t) -re. Legyen $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{S+t}$ ha $t \geq 0$ (megállási időkhöz tartozó σ -algebrák!). Mutassuk meg, hogy ekkor (\mathcal{G}_t) is standard filtráció. Legyen $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ olyan, hogy $T \geq S$. Lássuk be, hogy T akkor és csak akkor megállási idő (\mathcal{F}_t) -re, ha $1_{\{S < \infty\}}(T - S)$ megállási idő (\mathcal{G}_t) -re. Egy alkalmazás: Legyen B Brown-mozgás a természetes standard filtrációval, $B_0 = 0$,

$$S = \inf\{t \geq 0 : |B(t)| \geq 1\}, \quad T = \inf\{t \geq S : |B(t) - B(S)| \geq 1\}.$$

Igazoljuk az előző állítás segítségével, hogy T is megállási idő.

3. Legyen B Brown-mozgás a természetes standard filtrációval, $B_0 = 0$, és

$$S = \sup\{t \in [0, 1] : B(t) = 0\},$$

vagyis S a B utolsó zérushelye az 1 időpont előtt. Lássuk be, hogy S \mathcal{F} -mérhető valószínűségi változó, $\mathbb{P}(S = t) = 0$ minden $t \geq 0$ -ra, de S nem megállási idő.

4. Lássuk be, hogy egy B Brown-mozgás trajektóriái 1 valószínűséggel semmilyen intervallumon nem α -Hölder-folytonosak, ha $\alpha > 1/2$. (Belátható viszont, de ez nem része a feladatnak, hogy minden $\alpha < 1/2$ esetén a trajektóriák lokálisan α -Hölder-folytonosak.) Útmutatás: Használjuk fel, hogy a kvadratikus variáció minden $[s, t]$, $0 \leq s < t < \infty$ intervallumon $t - s > 0$.

5. Legyen M folytonos, L^2 -korlátos martingál. Ekkor a martingálkonvergencia-tétel szerint $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t$ m.b. és a limesz $M_\infty \in L^2$. Továbbá, mivel $[M]$ növekvő folyamat, m.b. létezik $\lim_{t \rightarrow \infty} [M]_t$, mint \mathbb{R}_+ -beli értékű valószínűségi változó, jelölje ezt $[M]_\infty$. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbb{E}([M]_\infty) = \mathbb{E}(M_\infty^2 - M_0^2) = \mathbb{E}((M_\infty - M_0)^2) < \infty.$$

Következésképpen $[M]_\infty < \infty$ m.b. továbbá $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t M dM$ m.b. létezik és L^1 -beli valószínűségi változó.

6. Tegyük fel, hogy M folytonos lokális martingál és legyen $[M]_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} [M]_t$. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbb{E}([M]_\infty) < \infty$, akkor $M - M_0$ L^2 -korlátos martingál.
7. Legyen M folytonos lokális martingál és V folytonos, adaptált, lokálisan korlátos változású folyamat. Legyen $X = M + V$. Ekkor X -et *folytonos szemimartingálnak* nevezzük. Másképpen: szemimartingál minden olyan folytonos adaptált folyamat, aminek van ilyen felbontása. Ez a dekompozíció egyértelmű, ha $V_0 = 0$ m.b. (Miért?) Legyen $t \geq 0$, $(\Delta_t^n)_{n=1}^\infty$ egy 0-hoz tartó finomságú felosztás-sorozat és

$$S_t^n = \sum_{t_j \in \Delta_t^n} (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^2.$$

Lássuk be, hogy $S_t^n \rightarrow [M]_t$ sztochasztikusan, ha $n \rightarrow \infty$, tehát $[X]_t = [M]_t$.

8. (Ebben a feladatban ne használjuk fel a Doléans-mértéket és a sztochasztikus integrált, mivel pont a Doléans-mérték egy alternatív definíciójáról van szó benne.) Legyen M folytonos és korlátos martingál és $(S_t, t \in \mathbb{R}_+)$, ami az (S_t^n) L^2 -beli limesze $n \rightarrow \infty$ esetén, egy folytonos növekvő folyamat, amellyel $(M_t^2 - M_0^2 - S_t, t \in \mathbb{R}_+)$ egy martingál. Lássuk be, hogy ekkor

$$\mathbb{E} \left(\int_0^\infty 1_A(u) dS_u \right)$$

egy mértéket definiál az $A \in \mathcal{P}$ jósolható halmazokra. Útmutatás: Először $[0, t] \times \Omega$ -beli jósolható halmazokra bizonyítsunk a monoton osztály tétellel.