

## Sztochasztikus analízis házi feladat # 2-3

2005. március 2.

1. Legyen  $(N_t, t \in \mathbb{R}_+)$   $\lambda > 0$  paraméterű Poisson-folyamat és  $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$  a természetes szűrés teljessé téve (ami standard szűrés). Legyen  $M_t = N_t - \lambda t$  (ami egy martingál). Lássuk be, hogy  $(M_t^2 - \lambda t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$  is martingál. Egyenletesen integrálható-e ezen két martingál bármelyike? (Útmutatás:  $M_t^2 - M_s^2 = (M_t - M_s)^2 + 2M_s(M_t - M_s)$ .)
2. Legyen  $(N_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$  ugyanaz, mint az előbb és legyen rögzített  $n \in \mathbb{N}$  esetén  $T_n = \inf\{t \geq 0 : N_t \geq n\}$ . Lássuk be, hogy  $T_n$  megállási idő és  $\mathbb{E}(T_n) = n/\lambda$ .
3. Legyen  $(\tilde{B}_t, t \in \mathbb{R}_+)$  egy standard Brown-mozgás,  $\tilde{B}_0 = 0$  és  $B_t = B_0 + \tilde{B}_t$  ha  $t \in \mathbb{R}_+$ , ahol  $B_0 \in L^p$  ( $p \geq 1$ ) adott valószínűségi változó (a Brown-mozgás véletlen kezdőértéke). Legyen  $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$  a  $B_t$  által meghatározott természetes szűrés teljessé téve (ami standard szűrés). Lássuk be, hogy ekkor  $(B_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$  is  $L^p$  martingál és  $(B_t^2 - t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$   $L^{p/2}$  martingál  $p \geq 2$  esetén.
4. Legyen  $(M_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$  egy  $L^p$  martingál és  $\tau$  egy megállási idő. Ekkor (az órán igazoljuk)  $(M_{t \wedge \tau}, \mathcal{F}_{t \wedge \tau}, t \in \mathbb{R}_+)$  is  $L^p$  martingál. Lássuk be, hogy  $(M_{t \wedge \tau}, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$  is  $L^p$  martingál.
5. Legyen  $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$  Brown-mozgás  $\mathbb{R}^3$ -ban,  $B_0 = x_0 \neq 0$ . Lássuk be, hogy ekkor  $\mathbb{E}^{x_0}(1/|B_t|) \rightarrow 0$  ha  $t \rightarrow \infty$  és  $1/|B_t| \in L^2$  minden  $t \geq 0$  esetén. Nem kötelező: Lássuk be azt is, hogy  $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}^{x_0}(1/|B_t|^2) < \infty$ .
6. Legyen  $\tau$  exponenciális eloszlású valószínűségi változó  $\lambda > 0$  paraméterrel és  $X_t = e^{\lambda t} 1_{\{t < \tau\}}$  ha  $t \geq 0$ . Legyen  $\mathcal{F}_t$  az  $X_t$ -hez tartozó természetes szűrés. Lássuk be, hogy  $(X_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$  pozitív martingál, de nem egyenletesen integrálható. Legyen  $X_{0-} = X_0$  és lássuk be, hogy  $X_{\tau-} \notin L^1$ .
7. Igazoljuk, hogy ha  $M$  pozitív lokális martingál,  $\mathbb{E}(M_0) < \infty$ , akkor  $M$  szupermartingál. (Útmutatás: Használjuk a Fatou-lemmát feltételes várható értékekre.)