# Sztochasztikus analízis házi feladat # 10-11-12

2005. május 6.

1. Legyen $M$ és $N$ két *független* integrálható folyamat. Ha $s \geq 0$, legyen $\mathcal{G}_s^1 = \sigma\{M_u : 0 \leq u \leq s\}$, $\mathcal{G}_s^2 = \sigma\{N_u : 0 \leq u \leq s\}$ és $\mathcal{G}_s = \sigma\{M_u, N_u : 0 \leq u \leq s\}$. Lássuk be, hogy ekkor tetszőleges $s$, $t_1$ és $t_2$ idők esetén
$$\mathbb{E}(M_{t_1} N_{t_2} | \mathcal{G}_s) = \mathbb{E}(M_{t_1} | \mathcal{G}_s^1) \mathbb{E}(N_{t_2} | \mathcal{G}_s^2).$$
Vezessük le ebből, hogy ha $M$ és $N$ két *független* folytonos martingál, akkor $MN$ is folytonos martingál és $[M, N] = 0$ azonosan. (Útmutatás: Először igazoljuk, hogy a fenti egyenlőség baloldala jól definiált. Utána használjuk fel, hogy a $\mathcal{G}_s^1$ $\sigma$-algebrát az $\{M_{u_1} \in A_1, \ldots, M_{u_n} \in A_n\}$ alakú események generálják, ahol $0 \leq u_1 < \cdots < u_n \leq s$, $A_1, \ldots, A_n$ az $\mathbb{R}$ Borel-halmazai és $n \in \mathbb{N}$; hasonló a helyzet a $\mathcal{G}_s^2$ és $\mathcal{G}_s$ $\sigma$-algebrák esetén.)

2. Tegyük fel, hogy $M^1$ és $M^2$ folytonos lokális martingálok, $V^1$ és $V^2$ folytonos, lokálisan korlátos változású folyamatok. Definiáljuk az $X^i = M^i + V^i$ folytonos szemimartingálokat $i = 1, 2$ esetén. Legyen $t \in \mathbb{R}_+$ rögzített és $(\Delta_t^n)_{n=1}^{\infty}$ a $[0, t]$ egy felosztássorozata, $\lim_{n\to\infty} |\Delta_t^n| = 0$. Lássuk be, hogy $i, j \in \{1, 2\}$ és $n \to \infty$ esetén
$$\sum_{t_k \in \Delta_t^n} (X^i_{t_{k+1}} - X^i_{t_k})(X^j_{t_{k+1}} - X^j_{t_k}) \to [M^i, M^j]_t$$
sztochasztikusan.

3. Legyen $X$ Ornstein–Uhlenbeck-folyamat, $X_0 = x \in \mathbb{R}$. Lássuk be, hogy $X$ várhatóérték-függvénye $\mathbb{E}(X_t) = e^{-\alpha t} x$, és kovariancia-függvénye
$$\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \frac{e^{-\alpha(t-s)} - e^{-\alpha(t+s)}}{2\alpha} \qquad (s \leq t).$$
(Mivel $X$ Gauss-folyamat, ez a két függvény egyértelműen jellemzi $X$ összes véges dimenziós eloszlását.)

4. (a) Legyen most $B$ 1-dimenziós Brown-mozgás, $B_0 = 0$ és $X_0$ a $B$-től független, 0 várható értékű, $\frac{1}{2\alpha}$ szórásnégyzetű, normális eloszlású valószínűségi változó, $\alpha > 0$. Lássuk be, hogy az ezen adatokkal definiált $X$ Ornstein–Uhlenbeck-folyamat stacionárius, $\mathbb{E}(X_t) = 0$ várhatóérték-függvénnyel és $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = c e^{-\alpha(t-s)}$ ($c > 0$, $s \leq t$) kovariancia-függvénnyel.

   (b) Legyen $B$ 1-dimenziós Brown-mozgás, $B(0) = 0$. Definíció szerint legyen $X_t = e^{-\alpha t} B(e^{2\alpha t})$. Lássuk be, hogy ekkor $X$ folytonos, stacionárius Ornstein–Uhlenbeck-folyamat.

   (c) Lássuk be, hogy egy stacionárius Ornstein–Uhlenbeck-folyamat (ami Gauss–Markov-folyamat) átmeneti sűrűségfüggvénye
$$p_t(x, y) = (2\pi c(1 - e^{-2\alpha t}))^{-\frac{1}{2}} \exp\left( -\frac{(y - e^{-\alpha t} x)^2}{2c(1 - e^{-2\alpha t})} \right).$$

5. (a) Rögzítsünk egy korlátos $(a, b)$ intervallumot és legyen $B$ olyan 1-dimenziós Brown-mozgás, amely egy $x \in (a, b)$ pontból indul. Jelölje $\mathbb{P}^x$ és $\mathbb{E}^x$ a megfelelő valószínűséget és várható értéket. Legyen $\tau = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin (a, b)\}$. Alkalmazva az opcionális mintavételi tételt a $B_t^2 - t$ martingálra, lássuk be, hogy $\mathbb{E}^x(\tau) = \mathbb{E}^x(B_\tau^2) < \infty$ és így $\mathbb{P}^x(\tau < \infty) = 1$.

   (b) Legyen $B$ $d$-dimenziós Brown-mozgás, $B_0 = x \in \mathbb{R}^d$ és $\tau_R = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq R\}$ $(R > 0)$. Az (a) eredményét felhasználva lássuk be, hogy $\mathbb{P}^x(\tau_R < \infty) = 1$.

6. Legyen $B$ $d$-dimenziós Brown-mozgás, $B_0 = x \in \mathbb{R}^d$. Legyen $D$ korlátos tartomány $\mathbb{R}^d$-ben, $f \in C^2(D_0)$, ahol $D_0$ a $\bar{D}$-t tartalmazó tartomány. Definíció szerint $\tau = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin D\}$. A többdimenziós Ito-formulával lássuk be, hogy minden $x \in \bar{D}$ esetén $f(B_{t\wedge\tau}) - \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau} \Delta f(B_s) ds$ $(t \in \mathbb{R}_+)$ folytonos martingál $\mathbb{P}^x$ szerint. Ha $f$ harmonikus $D$-ben, lássuk be ez alapján, hogy $f(x) = \mathbb{E}^x(f(B_\tau))$ ha $x \in \bar{D}$. (Így tehát a várható értéket kisérleti eredmények számtani közepével közelítve a Laplace-egyenletre vonatkozó Dirichlet-feladat egy közelítő megoldását nyerhetjük.)

7. Alkalmazzuk az előző két feladat eredményeit az $f(x) = |x|^2$ $(x \in \mathbb{R}^d)$ függvényre, hogy megkapjuk az $\mathbb{E}^x(\tau_R) = (R^2 - |x|^2)/d$ ha $|x| \leq R$ képletet.

8. Alkalmazzuk a 6. feladat eredményét az alábbi függvényre

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } d = 1 \\ \ln x & \text{ha } d = 2 \\ |x|^{d-2} & \text{ha } d \geq 3, \end{cases}$$

   és használjuk fel a 5. feladat eredményeit is, hogy belássuk az alábbi állításokat.

   (a) Ha $d = 1$, $(a, b)$ egy korlátos intervallum, $x \in (a, b)$, $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : B_t \leq a\}$ és $\tau_b = \inf\{t \geq 0 : B_t \geq b\}$, akkor $\mathbb{P}^x(\tau_a < \tau_b) = (b - x)/(b - a)$, $\mathbb{P}^x(\tau_a < \infty) = 1$ és $\mathbb{P}^x(\tau_b < \infty) = 1$.

   (b) Ha $d \geq 2$, $0 \leq r \leq |x| \leq R < \infty$, $\tau_r = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \leq r\}$ és $\tau_R = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq R\}$, akkor $r > 0$ esetén

$$\mathbb{P}^x(\tau_r < \tau_R) = \begin{cases} (\ln R - \ln |x|)/(\ln R - \ln r) & \text{ha } d = 2 \\ (|x|^{2-d} - R^{2-d})/(r^{2-d} - R^{2-d}) & \text{ha } d \geq 3. \end{cases}$$

   (c) Ha $r \to 0$ $d \geq 2$-nél, akkor $\mathbb{P}^x(\tau_0 < \tau_R) = 0$ adódik $0 < |x| \leq R < \infty$ esetén. Majd a Brown-mozgás trajektóriáinak folytonossága miatt $R \to \infty$ esetén $\mathbb{P}^x(\tau_0 < \infty) = 0$ adódik minden $x \neq 0$-ra.

   (d) Ha $d \geq 3$, akkor (b)-ből $R \to \infty$ esetén $\mathbb{P}^x(\tau_r < \infty) = (|x|/r)^{2-d}$ adódik, ha $0 < r \leq |x| < \infty$. Összevetve ezt a 5(b) feladattal és a Brown-mozgás erős Markovitásával, lássuk be, hogy $d \geq 3$ esetén a Brown-mozgás tranziens, azaz minden $x \in \mathbb{R}^d$-re $|B_t| \to \infty$ $\mathbb{P}^x$-m.b., ha $t \to \infty$.

9. Legyen $M = (M_t, t \in \mathbb{R}_+)$ folytonos és az $(\mathcal{F}_t)$ standard filtrációhoz adaptált folyamat. Lássuk be, hogy az 1-dimenziós Brown-mozgás alábbi karakterizációi valóban ekvivalensek:

   (i) $(\exp(\alpha M_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t), t \in \mathbb{R}_+)$ lokális martingál minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén.

   (ii) $M$ és $(M_t^2 - t, t \in \mathbb{R}_+)$ lokális martingálok.

   (iii) $M$ lokális martingál és $[M]_t = t$ m.b. minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén.

   (iv) Minden $f \in C^2(\mathbb{R})$ esetén $(f(M_t) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(M_s)\,ds, t \in \mathbb{R}_+)$ lokális martingál.

   (v) $(\exp(i\alpha M_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t), t \in \mathbb{R}_+)$ komplex értékű martingál minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén.