

# Sztochasztikus analízis házi feladat # 1

2005. február 18.

1. *(Monoton osztály tétel halmazokra)*

Legyen  $\mathcal{S}$  az  $\Omega$  részhalmazaiból álló monoton osztály. Mutassuk meg, hogy ha  $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$  véges metszetre zárt, akkor  $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{S}$ . (Útmutatás: Ha  $\mathcal{A}_0$  az  $\mathcal{A}$ -t tartalmazó legszűkebb halmazgyűrű, akkor lássuk be, hogy  $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{S}$ , és így standard mértékelméleti indoklással  $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{S}$ .)

2. *(Monoton osztály tétel függvényekre)*

Legyen  $\Phi \subset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  függvényekből álló monoton osztály. Mutassuk meg, hogy ha  $\mathcal{A}$  az  $\Omega$  részhalmazaiból áll és véges metszetre zárt,  $1_A \in \Phi$  minden  $A \in \mathcal{A}$ -ra, akkor attól függően, hogy  $\Phi$  minden véges értékű (vagy csak minden korlátos) limesz-függvényre zárt,  $\Phi$  tartalmazza az összes valós értékű (vagy csak az összes korlátos)  $\sigma(\mathcal{A})$  mérhető függvényt  $\Omega$ -n. (Útmutatás: Vezessük vissza ezt az 1. feladatra.)

3. *( $L^p$ -beli konvergencia)*

Legyen  $p \in [1, \infty)$ , és  $(X_n)_{n=1}^\infty$   $L^p$ -beli valószínűségi változók sorozata, amely sztochasztikusan konvergál egy  $X$  valószínűségi változóhoz. Ekkor a következő három feltétel ekvivalens:

(a)  $(|X_n|^p)_{n=1}^\infty$  egyenletesen integrálható,

(b)  $X_n \rightarrow X$   $L^p$ -ben,

(c)  $\mathbb{E}(|X_n|^p) \rightarrow \mathbb{E}(|X|^p)$ .

Továbbá az alábbi két feltétel bármelyike implikálja a fentieket:

(d)  $\sup_n \mathbb{E}(|X_n|^q) < \infty$  valamilyen  $p < q < \infty$  esetén,

(e)  $\exists Y \in L^p, |X_n| \leq Y, \forall n \in \mathbb{N}$ .

4. Legyen  $X$  és  $Y$  két olyan sztochasztikus folyamat az  $I \subset \mathbb{R}_+$  paraméterhamazon, amelyek egymás verziói. Lássuk be, hogy ha  $I$  megszámlálható, akkor  $X$  és  $Y$  megkülönböztethetetlenek.

5. Lássuk be, hogy egy adaptált, jobbról folytonos  $X$  folyamat progresszíven mérhető.

6. Legyen  $\tau$  egy megállási idő az  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  filtrációra nézve és legyen

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Lássuk be, hogy  $\mathcal{F}_\tau$   $\sigma$ -algebra,  $\tau \mathcal{F}_\tau$  mérhető, és  $\tau_1 \leq \tau_2$  esetén  $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$ .