

Sztochasztikus analízis házi feladat # 3  
2009. április 20. Beadási határidő: május 11. Minden feladat 10 pontos.

1. Legyen  $X(t) = \int_0^t s dB(s)$ 
  - (a) Határozza meg  $X(t)$  várható értékét, szórásnégyzetét, és kvadratikus variációját!
  - (b) Legyen  $Y(t) = e^{X(t)}$ . Írjon fel egy olyan SDE-t  $B, t$  és  $Y$  segítségével (de  $X$  ne szerepeljen benne), melynek  $Y(t)$  megoldása.
  - (c) Legyen  $Z(t) = e^{at}X(t)$ . Írjon fel egy olyan SDE-t, melynek  $Z(t)$  megoldása.
2. Írjon fel olyan vektorértékű SDE-et, amelynek megoldása az  $\mathbf{X}(t) = (\cos(B(t)), \sin(B(t)))$  folyamat, ahol  $B(t)$  egydimenziós Brown-mozgás.
3. Oldja meg a  $dX(t) = (B(t) + t)X(t) dt + (B(t) + t)X(t) dB(t)$  SDE-et az  $X(0) = 1$  kezdeti feltétellel. Indokolja meg, hogy miért van egyértelmű erős megoldás.
4. Definíció szerint a sztochasztikus logaritmusra igaz  $\mathcal{L}(\mathcal{E}(X)) = X$ . Bizonyítsa be, hogy ha  $U$  olyan Itô-folyamat, amelyre  $U(t) > 0$  minden  $t \geq 0$ -ra, akkor  $\mathcal{E}(\mathcal{L}(U)) = U$ .
5. Keresse meg a  $B^2(t) + 1$  folyamat sztochasztikus logaritmusát.
6. Legyen  $\mathbf{B}(t)$   $d$ -dimenziós Brown-mozgás és  $\mathbf{H}(t)$   $d$ -dimenziós reguláris, adaptált folyamat. Mutassa meg, hogy ekkor

$$\mathcal{E} \left( \int_0^t \mathbf{H}(s) \cdot d\mathbf{B}(s) \right) (t) = \exp \left( \int_0^t \mathbf{H}(s) \cdot d\mathbf{B}(s) - \frac{1}{2} \int_0^t |\mathbf{H}(s)|^2 ds \right).$$

7. Oldja meg a  $\partial U = U \partial B$  Stratonovich SDE-et az  $U(0) = 1$  kezdeti feltétellel.
8. Mutassa meg, hogy bármely  $u \in \mathbb{R}$  esetén  $f(x, t) = \exp(ux - u^2t/2)$  a Brown-mozgás hátra egyenletének egy megoldása. Deriválja  $f$ -et  $u$  szerint egyszer, kétszer, stb., majd helyettesítsen  $u = 0$ -t, hogy belássa: az  $x, x^2 - t, x^3 - 3tx, x^4 - 6tx^2 + 3t^2$  függvények is megoldják ugyanezt a hátra egyenletet. Ennek alapján lássa be, hogy  $B^2(t) - t, B^3(t) - 3tB(t), B^4(t) - 6tB^2(t) + 3t^2$  martingálok, ha  $B(t)$  egy Brown-mozgás.
9. Legyen  $X(t)$  időben homogén diffúzió  $\mu(x) = 2x$  és  $\sigma(x) = 2\sqrt{x}$  együtthatókkal. Írja fel a diffúzió  $L$  generátorát, oldja meg az  $Lf = 0$  egyenletet és adjon meg egy  $M^f(t)$  típusú martingált. Írja fel az  $Y(t) = \sqrt{X(t)}$  folyamat SDE-ét és generátorát.
10. Legyen  $X(t)$  időben homogén diffúzió, melynek együtthatói  $\mu(x) = -\frac{1}{2}\text{sgn}(x)$ , és  $\sigma(x) = 1$ . Igazolja, hogy  $\pi(x) = e^{-|x|}$  az  $X$  folyamat stacionárius (invariáns) sűrűségfüggvénye, vagyis ilyen kezdeti eloszlásból indítva a folyamatot, eloszlása ugyanez marad!