Sztochasztikus analízis 2, házi feladat # 2

2009. november 23. Beadási határidő: december 14. Minden kérdés 10 pontos.

1. Legyen $B(t)$ Brown-mozgás a természetes filtrációjával, $B(0) = 0$, és jelölje $L(t, x)$ az x pontbeli lokális idejét. Mutassa meg, hogy
$$\mathbb{E}\left(L(t,x)|\mathcal{F}_s\right) \geq |B(s) - x| - |x| - \int_0^s \operatorname{sgn}(B(u) - x)dB(u) \qquad (0 \leq s \leq t).$$

2. Legyen $B(t)$ Brown-mozgás, $B(0) = x_0$, és jelölje $L(t, x)$ az x pontbeli lokális idejét. Legyen $\tau_y := \inf\{t \geq 0 : B(t) = y\}$, ha $y \in \mathbb{R}$. Lássa be, hogy $\mathbb{E}^0\left(L(\tau_y, 0)\right) = 2y$, ha $y \geq 0$. *(Útmutatás: Használhatja a Tanaka-formula pozitív részre vonatkozó verzióját $t \wedge \tau_y$ időre, majd várható értéket vehet, végül pedig határértéket $t \to \infty$ esetén.)* Indokolja meg, hogy ebből a Brown-mozgás szimmetria tulajdonságai miatt következik $\mathbb{E}^x\left(L(\tau_y, x)\right) = 2|y - x|$ minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

3. Legyen $B(t)$ Brown-mozgás, $B(0) = 0$, és jelölje $L_t = L(t, 0)$ a 0 pontbeli lokális idejét. Legyen $A_t := t + L_t$, ha $t \geq 0$. Ekkor A_t folytonos, adaptált és szigorúan nő. Legyen $\tau_t := \inf\{s \geq 0 : A_s > t\}$, ha $t \geq 0$: ez A_t folytonos, szigorúan növő inverze. Legyen $M(t) := B(\tau_t)$. Lássa be, hogy $M(t)$ folytonos martingál az $(\mathcal{F}_{\tau_t})_{t\geq 0}$ filtrációra nézve, és kvadratikus variációja τ_t. Mutassa meg, hogy
$$\int_0^{A_t} \mathbf{1}_{\{0\}}(M(s))ds = L_t \qquad (t \geq 0),$$
és A_t egy megállási idő minden $t \geq 0$-ra az $(\mathcal{F}_{\tau_s})_{s\geq 0}$ filtrációra nézve. Legyen
$$Y(t) := \int_0^{A_t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(M(s))dM(s).$$
Lássa be, hogy $Y(t)$ Brown-mozgás az $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtrációra nézve. *(Megjegyzés: M ún. ragadós (sticky) Brown-mozgás: pozitív Lebesgue-mértékű időt tölt az origóban, bár nem marad ott semmilyen időintervallumon.)*

4. Legyen B Brown-mozgás. Határozza meg a $|B(t)|$ folyamat kvadratikus variációját!

5. Legyen a $\mathbb{P}$ valószínűségi mérték $N(\mu_1, \sigma^2)$ és a $\mathbb{Q}$ valószínűségi mérték $N(\mu_2, \sigma^2)$ a számegyenesen. Mutassa meg, hogy e két mérték ekvivalens, és határozza meg a $\Lambda = d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$ deriváltat!

6. Legyen Y lognormális, $LN(\mu, \sigma^2)$ eloszlású, azaz $Y = e^X$, ahol X $N(\mu, \sigma^2)$ eloszlású és legyen $K > 0$. Számítsa ki az $\mathbb{E}\left(Y\mathbf{1}_{(Y>K)}\right)$ várható értéket! *Útmutatás: Transzformálja az $N(\mu, \sigma^2)$ mértéket $N(\mu + \sigma^2, \sigma^2)$ mértékbe!*

7. Legyen $X(t) = B(t) + \sin(t)$, ahol B Brown-mozgás a $\mathbb{P}$ valószínűségi mérték szerint. Adja meg azt a $\mathbb{Q}$ valószínűségi mértéket a $\Lambda = d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$ deriváltjával, amely szerint X Brown-mozgás!

8. Legyen B Brown-mozgás a $\mathbb{P}$ valószínűségi mérték szerint és $W_\mu(t) = B(t) + \mu t$. Mutassa meg, hogy
$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} W_\mu(t) \leq y | W_\mu(T) = x\right) = 1 - e^{\frac{-2y(y-x)}{T}} \qquad (x \leq y).$$
Útmutatás: Felhasználhatja a Klebaner-könyv (3.16) és (10.38) képleteit!

9. Legyen $N(t)$ j.f.b.h. Poisson-folyamat $\lambda = 1$ rátával, a természetes filtrációjával, és $\tilde{N}(t) = N(t) - t$. Legyen továbbá $H(t)$ adaptált, folytonos és korlátos folyamat. Mutassa meg, hogy $M(t) = \int_0^t H(s)d\tilde{N}(s)$ martingál, és
$$\mathcal{E}(M)(t) = \exp\left(-\int_0^t H(s)ds + \int_0^t \log(1 + H(s))dN(s)\right).$$

10. Legyen B Brown-mozgás és N $\lambda = 1$ paraméterű, B-től független Poisson-folyamat ugyanazon filtrált $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn.
    (a) Legyen $\Lambda(t) = e^{(\log 2)N(t) - t}$ $(0 \leq t \leq T)$ és $d\mathbb{Q} = \Lambda(T)d\mathbb{P}$. Mutassa meg, hogy B a $\mathbb{Q}$ szerint is Brown-mozgás.
    (b) Legyen $X(t) = B(t) + N(t)$. Adjon meg olyan ekvivalens $\mathbb{Q}$ valószínűségi mértéket, amelyre $B(t) + t$ és $N(t) - t$ is martingálok és így $X(t)$ is $\mathbb{Q}$-martingál!