Sztochasztikus analízis 2, házi feladat # 1

2009. október 3. Beadási határidő: november 2.

1. *(10 pont)* Legyen $B_1(t)$ és $B_2(t)$ két független Brown-mozgás, $(B_1(0), B_2(0)) \neq (0,0)$ kezdeti értékkel. Legyen $X(t) = \log\left(B_1^2(t) + B_2^2(t)\right)$.

   (a) Mutassa meg, hogy $X(t)$ lokális martingál!

   (b) Mutassa meg, hogy $\mathbb{E}|X(t)| < \infty$ minden $t > 0$ esetén!

   (c) Számítsa ki $\mathbb{E}X(t)$ értékét!

   (d) Mutassa meg, hogy $X(t)$ nem martingál!

   (Ez a példa azt illusztrálja, hogy egy integrálható lokális martingál nem feltétlenül martingál.)

2. *(10 pont)* Mutassa meg, hogy egy az $(\mathcal{F}_t)$ filtrációhoz adaptált $(M(t))_{t\geq 0}$ sztochasztikus folyamat akkor és csak akkor négyzetesen integrálható martingál, ha $M(t) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t)$, ahol Y véges szórású valószínűségi változó, vagyis $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$!

3. *(10 pont)* Legyen τ exponenciális eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel. Definiáljuk a következő folyamatot: $X(t) = e^{\lambda t}\mathbf{1}_{\{\tau<t\}}$ ha $t \geq 0$, a természetes filtrációjával együtt. Lássa be, hogy $X(t)$ pozitív martingál, de nem egyenletesen integrálható! Azt is mutassa meg, hogy az $X(\tau_-)$ valószínűségi változó nem integrálható!

4. *(10 pont)* Legyen $X(t)$ a $dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t)$, $X(0) = x_0$ SDE-tel definiált folyamat $0 \leq t \leq T$ esetén, ahol $\mu(t)$ és $\sigma(t)$ nem-véletlen függvények, amelyek kielégítik a szükséges integrálhatósági feltételeket. Mutassa meg, hogy $X(t)$ akkor és csak akkor lokális martingál, ha $\mu(t) = 0$ m.m. t-re!

5. *(10 pont)* Legyen $f(x,t) \in C^{2,1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Lássa be, hogy ha $X(t) = f(B(t),t)$ m.b. véges variációjú, akkor f nem függ x-től!

6. *(10 pont)* Legyen $B(t)$ Brown-mozgás és $M(t) = \int_0^t e^s dB(s)$. Adjon meg olyan nem-véletlen $g(t)$ függvényt, amellyel $M(g(t))$ szintén Brown-mozgás!

7. *(15 pont)* Legyen $0 \leq s \leq t$ és $B(t)$ Brown-mozgás. Lássa be, hogy

   (a) $\mathbb{E}\left(B^4(t)|\mathcal{F}_s\right) = 3(t-s)^2 + 6(t-s)B^2(s) + B^4(s)$;

   (b)
   $$\mathbb{E}\left(\int_0^t B^2(u)du|\mathcal{F}_s\right) = \frac{1}{2}(t-s)^2 + (t-s)B^2(s) + \int_0^s B^2(u)du.$$

   (c) Ezeket felhasználva lássa be, hogy $X(t) = B^4(t) - 6\int_0^t B^2(u)du$ martingál, és határozza meg az $[X](t)$ kvadratikus variációt és az $\langle X\rangle(t)$ kompenzátort!

8. *(10 pont)* Tegyük fel, hogy a $B(t)$ Brown-mozgás és az $M(t)$ kompenzált Poisson-folyamat függetlenek. Lássa be, hogy $X(t) = B(t)M(t)$ martingál, és határozza meg az $[X](t)$ kvadratikus variációt és az $\langle X\rangle(t)$ kompenzátort!

9. *(15 pont)* Tekintsük a következő diszkrét idejű kockázati modellt biztosításokra. A biztosítási cég tőketartaléka (surplus) az n-edik év végén $U_n = U_0 + cn - \sum_{k=1}^n X_k$ $(n \geq 1)$, ahol c az évi teljes bevétel a biztosításokból és X_k a biztosító teljes kifizetése a k-adik évben a fedezett károk miatt. A biztosító tönkremenési ideje $\tau = \min\{n : U_n < 0\}$, illetve $\tau = \infty$ ha $U_n \geq 0$ minden n-re. Tegyük fel, hogy az $(X_k)_{k=1}^\infty$ évi kifizetések független, azonos eloszlású valószínűségi változók, és van olyan $R > 0$ konstans, hogy $\mathbb{E}\left(e^{-R(c-X_1)}\right) = 1$.

   (a) Ha a biztosító kezdeti tőkéje $U_0 = x$, mutassa meg, hogy $\mathbb{P}_x(\tau \leq n) \leq e^{-Rx}$ minden n-re, sőt $\mathbb{P}_x(\tau < \infty) \leq e^{-Rx}$! *Útmutatás: Mutassa meg, hogy $M_n = e^{-RU_n}$ martingál, és alkalmazza az opcionális megállítási tételt.*

   (b) Adjon meg egy korlátot a $\mathbb{P}_x(\tau < \infty)$ tönkremenési valószínűségre, ha az X_k-k eloszlása $N(\mu,\sigma^2)$! Adja meg azt az x kezdeti tőkét, ami ahhoz kell, hogy a tönkremenés valószínűsége ne haladjon meg egy megadott $\alpha > 0$ szintet!