

## Házi feladatok #9+

1. Keresse meg az alábbi függvények összes elsőrendű parciális deriváltját!

(a)

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

(b)

$$f(\rho, \phi, \theta) = \rho \sin \phi \cos \theta$$

2. Keresse meg az  $f(x, y) = \ln(x + y)$  függvény összes másodrendű parciális deriváltját!

3. Milyen sorrendben gyorsabb kiszámítania  $f''_{xy}$  értékét: először  $x$  szerint, vagy először  $y$  szerint differenciálva?

(a)  $f(x, y) = x \sin y + e^x$

(b)  $f(x, y) = 1/x$

(c)  $f(x, y) = y + (x/y)$

(d)  $f(x, y) = y + x^2y + 4y^3 - \ln(y^2 + 1)$

(e)  $f(x, y) = x^2 + 5xy + \sin x + 7e^x$

(f)  $f(x, y) = x \ln xy$

4. Mutassa meg, hogy az  $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  függvény egy megoldása a

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Laplace-egyenletnek a  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  tartományban! (Egy ilyen  $f$  függvényt *harmonikus függvénynek* nevezünk  $D$ -ben.)

5. Mutassa meg, hogy a  $w = \sin(x + ct)$  egy megoldása az alábbi hullámeqyenletnek! Ha a vízben állunk, érezhetjük a víz fel-le mozgását, ahogy a hullámok elhaladnak mellettünk. A fizikában a periódikusan elhaladó hullámok mozgását fejezi ki az alábbi hullámeqyenlet:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

ahol  $w$  a hullám magassága,  $x$  a térbeli távolságot leíró változó,  $t$  az idő múlását leíró változó, és  $c$  a hullámok terjedési sebessége.

6. Számítsa ki a  $dw/dt$  deriváltat a lánc-szabállyal, majd határozza meg a derivált értékét a  $t = 3$  pontban!

$$w = \ln(x^2 + y^2 + z^2), \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 4\sqrt{t}.$$

7. Határozza meg a  $\partial w/\partial x$  és  $\partial w/\partial y$  parciális deriváltakat, ha  $w = g(u, v)$ ,  $u = h(x, y)$ ,  $v = k(x, y)$ .

8. *Változó feszültség egy áramkörben.* Az  $U = IR$  Ohm-törvény által leírt egyszerű áramkörben a feszültség lassan csökken, ahogy az elem kimerül. Egyidejűleg az ellenállás növekszik, ahogy az ellenállás melegszik. A lánc-szabály segítségével keresse meg, hogyan változik az áramerősség, ha  $R = 600 \Omega$ ,  $I = 0.04 \text{ A}$ ,  $dR/dt = 0.5 \Omega/\text{s}$ , and  $dU/dt = -0.01 \text{ V/s}$ .

9. Legyen  $f(0, 0) = 0$  és

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad \text{ha} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Mutassa meg, hogy  $\mathbb{R}^2$  minden pontjában léteznek a  $\partial f/\partial x$  és  $\partial f/\partial y$  parciális deriváltak, de  $f$  mégsem folytonos a  $(0, 0)$  pontban!

10. Legyen  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ . Keresse meg  $\nabla f = \text{grad} f$  értékét a  $P_0(1, 1)$  pontban! Rajzolja fel a  $\nabla f$  vektort és  $f$ -nek a  $P_0$  ponton áthaladó szintgörbéjét!

11. Keresse meg az  $f(x, y, z) = 3e^x \cos yz$  függvény  $P_0(0, 0, 0)$  pontbeli, az  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$  vektor irányában vett deriváltját!

12. Körülbelül mennyivel változik meg az  $f(x, y, z) = 3e^x \cos yz$  függvény értéke, ha az origóból  $ds = 0.1$  egységnyi távolságra elmozdulunk a  $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$  vektor irányában?

13. Milyen irányokban zérus az  $f(x, y) = xy + y^2$  függvény deriváltja a  $(3, 2)$  pontban?

14. Tegyük fel, hogy az  $f(x, y, z)$  függvény deriváltja egy adott  $P$  pontban az  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$  vektor irányában a legnagyobb; ebben az irányban az értéke  $2\sqrt{3}$ .

(a) Határozza meg  $\nabla f$ -et a  $P$  pontban!

(b) Határozza meg  $f$  deriváltját a  $P$  pontban az  $\mathbf{i} + \mathbf{j}$  irányában!

15. Határozza meg a függvények gradiensét, ha  $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ !

(a)  $f(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}| \quad (\mathbf{r} \neq \mathbf{0})$

(b)  $f(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r}|} \quad (\mathbf{r} \neq \mathbf{0})$

16. Az implicit függvény tétellel mutassa meg, hogy az

$$xe^y + \sin xy + y - \ln 2 = 0$$

egyenlet  $y$ -t az  $x$  differenciálható függvényeként definiálja lokálisan, az  $(x_0, y_0) = (0, \ln 2)$  pont egy környezetében! Keresse meg a  $dy/dx$  deriváltat ebben a pontban!

17. Az előző feladat módszere általánosítható három és több független változóra is. A háromváltozós általánosítás a következő. Az  $F(x, y, z) = 0$  egyenlet a  $z$ -t az  $x$  és  $y$  változók differenciálható függvényeként definiálja lokálisan, egy olyan  $(x_0, y_0, z_0)$  pont környezetében, amelyre  $F'_z \neq 0$ , és

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \text{and,} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Ennek alapján határozza meg  $\partial z/\partial x$  és  $\partial z/\partial y$  értékét az  $(1, \ln 2, \ln 3)$  pontban az

$$xe^y + ye^z + 2 \ln x - 2 - 3 \ln 2 = 0.$$

egyenlet alapján!

18. Keresse meg az alábbi felületek érintősíkjának egyenletét a megadott pontban!

(a)  $z = \ln(x^2 + y^2)$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 0)$

(b)  $\cos \pi x - x^2 y + e^{xz} + yz = 4$ ,  $P_0(0, 1, 2)$

Útmutatás (b)-hez: A  $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \text{grad} f(x_0, y_0, z_0)$  vektor merőleges az  $f(x, y, z) = c$  szintfelület érintősíkjára a  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  pontban, ha  $c = f(x_0, y_0, z_0)$ .

19. Keresse meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely érinti az alábbi két felület metszésgörbét az  $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)$  pontban:  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x^2 + y^2 - z = 0$ . (Készítsen rajzot is!)

20. Mutassa meg, hogy az  $\mathbf{r} = \sqrt{t}\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j} + (2t - 1)\mathbf{k}$  görbe érinti a  $x^2 + y^2 - z = 1$  felületet a  $t = 1$  paraméterű pontjában! (Vagyis a görbe a felület adott pontbeli érintősíkjában fekszik.)

21. (a) Keresse meg az alábbi  $f$  függvény linearizálását (= standard lineáris közelítését = elsőfokú kétváltozós Taylor-polinomját) az adott  $P_0$  középpont körül! Adja meg a közelítés hibájának egy felső korlátját is az adott  $T$  téglalapon!

$$f(x, y) = e^x \cos y, \quad P_0(0, 0), \quad T = \{(x, y) : |x| \leq 0.1, \quad |y| \leq 0.1\}$$

(b) Keresse meg az  $f$  másodfokú kétváltozós Taylor-polinomját is a  $P_0$  pontban!

22. *Ingadozás az elektromos ellenállásban* A párhuzamosan kapcsolt  $R_1$  és  $R_2$  ellenállások eredő  $R$  ellenállása, mint jól ismert, megkapható a következő egyenletből:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

(a) Mutassa meg, hogy

$$dR = \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 dR_1 + \left(\frac{R}{R_2}\right)^2 dR_2.$$

(b) Egy áramkörben a párhuzamosan kapcsolt  $R_1 = 100$  Ohm és  $R_2 = 400$  Ohm ellenállások értékei gyártási okok miatt nem pontosak. Az eredő  $R$  ellenállás az  $R_1$  vagy az  $R_2$  hibájára lesz érzékenyebb?

23. Ha  $|a|$  sokkal nagyobb, mint  $|b|$ ,  $|c|$  és  $|d|$ , az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  és  $d$  értékek közül melyiknek a hibájára lesz az

$$f(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

determináns a legérzékenyebb?

24. Keresse meg az alábbi függvények lokális maximumait, minimumait és nyeregpontjait!
- (a)  $f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$
- (b)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 8$
- (c)  $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$
25. Keresse meg az  $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$  függvény maximumát és minimumát a  $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq 2\}$  zárt háromszöglapon!
26. Egy lapos körlap alakú tányér alakját a  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$  egyenlet írja le. A tányért melegítjük úgy, hogy bármely  $(x, y)$  pontban a hőmérséklet értéke  $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$  lesz. Ábrázolja a hőmérséklet néhány szintgörbéjét  $D$ -ben (az ún. izotermákat). Keresse meg a tányér legforróbb és leghidegebb pontját!
27. Egy erőtér potenciálja  $u(x, y) = xy + 2x - \ln x^2 y$  a  $D = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$  nyílt első síknegyedben. Mutassa meg, hogy a potenciálnak egyetlen minimum-pontja van és nincs maximum-pontja  $D$ -ben,  $+\infty$ -hez tart, amint  $x \rightarrow 0+$  vagy  $y \rightarrow 0+$  vagy  $x \rightarrow +\infty$  vagy  $y \rightarrow +\infty$ !
28. Keresse meg az  $f(x, y) = xy$  függvény maximumát és minimumát az  $x^2 + 4y^2 = 8$  görbén! Rajzolja fel a görbét és a függvény néhány szintgörbéjét!
29. Egy űrszonda, amelynek alakját az  $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$  ellipszoid írja le, visszatér a földi légkörbe és a felülete melegedni kezd. Egy óra után a hőmérséklet a felület egy tetszőleges  $(x, y, z)$  koordinátájú pontjában  $T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$ . Keresse meg a szonda felületének legforróbb pontját! (Útmutatás: Felhasználhatja a Lagrange-multiplikátoros módszer háromváltozós esetét.)