Házi feladatok $\sharp 1+$

1. Keresse meg p azon értékeit, amelyekre az alábbi improprius integrál konvergens!
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$$

2. Döntse el, hogy az alábbi improprius integrálok konvergensek vagy divergensek! (Nem kell kiszámítania a konvergensek értékét.)

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+e^x}$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$ (e) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx$

(f) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}\, dx$ (g) $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{2+\cos x}{x}\, dx$ (h) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$

3. Becsülje meg a $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$ improprius integrál értékét! Útmutatás: Használja a trapéz- vagy Simpson-formulát $n = 6$ esetén az $\int_0^3 e^{-x^2}\, dx$ integrálra és mutassa meg, hogy
$$0 < \int_3^\infty e^{-x^2}\, dx < \int_3^\infty e^{-3x}\, dx < 10^{-4}.$$

4. Keresse meg p azon értékeit, amelyekre az alábbi improprius integrál konvergens!
$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p}$$

5. Döntse el, hogy az alábbi végtelen sorok közül melyik konvergens és melyik divergens! Számítsa ki a konvergens sorok összegét!

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \cos n\pi$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (-1)^n n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{2^n-1}{3^n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (-1)^n x^n, |x| < 1;$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (-1)^n x^{2n}, |x| < 1.$

6. Használjon részlet-törtekre bontást, hogy zárt alakba írhassa a sor n-ik részletösszegét, és ebből határozza meg a végtelen sor összegét!

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

7. Mutassa meg, hogy ha $\sum a_n$ konvergál, és $a_n \neq 0$ semelyik n-re, akkor $\sum(1/a_n)$ divergál!

8. Integrál teszt segítségével vizsgálja meg a

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \qquad \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

sorok konvergenciáját rögzített p esetén.

9. Döntse el, mely sorok konvergensek és melyek divergensek!

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2} \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} \quad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$\text{(e)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n} \quad \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!} \quad \text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{(h)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \quad \text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \quad \text{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$$

10. Vizsgálja meg a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciáját, ha

    (a) $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$ $(n \geq 1)$;

    (b) $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = \frac{1+\ln n}{n} a_n$ $(n \geq 1)$;

    (c) $a_n = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}$ $(n \geq 1)$.

11. Vizsgálja meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$$

sor konvergenciáját (a) rögzített valós x esetén; (b) rögzített komplex x esetén.

12. Mutassa meg, hogy ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ konvergensek, $a_n \geq 0$ és $b_n \geq 0$ minden n-re, akkor $\sum a_n b_n$ szintén konvergens!

13. *(Cauchy-féle kondenzációs teszt)*
Legyen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pozitív, 0-hoz tartó, csökkenő számsorozat. Ebben az esetben $\sum a_n$ akkor és csak akkor konvergál, ha $\sum 2^n a_{2^n}$ konvergál. (A bizonyítást l. Rudin 3.27. Tételben.) Oldjuk meg e teszt segítségével is az 1. feladatot!

14. Mely sorok abszolút konvergensek, melyek feltételesen konvergensek és melyek divergensek?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\ln n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{n^2+1}$

15. Tekintsük az alábbi alternáló sort.

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}+\cdots$$

Mutassa meg, hogy a sor divergens. Ellentmond ez a Leibniz-sorokról szóló tételnek?

16. Tekintsük az alábbi alternáló sort.

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{27}-\frac{1}{8}+\frac{1}{81}-\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{2^n}+\cdots$$

Mutassa meg, hogy ez nem Leibniz-sor, de mégis (abszolút) konvergens. Ellentmond ez a Leibniz-sorokról szóló tételnek? Számítsa ki a sor összegét!

17. Közelítse a $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}$ sor összegét 10^{-4}-nél kisebb hibával!

18. Igazolja, hogy ha $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ és $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ konvergál, akkor $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ szintén konvergál.

19. Igaz vagy hamis? Ha $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ szintén konvergens. Mi a válasza, ha azt is feltesszük, hogy $a_n\geq 0$ minden n-re?