

Házi feladatok #9

1. Keresse meg az alábbi függvények összes elsőrendű parciális deriváltját!

(a)

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

(b)

$$f(\rho, \phi, \theta) = \rho \sin \phi \cos \theta$$

2. Keresse meg az $f(x, y) = \ln(x + y)$ függvény összes másodrendű parciális deriváltját!

3. Milyen sorrendben gyorsabb kiszámítania f''_{xy} értékét: először x szerint, vagy először y szerint differenciálva?

(a) $f(x, y) = x \sin y + e^x$

(b) $f(x, y) = 1/x$

(c) $f(x, y) = y + (x/y)$

(d) $f(x, y) = y + x^2y + 4y^3 - \ln(y^2 + 1)$

4. Mutassa meg, hogy az $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ függvény egy megoldása a

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Laplace-egyenletnek a $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tartományban! (Egy ilyen f függvényt *harmonikus függvénynek* nevezünk D -ben.)

5. Mutassa meg, hogy a $w = \sin(x + ct)$ egy megoldása az alábbi hullámegyenletnek! Ha a vízben állunk, érezhetjük a víz fel-le mozgását, ahogy a hullámok elhaladnak mellettünk. A fizikában a periódikusan elhaladó hullámok mozgását fejezi ki az alábbi hullámegyenlet:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

ahol w a hullám magassága, x a térbeli távolságot leíró változó, t az idő múlását leíró változó, és c a hullámok terjedési sebessége.

6. Számítsa ki a dw/dt deriváltat a lánc-szabállyal, majd határozza meg a derivált értékét a $t = 3$ pontban!

$$w = \ln(x^2 + y^2 + z^2), \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 4\sqrt{t}.$$

7. *Változó feszültség egy áramkörben.* Az $U = IR$ Ohm-törvény által leírt egyszerű áramkörben a feszültség lassan csökken, ahogy az elem kimerül. Egyidejűleg az ellenállás növekszik, ahogy az ellenállás melegszik. A lánc-szabály segítségével keresse meg, hogyan változik az áramerősség, ha $R = 600 \Omega$, $I = 0.04 \text{ A}$, $dR/dt = 0.5 \Omega/\text{s}$, and $dU/dt = -0.01 \text{ V/s}$.

8. Legyen $f(0, 0) = 0$ és

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad \text{ha} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Mutassa meg, hogy \mathbb{R}^2 minden pontjában léteznek a $\partial f/\partial x$ és $\partial f/\partial y$ parciális deriváltak, de f mégsem folytonos a $(0, 0)$ pontban!

9. Legyen $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$. Keresse meg $\nabla f = \text{grad} f$ értékét a $P_0(1, 1)$ pontban! Rajzolja fel a ∇f vektort és f -nek a P_0 ponton áthaladó szintgörbéjét!

10. Keresse meg az $f(x, y) = 3e^x \cos y$ függvény $P_0(0, 0)$ pontbeli, az $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ vektor irányában vett deriváltját!

11. Milyen irányokban zérus az $f(x, y) = xy + y^2$ függvény deriváltja a $(3, 2)$ pontban?

12. Határozza meg a függvények gradiensét, ha $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$!

(a) $f(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}| \quad (\mathbf{r} \neq \mathbf{0})$

(b) $f(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r}|} \quad (\mathbf{r} \neq \mathbf{0})$

13. Keresse meg az alábbi felületek érintősíkjának egyenletét a megadott pontban!

(a) $z = \ln(x^2 + y^2), \quad (x_0, y_0) = (1, 0)$

(b) $\cos \pi x - x^2 y + e^{xz} + yz = 4, \quad P_0(0, 1, 2)$

Útmutatás (b)-hez: A $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \text{grad} f(x_0, y_0, z_0)$ vektor merőleges az $f(x, y, z) = c$ szintfelület érintősíkjára a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pontban, ha $c = f(x_0, y_0, z_0)$.

14. (a) Keresse meg az alábbi f függvény linearizálását (= standard lineáris közelítését = elsőfokú kétváltozós Taylor-polinomját) az adott P_0 középpont körül! Adja meg a közelítés hibájának egy felső korlátját is az adott T téglalapon!

$$f(x, y) = e^x \cos y, \quad P_0(0, 0), \quad T = \{(x, y) : |x| \leq 0.1, \quad |y| \leq 0.1\}$$

(b) Keresse meg az f másodfokú kétváltozós Taylor-polinomját is a P_0 pontban!

15. *Ingadozás az elektromos ellenállásban* A párhuzamosan kapcsolt R_1 és R_2 ellenállások eredő R ellenállása, mint jól ismert, megkapható a következő egyenletből:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

(a) Mutassa meg, hogy

$$dR = \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 dR_1 + \left(\frac{R}{R_2}\right)^2 dR_2.$$

(b) Egy áramkörben a párhuzamosan kapcsolt $R_1 = 100$ Ohm és $R_2 = 400$ Ohm ellenállások értékei gyártási okok miatt nem pontosak. Az eredő R ellenállás az R_1 vagy az R_2 hibájára lesz érzékenyebb?

16. Ha $|a|$ sokkal nagyobb, mint $|b|$, $|c|$ és $|d|$, az a , b , c és d értékek közül melyiknek a hibájára lesz az

$$f(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

determináns a legérzékenyebb?

17. Keresse meg az alábbi függvények lokális maximumait, minimumait és nyeregpontjait!

(a) $f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$

(b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 8$

(c) $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$

18. Keresse meg az $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ függvény maximumát és minimumát a $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq 2\}$ zárt háromszöglapon!

19. Egy lapos körlap alakú tányér alakját a $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ egyenlet írja le. A tányért melegítjük úgy, hogy bármely (x, y) pontban a hőmérséklet értéke $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ lesz. Ábrázolja a hőmérséklet néhány szintgörbét D -ben (az ún. izotermákat). Keresse meg a tányér legforróbb és leghidegebb pontját!

20. Keresse meg az $f(x, y) = xy$ függvény maximumát és minimumát az $x^2 + 4y^2 = 8$ görbén! Rajzolja fel a görbét és a függvény néhány szintgörbét!