

Házi feladatok #1

1. Keresse meg p azon értékeit, amelyekre az alábbi improprius integrál konvergens!

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$

2. Döntse el, hogy az alábbi improprius integrálok konvergensek vagy divergenssek! (Nem kell kiszámítani a konvergens értéket.)

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+e^x} \quad (b) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad (c) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$$

$$(d) \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx \quad (e) \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2} dx \quad (f) \int_{\pi}^{\infty} \frac{2+\cos x}{x} dx$$

3. Becsülje meg a $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ improprius integrál értékét! Útmutatás: Használja a trapéz- vagy Simpson-formulát $n = 6$ esetén az $\int_0^3 e^{-x^2} dx$ integrálra és mutassa meg, hogy

$$0 < \int_3^{\infty} e^{-x^2} dx < \int_3^{\infty} e^{-3x} dx < 10^{-4}.$$

4. Keresse meg p azon értékeit, amelyekre az alábbi improprius integrál konvergens!

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$$

5. Döntse el, hogy az alábbi végtelen sorok közül melyik konvergens és melyik divergens! Számítsa ki a konvergens sorok összegét!

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\pi \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n}$$
$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n, |x| < 1; \quad (g) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, |x| < 1.$$

6. Használjon részlet-törtekre bontást, hogy zárt alakba írhasa a sor n -ik részletösszegét, és ebből határozza meg a végtelen sor összegét!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

7. Mutassa meg, hogy ha $\sum a_n$ konvergál, és $a_n \neq 0$ semelyik n -re, akkor $\sum(1/a_n)$ divergál!
8. Integrál teszt segítségével vizsgálja meg a

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

sorok konvergenciáját rögzített p esetén.

9. Döntse el, mely sorok konvergensek és melyek divergensek!

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{n^2} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$(e) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n} \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!} \quad (g) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^n \quad (i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} \quad (j) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$

10. Mely sorok abszolút konvergensek, melyek feltételesen konvergensek és melyek divergensek?

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}+1}{n+1} \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \ln n} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{n^2+1}$$

11. Tekintsük az alábbi alternáló sort.

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2^n} + \dots$$

Mutassa meg, hogy a sor divergens. Ellentmond ez a Leibniz-sorokról szóló tételnek?

12. Közelítse a $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$ sor összegét 10^{-4} -nél kisebb hibával!
13. Igaz vagy hamis? Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ szintén konvergens. Mi a válasza, ha azt is feltesszük, hogy $a_n \geq 0$ minden n -re?