Matematika A4
IX. gyakorlat

Szabados Tamás kurzusa

2009. november 11-12.

1. Ha $\mathbb{E}(X) = 1$ és $\mathbb{D}^2(X) = 5$, határozzuk meg

   (a) $\mathbb{E}[(2+X)^2]$,

   (b) $\mathbb{D}^2(4+3X)$

   értékét.

2. Legyenek $X_1,\, X_2,\, \dots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással. Határozzuk meg

$$Y_n := \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma} = \frac{\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

   várható értékét és szórását.

3. Egy kisváros négyzet alakú, a négyzet oldalai 3 kilométer hosszúak. A város $(0,\, 0)$ középpontjában van a kórház, és a város utcái négyzetháló szerűek. Ezért ha a város $(x,\, y)$ pontján történik egy baleset, a mentőnek $|x| + |y|$ távolságot kell megtennie a balesettől a kórházig. Ha egy baleset a városon belül egyenletes eloszlású helyen következik be, számoljuk ki a betegszállítás várható hosszát.

4. Legyenek X és Y független és azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással. Számoljuk ki az $\mathbb{E}[(X-Y)^2]$ értékét.

5. A zsebemben levő 5, 10, 20, 50 és 100 forintos érmék száma független Poisson(λ) eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg aprópénzem értékének várható értékét és szórását.

6. X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,\, y) = \begin{cases} 60xy^2 & \text{, ha } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x, \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

   Határozzuk meg a kovarianciájukat.

7. X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,\, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} 2\mathrm{e}^{-2x} & \text{, ha } 0 < x < \infty,\ 0 \le y \le x, \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

   Határozzuk meg a kovarianciájukat.

8. X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,\, y) = \begin{cases} \frac{1}{y}\, \mathrm{e}^{-(y+x/y)} & \text{, ha } x > 0,\ y > 0, \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

   Határozzuk meg $\mathbb{E}(X)$ és $\mathbb{E}(Y)$ értékét, valamint mutassuk meg, hogy $\mathbf{Cov}(X,\, Y) = 1$.

9. Legyen X az a szám, ahányszor 1-est látunk, Y az a szám, ahányszor 2-est látunk ha n-szer dobunk egy szabályos kockával. Számoljuk ki e két valószínűségi változó korrelációs együtthatóját.

10. Egy dobókockát kétszer feldobunk. Legyen X a dobások összege, és Y az első dobás mínusz a második dobás. Számoljuk ki $\mathbf{Cov}(X, Y)$-t. Függetlenek-e X és Y?

11. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással, és legyen $Y_n = X_n + X_{n+1} + X_{n+2}$. Határozzuk meg $\mathbf{Cov}(Y_n, Y_{n+j})$ értékét minden $j \geq 0$-ra.

12. Ha X_1, X_2, X_3, X_4 páronként korrelálatlan valószínűségi változók 0 várható értékkel és 1 szórással, számoljuk ki

    (a) $X_1 + X_2$ és $X_2 + X_3$;

    (b) $X_1 + X_2$ és $X_3 + X_4$

    korrelációs együtthatóját.

13. Bizonyos kaszinókban a következő kockajátékot játszák: az A játékos dob egy kockával, azután a B játékos is dob egy kockával. Ezt követően a Bank is dob egy kockával, és az a játékos nyer, akinek a dobása magasabb volt a Bank dobásánál (mindkét játékos is nyerhet egyszerre). Legyen

$$X := \begin{cases} 1 & \text{, ha } A \text{ nyer,} \\ 0 & \text{, egyébként,} \end{cases} \qquad Y := \begin{cases} 1 & \text{, ha } B \text{ nyer,} \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

    Mutassuk meg, hogy X és Y pozitívan korreláltak. Magyarázzuk meg szóban is ezt az eredményt.

14. Egy *gráf csúcsok*ból, és a csúcsokat összekötő *élek*ből áll. Tekintsünk egy gráfot, melynek n csúcsát 1-től n-ig megszámoztuk, és tegyük fel, hogy mind az $\binom{n}{2}$ csúcspár között egymástól függetlenül van él p valószínűséggel, és nincs él $1-p$ valószínűséggel. Az i csúcs D_i *fokszáma* az i csúcsból kiinduló élek száma.

    (a) Mi a D_i véletlen szám eloszlása?

    (b) Határozzuk meg a D_i és D_j változók $\varrho(D_i, D_j)$ korrelációs együtthatóját. (Tipp: definiáljuk X_i-t mint az i-ből induló, de nem j-be érkező élek számát, és I_{ij}-t mint az i és j közötti él meglétének indikátorát. Fejezzük ki D_i-t és D_j-t az X_i, X_j, és I_{ij} változókkal, ezután számoljunk korrelációt.)

15. Legyenek X és Y független valószínűségi változók közös μ várható értékkel, de különböző σ_X és σ_Y szórásokkal. μ értékét nem tudjuk, és egy mintavétel alapján az X és Y súlyozott átlagával szeretnénk becsülni. Azaz: μ értékére a $\lambda X + (1-\lambda)Y$ becslést fogjuk adni, valamilyen λ paraméterrel. Hogyan válasszuk λ-t, hogy a becslésünk szórása minimális legyen? Miért érdemes ezt a λ-t használnunk?

16. Ha $Y = aX + b$, mutassuk meg, hogy $\varrho(X, Y) = +1$; ha $a > 0$, $\varrho(X, Y) = -1$, ha $a < 0$.

17. Ha Z standard normális eloszlású, akkor mennyi $\mathbf{Cov}(Z, Z^2)$?

18. Legyen Z standard normális eloszlású, és $Y = a + bZ + cZ^2$. Mutassuk meg, hogy $\varrho(Y, Z) = \frac{b}{\sqrt{b^2+2c^2}}$.

19. Egy szabályos érmével dobunk háromszor. Jelölje X illetve Y a dobott fejek illetve írások számát. Számoljuk ki a $Z := XY$ valószínűségi változó várható értékét és szórását.

20. Legyen X standard normális eloszlású, és I az X-től független, $\mathbb{P}(I = 1) = \mathbb{P}(I = -1) = 1/2$ eloszlással. Definiáljuk a következő valószínűségi változót: $Y = I \cdot X$. Azaz: Y az X-től függetlenül egyenlő eséllyel lesz X vagy $-X$.

    (a) Független-e X és Y?

    (b) Független-e I és Y?

    (c) Mutassuk meg, hogy Y standard normális eloszlású.

    (d) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$.

Házi feladatok: 2, 4, 6, 10, 16, 19