Matematika A4
I. gyakorlat

Szabados Tamás kurzusa

2009. szeptember 9-10.

1. Bevezető kérdések

1. Négyszer dobunk érmével és megfigyeljük mindegyik érmén, hogy melyik oldal van felül. Írjuk fel az eseményteret!
2. Addig dobunk érmével, amíg másodszorra fejet nem kapunk. Írjuk fel az eseményteret!
3. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy piros és egy zöld kockával két 2-est dobok? És ugyanez két zölddel?
4. Mi a valószínűsége annak, hogy 10 dobásból legalább egy 6-os?

2. Kombinatorikus módszer

	ismétlés nélküli	ismétléses
permutáció	$n!$ n futó beérkezésének sorrendje	$\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_r!}$ n golyót ennyiféleképpen állíthatunk sorba, ha $k_1, k_2, \dots k_r$ db külön-külön egyszínű
variáció	$\frac{n!}{(n-k)!}$ n futó beérkezésének sorrendje ha csak az első k helyet tekintjük	l^k l darab betűből készíthető k hosszú szavak száma
kombináció	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ n golyóból kiválasztunk k darabot és nem számít a kiválasztás sorrendje	$\binom{k+l-1}{l}$ k féle sütiből (sok van belőlük) hazaviszünk l-et, ennyiféleképpen tehetjük meg

5. A hét törpe minden este más sorrendben szeretne sorba állni, amikor Hófehérke a vacsorát osztja. Hányféleképpen tehetik ezt meg?
6. Hányféle sorrendben rakhatók ki a MATEMATIKA szó betűi?
7. Egy versenyen 5-en indulnak, az újságok az első három helyezett nevét közlik. Hányféle lehet ez a lista? (Közlik a helyezést is.)
8. Egy fagyizóban 5 féle fagylalt kapható: vanília, csoki, málna, pisztácia és citrom. Hányféleképpen vehetünk 2 gombócot, ha számít a gombócok sorrendje is, és lehet egyfajtából többet is venni?
9. Van 6 lányismerősöm, és kettőt el akarok hívni moziba. Hányféleképpen tehetem ezt meg?
10. 3 új tanárt és egy titkárnőt akarnak felvenni egy iskolában. 6 tanár- és 3 titkárnő-jelölt van. Hányféleképpen kerülhetnek ki közülük az iskola új dolgozói?
11. Egy számkombinációs zárat 3 db különböző, 1 és 10 közötti szám begépelésével lehet kinyitni, de tudjuk, hogy a számok növekvő sorrendben vannak. Hány ilyen kombináció van?

3. Valószínűség

Elvégzünk egy kísérletet, például feldobunk egy kockát, amelynek lehetséges eredményeit (adott esetben 1, 2, 3, 4, 5, 6 eseteket) **kimenetelek**nek nevezzük. A kimenetelek összességét egy **eseménytér**rel (egy matematikai halmazzal) modellezzük. A kimeneteleket mi választjuk meg. Megtehetjük azt is, hogy azt a két lehetőséget nézzük, hogy hatost dobtunk-e, vagy sem. Ilyenkor két kimenetel van: hatos, vagy nem hatos, és az eseménytér egy kételemű halmaz. Kockadobásnál 6 kimenetel van: $1, 2, 3, 4, 5, 6$, az eseménytér az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. **Események**nek nevezzük az eseménytér részhalmazait.

(*Megjegyzés:* A kimeneteleket, vagy azok egy függvényét valószínűségi változónak nevezzük, például X = "kockadobásnál a fölül látható szám" egy *valószínűségi változó*. Ezekről később még sok szó lesz. Ha a dobott számok $Y = X^2$ négyzetét tekintjük, akkor az $1 \to 1, 2 \to 4, 3 \to 9, 4 \to 16, 5 \to 25, 6 \to 36$ függvényre is gondolhatunk, amely az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ eseménytéren értelmezett. De tekinthetjük egyből az $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$ eseményteret is, ezt mi dönthetjük el.)

Egy kísérletsorozatban az egyes eseményekhez tartozó relatív gyakoriságok a kísérletek számának növelésével bizonyos értékek körül "ingadoznak" (a kísérletszám növelésével konvergálnak egy-egy elméleti értékhez), ezt az értéket nevezzük az adott esemény (tapasztalati) **valószínűség**ének. A valószínűség pontos matematikai fogalmát a Kolmogorov-féle axiómák írják le.

A valószínűségszámítás legegyszerűbb modellje az, amikor *véges sok, egyformán valószínű kimenetel van*. Ekkor egy adott A esemény valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\textit{kedvező kimenetelek száma}}{\textit{az összes kimenetelek száma}}.$$

Ennél valamivel általánosabb az ún. *diszkrét eseménytér*, amikor véges sok, vagy megszámlálhatóan végtelen sok ω_k kimenetel van. Ekkor egy adott A esemény valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_k \in A} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \sum_{\omega_k \in A} p_k.$$

12. Feldobunk egy érmét kétszer egymásután. Mi a valószínűsége, hogy dobunk fejet? És hogy pontosan 1 db fejet dobunk?

13. Egy csomag magyar kártyából kiveszünk egy lapot, megnézzük a színét, majd visszatesszük. Megkeverjük a paklit, majd megint választunk egy lapot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két lap színe különböző?

14. Mi a valószínűsége annak, hogy két darab (szabályos) kocka feldobásakor legalább az egyik 6-os lesz? És annak a valószínűsége, hogy egyik sem lesz 6-os?

15. Mi a valószínűsége annak, hogy egy háromgyermekes családban a gyerekek mind egyneműek, ha a lányok és a fiúk születési valószínűsége egyaránt $\frac{1}{2}$?

16. Legalább hány szabályos pénzdarabot kell feldobni ahhoz, hogy 90%-nál nagyobb legyen az esély arra, hogy legyen köztük fej?

17. Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy polcon 7 db könyvet véletlenszerűen sorba rakunk, akkor egy köztük lévő trilógia kötetei egymás mellé kerülnek?

18. Hatszor dobunk egy szabályos dobókockával. Mi a valószínűsége annak, hogy mind a hat szám előjön?

19. A brazil labdarúgó válogatott edzésének megkezdése előtt, az edzésen résztvevő 22 játékost két csoportba osztják. Mi annak a valószínűsége, ha találomra történik a szétosztás a két 11-es csoportba, hogy Ronaldo és Ronaldinho egymás ellen játszik?

20. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ötös lottón (90-ből 5 számot húznak, sorrend nem számít) pontosan két találatunk lesz? És hogy legalább két találatunk lesz?

21. Egy dobozban 6 zöld és 4 sárga golyó van. Kihúzunk (visszatevés nélkül) 4 golyót csukott szemmel, mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két zöld golyót húztunk ki?

22. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 23 fős társaságban van legalább két olyan ember, akiknek a születésnapja ugyanarra a napra esik (tegyük fel, hogy az emberek az év 365 napján egyforma eséllyel születnek)?

4. További feladatok

23. Először kiválasztunk egyet az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek közül, majd a maradékból egy másodikat (pl. egy cédulára felírjuk őket és kettőt kihúzunk visszatevés nélkül). Írja fel az eseményteret! Tegyük fel, hogy minden kimenetel egyformán valószínű. Adja meg annak a valószínűségét, hogy (a) elsőre páratlan számot húzunk (b) másodikra páratlan számot húzunk (c) mindkétszer páratlan számot húzunk! Írja fel a szóbanforgó eseményeket, mind kimenetelek részhalmazát!

24. Addig dobálunk fel egy szabályos érmét, amíg az első fej kijön. Írja fel az eseményteret, amelyben a kimenetelek a I (írás) és F (fej) betűk véges ill. végtelen sorozatai! Tegyük fel, hogy egy k betűből álló kimenetel valószínűsége $1/2^k$.

    (a) Mutassa meg, hogy a véges hosszúságú sorozatok valószínűségei összesen egyet adnak, így a végtelen hosszú kimenetel (hogy mindig írást dobunk) valószínűsége zérus, bár ez a kimenetel is lehetséges!

    (b) Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb három dobás elegendő a fejhez?

    (c) Mutassa meg, hogy $1/2^k$ a valószínűsége, hogy a dobás-sorozat nem ér véget a k-adik dobásig bezárólag, vagyis nem dobunk fejet az első k dobásban.

25. Három egyformán erős játékos: A, B és C játszik páros mérkőzéseket. Elsőként A és B játszik, majd a győztes játszik C-vel, és így tovább, mindaddig, amíg valaki kétszer egymás után nyer és így megnyeri az egész meccset. (A döntetlen lehetőségét kizárjuk.) Írja fel az eseményteret, amelyben a kimenetelek a mérkőzések győzteseit megadó betűk véges ill. végtelen sorozatai! Tegyük fel, hogy bármely mérkőzést bármely játékos $1/2$ valószínűséggel nyer meg, és egy k betűből álló kimenetel valószínűsége $1/2^k$.

    (a) Mutassa meg, hogy a véges hosszúságú sorozatok valószínűségei összesen egyet adnak, így a végtelen hosszú kimenetelek valószínűsége zérus (bár ezek a kimenetelek is lehetségesek)!

    (b) Mutassa meg, hogy A, ill. B $5/14$ valószínűséggel nyeri meg a meccset, míg C győzelme $4/14$ valószínű!

    (c) Mutassa meg, hogy $1/2^{k-1}$ a valószínűsége, hogy a meccs nem ér véget a k-adik mérkőzésig bezárólag.

26. Feldobunk két szabályos kockát. Legyen A az az esemény, hogy a dobott számok összege páratlan, B az az esemény, hogy legalább egy hatost dobtunk. Írja fel az $A \cap B$, $A \cup B$, és $A \cap \bar{B}$ eseményeket mint kimenetelek részhalmazát! Számítsa ki a valószínűségüket!

27. Egyszerűsítse le az alábbi kifejezéseket: (a) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$, (b) $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$, (c) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

28. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik helyes, melyik helytelen: (a) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$, (b) $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$, (c) $A \cup B \cup C = A \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (C \setminus (A \cap C))$, (d) $A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup B$, (e) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) \supset A \cap B \cap C$, (f) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) \subset A \cup B \cup C$, (g) $(A \cup B) \setminus A = B$, (h) $A \cap \bar{B} \cap C \subset A \cup B$, (i) $\overline{(A \cup B \cup C)} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$, (j) $\overline{(A \cup B)} \cap C = (\bar{A} \cap C) \cup (\bar{B} \cap C)$, (k) $\overline{(A \cup B)} \cap C = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C$, (l) $\overline{(A \cup B)} \cap C = C \setminus (C \cap (A \cup B))$.

29. Legyen A, B és C három tetszőleges esemény. Keressen olyan halmazalgebrai kifejezéseket, amelyek pontosan a következő eseményeket adják meg: (a) csak A következik be, (b) A és B bekövetkezik, de C nem (c) mindhárom esemény bekövetkezik, (d) legalább egyikük bekövetkezik, (e) legalább kettő bekövetkezik, (f) pontosan egyikük következik be, (g) pontosan kettő következik be, (h) egyik sem következik be, (i) legfeljebb kettő következik be.

Házi feladatok: 16, 18, 21, 23, 26, 27.