

Matematika A1, aláírás pótlás
 2007. 12. 12., építőmérnöki BSc szak

Név:
 Neptun kód:

Munkaidő: 100 perc

Adjon rövid válaszokat az alábbi hat elméleti kérdésre ezen a feladatlapon!

elm/1 (3 pont) Írja le de Moivre tételét egy z komplex szám n -edik hatványának kiszámítására:

elm/2 (3 pont) Definiálja a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ határértéket:

elm/3 (3 pont) Definiálja, hogy mikor differenciálható egy f függvény egy x_0 pontban:

elm/4 (3 pont) Adjon meg egy olyan feltételt az f függvényre, amelyből következik, hogy f integrálható $[a, b]$ -n:

elm/5 (3 pont) Írja le a Newton–Leibniz-tétel 1. részét az $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ függvénnyel kapcsolatban:

elm/6 (3 pont) Definiálja az $\ln x$ függvényt integrállal:

Az alábbi hat feladatot egyenként külön-külön lapon oldja meg! A megoldásokat kellő részletességgel írja le!

- (5+5 pont) Írja fel az $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 3)$ és $C(-2, 0, 1)$ pontokon átmenő sík egyenletét! Ezután írja fel a $\mathbf{v} = (-1, 2, 0)$ vektort $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ alakban, ahol \mathbf{u} merőleges a fenti síkra, \mathbf{w} pedig párhuzamos a fenti síkkal.
- (5+5 pont) Keresse meg az alábbi számsorozatok határértékeit! Adjon kellő indoklást is!

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n + n} \qquad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n$$

- (10 pont) Legyen $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$. Határozza meg a függvény monotonitási és konvexitási intervallumait, lokális szélsőértékeit és inflexiós pontjait, egy táblázatban összefoglalva! Rajzolja fel a függvény grafikonját, megjelölve a szélsőérték és inflexiós pontok koordinátáit! (Segítség: $\sqrt{5} \approx 2.2$.)
- (7+3 pont) Kanyargós úton autózunk egy olyan autóban ülve, amelynek sebességmérője működik, de a megtett távolságot nem mutatja. Meg akarjuk tudni, milyen hosszú utat teszünk meg egy perc alatt, ezért 10 másodperces időközökben feljegyezzük a kocs sebességét. A mérési eredményeket a mellékelt táblázat tartalmazza. Becsülje meg az egy perc alatt megtett út hosszát trapézformulával! Adjon felső becslést az útszámításban (azaz közelítő integrálásban) elkövetett hibára az alábbi képlet felhasználásával, ha feltesszük, hogy az autó sebességének második deriváltja: d^2v/dt^2 egyetlen pillanatban sem haladta meg a $0,2 \text{ m/s}^3$ értéket!

$$\text{hiba} \leq \frac{(b - a)^3}{12n^2} M_2$$

Idő	Sebesség
(s)	(m/s)
0	0
10	15
20	5
30	10
40	20
50	15
60	10

- (5+5 pont) Számítsa ki az alábbi integrálokat!

$$(a) \int x e^{-x^2} dx \qquad (b) \int \frac{x + 1}{x^2(x - 1)} dx$$

- (10 pont) Forgassa meg az $y = 1/x$, $1 \leq x \leq 3$ görbét az x -tengely körül, és számítsa ki a kapott forgástest térfogatát!