Sztochasztikus folyamatok

Simon Károly
Ez az előadás
Rick Durrett Essentials of Stochastic processes
könyvére épül

Department of Stochastics
Institute of Mathematics
Technical University of Budapest
www.math.bme.hu/~simonk

F file 2015-05-22

TÉTEL 1 (Kolmogorov maximális egyenlőtlenség)

Az $X_1, \dots, X_n$ v.v.-ról feltesszük, hogy
- (a) függetlenek,
- (b) $\mathbb{E}[X_i] = 0$,
- (c) $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma_i^2$.

Legyen $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ és $\lambda > 0$. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \le k \le n} |S_k| \ge \lambda\right) \le \frac{1}{\lambda^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2. \tag{1}$$

KÖVETKEZMÉNY 2

Legyen $\{X_i\}_{i=1}^{\infty} \dots$, amelyek kielégítik az 1 tétel (a)-(c) feltételeit. Továbbá tegyük fel, hogy

(d) $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 < \infty$.

Ekkor

$$\sum_{i=1}^{\infty} X_i \text{ konvergens majdnem biztosan.}$$

DEFINÍCIÓ 3 (Normális eloszlás ($\mathbb{R}$-en))

Legyen $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$. Az X valószínűségi változó (n, σ^2) paraméterű normális (vagy Gauss) eloszlású (jelben $X = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$), ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Ha $\mu = 0$ és $\sigma = 1$, akkor az $\mathcal{N}(0,1)$ standard normális eloszlást kapjuk. Használjuk a következő jelöléseket:

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}, \quad \Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy. \tag{2}$$

Néhány tulajdonság

$X = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ és $X_i = \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$. Ekkor

(a) $\mathbb{E}[X] = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

(b) $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

(c) $X_1 + X_2 = \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

(d) $X = \mathcal{N}(0,1)$, akkor

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(x^{-1} - x^{-3}\right) \cdot e^{-x^2/2} \le \mathbb{P}(X \ge x) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x^{-1} \cdot e^{-x^2/2} \tag{3}$$

(d) $Y = \mathrm{Bin}(n,p)$, $a < b$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(a < \frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right) = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{4}$$

Egydimenziós Brown mozgás definíciója

(a) Ha $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ pozitív számok, akkor

$$B(t_0), B(t_1) - B(t_0), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})$$

függetlenek. (Independent increments.)
(b) Ha $s, t \ge 0$, akkor

$$\mathbb{P}\left(B(s+t) - B(s) \in A\right) = \int_A (2\pi t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx$$

(Stationary increments.)
(c) Egy valószínűséggel: $t \to B_t$ folytonos.

Brown mozgás konstrukciója

Legyen $\mathcal{D}_0 := \{0, 1\}$ és valamely $n \ge 1$-re:

$$\mathcal{D}_n := \left\{ \frac{2k-1}{2^n} : 1 \le k \le 2^{n-1}, k \text{ páratlan} \right\}$$

$$\mathcal{D} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n.$$

a $[0, 1]$-beli diadikus racionális számok halmaza.
$\boldsymbol{B : [0,1] \to \mathbb{R}}$ **véletlen függvény konstrukciója**:

- $B(0) := 0$, $B(1) = \mathcal{N}(0, 1)$.

Brown mozgás konstrukciója (cont.)

- Tegyük fel, hogy $B\left(\frac{i}{2^n}\right)$, $0 \le i \le 2^n$ már értelmezve van. Rögzítsünk egy $t \in \mathcal{D}_{n+1}$-t. Ekkor valamely $1 \le i \le 2^n$-re:

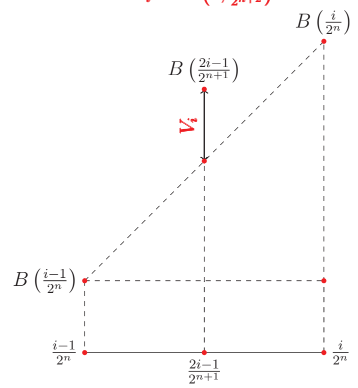
$$t = \frac{2i-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{i-1}{2^n} + \frac{i}{2^n}\right),$$

ahol tehát $B\left(\frac{i-1}{2^n}\right)$ és $B\left(\frac{i}{2^n}\right)$ már definiált. Legyen:

$$B(t) := \mathcal{N}\left(\frac{1}{2} \cdot \left(B\left(\frac{i-1}{2^n}\right) + B\left(\frac{i}{2^n}\right)\right), \frac{1}{2^{n+2}}\right).$$

Brown mozgás konstrukciója (cont.)

$V_i = \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2^{n+2}}\right)$



TÉTEL 4

$n \ge 1$ rögzített. $i = 1, \ldots, 2^n$-re:

$$Z_i := B\left(\frac{i}{2^n}\right) - B\left(\frac{i-1}{2^n}\right). \qquad (6)$$

Ekkor

(a) $\{Z_i\}_{i=1}^{2^n}$ függetlenek,
(b) $\forall i$-re: $Z_i \in \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2^n}\right)$.
(c) Ha $s, t \in \mathcal{D}$, $s < t$, akkor

$$B(t) - B(s) \in \mathcal{N}(0, s-t). \qquad (7)$$

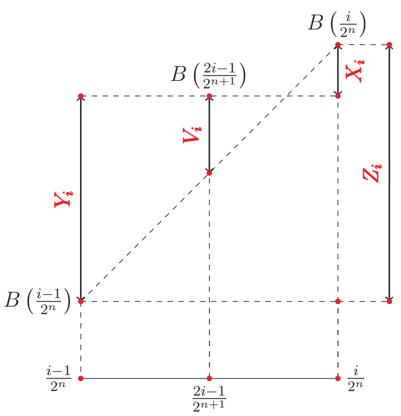
Bizonyítás I

Tegyük fel, hogy valamely n-ig az állítás igaz. $i = 1, \ldots, 2^n$-re a V_i és a Z_i változókat már definiáltuk. Indukciós bizonyítást használunk. Ezért most vezessük be az X_i, Y_i v.v.-ket:

$$Y_i := B\left(\frac{2i-1}{2^n}\right) - B\left(\frac{i-1}{2^n}\right)$$

és

$$X_i := B\left(\frac{i}{2^n}\right) - B\left(\frac{2i-1}{2^{n+1}}\right)$$



Bizonyítás I

Tudjuk, hogy a következő v.v.-k függetlenek:

$$Z_1, \ldots, Z_{2^n}, V_1, \ldots, V_{2^n}.$$

Az együttes sűrűségfüggvényük a $(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = (z_1, \ldots, z_{2^n}, v_1, \ldots, v_{2^n})$-ben

$$f_{\mathbf{Z},\mathbf{V}}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = \prod_{i=1}^{2^n} \frac{2^{n/2}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z_i^2 2^n}{2}\right) \cdot \frac{2^{(n+2)/2}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v_i^2 2^{n+2}}{2}\right)$$

Itt használtuk az indukciós feltevést és hogy $Var(Z_i) = \frac{1}{2^{n+2}}$.

Bizonyítás II

Definiáljuk $G : \mathbb{R}^{2^n} \times \mathbb{R}^{2^n} \to \mathbb{R}^{2^n} \times \mathbb{R}^{2^n}$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{z}, \mathbf{v}) := \left(\frac{1}{2}\mathbf{z} - \mathbf{v}, \frac{1}{2}\mathbf{z} + \mathbf{v}\right). \tag{8}$$

Annak aki nem érti az előzőt: $1 \leq i \leq 2^n$-re:

$$x_i := \frac{1}{2}z_i - v_i, \quad y_i := \frac{1}{2}z_i + v_i. \tag{9}$$

Használva az Appendixből a (14) formulát:

$$f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_{\mathbf{Z},\mathbf{V}}(G^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \left|\det G'(G^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))\right|^{-1},$$

ahol $(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = G^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ koordinátásan:
$z_i = x_i + y_i$ és $v_i = \frac{1}{2}(y_i - x_i)$.

Bizonyítás III

Ezeket beírva $f_{\mathbf{Z},\mathbf{V}}(\mathbf{z}, \mathbf{v})$ képletébe adódik, hogy az

$$(X_1, \dots, X_{2^n}, Y_1, \dots, Y_{2^n})$$

v.v. együttes sűrűségfüggvénye

$$\prod_{i=1}^{2^k} \frac{2^{(n+1)/2}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_i^2 2^{n+1}}{2}\right) \cdot \frac{2^{(n+1)/2}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y_i^2 2^{n+1}}{2}\right)$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy az

$$X_1, \dots, X_{2^n}, Y_1, \dots, Y_{2^n}$$

független $\mathcal{N}(0, 1/2^{k+1})$ v.v.-k. Ezután a (c) rész igazolása triviális. ■

KÖVETKEZMÉNY 5

Rögzítsünk egy $\lambda > 0$-át. Legyen

$$T := \sup_{\substack{0 \leq t \leq 1 \\ t \in \mathcal{D}}} |B(t)|.$$

Ekkor

(a) $\mathbb{P}(T > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^2}$.
(b) $\mathbb{E}[|T|] < \infty$.

TÉTEL 6

Legyen $x \in (0, 1)$.

$$\lim_{t \uparrow x,\ t \in \mathcal{D}} B(t) \text{ és } \lim_{t \downarrow x,\ t \in \mathcal{D}} B(t) \text{ m.b.} \tag{10}$$

Ha $x \in \mathcal{D}$, akkor ezek a limeszek $B(x)$-el egyenlőek.

Bizonyítás. Legyen $t_0 := 0$ és $\{t_n\}$ monoton növekvő elemei a $(0, 1)$-nek $\lim\limits_{n\to\infty} t_n =: x$.

$$B(t_n) = \sum_{k=1}^{n} B(t_k) - B(t_{k-1}).$$

Az $X_k = B(t_k) - B(t_{k-1})$ helyettesítéssel $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ eleget tesz a 2. Következmény feltételeinek ezért ezen Következmény szerint $\{B(t_n)\}$ konvergál. ■ Ez azonban nem bizonyítja azt, hogy majdnem minden realizációra $B(t)$ folytonos mivel a fenti tételben kontinuum sok nulla mértékű kivételes halmaz van, amik összesen pozitív mértékű halmazt is alkothatnának.

TÉTEL 7

$\forall \gamma < \frac{1}{2}, \exists C > 0, \varepsilon > 0$, ha $0 \leq s < t \leq 1$ és $t - s < \varepsilon$, akkor

$$|B(t) - B(s)| \leq C \cdot |t - s|^{\gamma}. \tag{11}$$

Ezt úgy fejezzük ki, hogy $B(t)$ Hölder- γ osztálybeli, minden $0 < \gamma < \frac{1}{2}$. Be lehet látni, hogy ez $\gamma = \frac{1}{2}$ már nem igaz.

Elemi tulajdonságok

(a) Legyen $T, \lambda > 0$. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,T]} |B_t| \geq \lambda\right) \leq \frac{T}{\lambda^2}.$$

(b) Skála függetlenség:

$$t \to a^{-1/2} B(at)$$

szintén Brown mozgás
(c) Idő megfordítás:

$$t \to tB(1/t)$$

szintén Brown mozgás.

Elemi tulajdonságok II

(d) Iterált logaritmus tétel:

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1 \quad \text{m.b} \tag{12}$$

(e) $B(t)$ Hölder α osztálybeli minden $\alpha < \frac{1}{2}$-re, de nem $\alpha = \frac{1}{2}$-re.
(f) Majdnem biztosan igaz, hogy a Brown mozgás trajektóriája nem differenciálható sehol sem.

Tükrözési elv

Legyen τ az az idő, amikor az origóból induló Brown mozgás először eléri az előre adott a számot. Legyen

$$\widehat{B} := \begin{cases} B(t), & \text{ha } t < \tau; \\ a - (B(t) - a), & \text{ha } t > \tau. \end{cases}$$

Ennek grafikonját úgy kapjuk, hogy $t > \tau$ intervallumon a $B(t)$ grafikonját tükrözzük az $y = a$ horizontális egyenesre. A $\widehat{B}(t)$ is Brown mozgás.

Hölder folytonosság

TÉTEL 8

A d-dimenziós Brown mozgás Hölder folytonos minden $\alpha < \frac{1}{2}$-re. Vagyis, létezik $\varepsilon > 0$ és $c = c(d, \alpha)$ konstansok, hogy minden $|\mathbf{h}| < \varepsilon$, $t \geq 0$ és $t + h \geq 0$-ra:

$$|\mathbf{X}(t+h) - \mathbf{X}(t)| \leq c \cdot h^{\alpha}.$$

Sztochasztikus folyamat definíciója

Adott egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és egy T index halmaz. Legyenek $X_t, t \in T$ az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók. Azt mondjuk, hogy $X_t, t \in T$ sztochasztikus folyamat . A sztochasztikus folyamatokra ezen X_t v.v.-k közötti összefüggések jellemzőek. Ezeket azzal tudjuk megszabni, ha minden véges

$$X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$$

Sztochasztikus folyamat definíciója (cont.)

családra megadjuk az együttes eloszlás függvényt. Egy sztochasztikus folyamatot, ennek a kurzusnak a céljaira definiáltnak tekintünk, ha adott:

- az állapottere
- index halmaza
- véges dimenziós eloszlásai

Ezek nem minden esetben határozzák meg a sztochasztikus folyamatot teljesen ha a paraméter folytonos.

Sztochasztikus folyamat definíciója (cont.)

Példa: Legyen $B(t)$ a standard Brown mozgás az egyenesen és U egy független, a $[0, 1]$-en egyenletes v.v. Továbbá:

$$\widehat{B}(t) := \begin{cases} B(t), & \text{ha } t \neq U; \\ 0, & \text{ha } t = U. \end{cases}$$

Ekkor $\widehat{B}(t)$ és $B(t)$ véges dimenziós eloszlásai azonosak mégis $\widehat{B}(t)$ trajektóriái nem folytonosak.

Appendix: Eloszlás transzformációk

Legyenek X, Y folytonos $\mathbb{R}^d$ értékű folytonos v.v.-k, amelyekre

- X, Y sűrűségfüggvényei: f_X, f_Y
- $Y = G(X)$, ahol $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1 bijekció.

Ekkor minden $H \subset \mathbb{R}$ Borel halmazra:

$$\begin{aligned} \int\limits_{x \in H} f_X(x) dx &= \mathbb{P}(X \in H) = \mathbb{P}(Y \in G(H)) \\ &= \int\limits_{y \in G(H)} f_Y(y) dy \\ &= \int\limits_{x \in H} f_Y(G(x)) \cdot |\det(G'(x))| \, dx, \end{aligned}$$

Appendix: Eloszlás transzformációk (cont.)

ahol az utolsó lépésben alkalmaztuk a helyettesítéses integrálás formulát. Mivel ez minden H Borel halmazra igaz ezért

$$f_X(x) = f_Y(G(x)) \cdot |\det(G'(x))| \,. \tag{13}$$

Erre alkalmazva az $y = G(x)$ helyettesítést kapjuk, hogy

$$f_Y(y) = f_X(G^{-1}(y)) \cdot \left|\det G'(G^{-1}(y))\right|^{-1}. \tag{14}$$

[1] Balázs Márton, Tóth Bálint
Valószínűségszámítás 1. jegyzet matematikusoknak és fizikusoknak
Balázs Márton Honlapja, 2012. Az internettes változatért kattintson ide.

[2] R. Durrett
Essentials of Stochastic Processes, Second edition
Springer, 2012. A majdnem kész változatért kattintson ide.

[3] R. Durrett
Probability Theory with examples, Second edition
Duxbury Press, 1996 . második kiadás.

[4] I.I. Gihman, A.V. Szkorohod
Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe
Műszaki Könyvkiadó1975, Budapest, 1985

[5] S. Karlin, H.M. Taylor
Sztochasztikus Folyamatok
Gondolat, Budapest, 1985

[6] S. Karlin, H.M. Taylor
A second course in stochastic processes
, Academic Press, 1981

[7] G. Lawler
Intoduction to Stochastic Processes
Chapmann & Hall 1995.

[8] D.A. Levin, Y. Peres,E.L. Wilmer
Markov chains and mixing times
American Mathematical Society, 2009.

[9] Major Péter
Folytonos idejű Markov láncok
`http://www.renyi.hu/~major/debrecen/debrecen2008a/markov3.html`

[10] P. Mattila Geometry of sets and measure in Euclidean spaces. Cambridge, 1995.

[11] Piet Van Mieghem
The Poisson process
`http://www.nas.its.tudelft.nl/people/Piet/CUPbookChapters/PACUP_Poisson.pdf`

[12] Rényi Alfréd
Valószínűségszámítás, (negyedik kiadás)
Tankönyvkiadó Budapest, 1981.

[13] Tóth Bálint *Sztochasztikus folyamatok jegyzet*
Tóth Bálint Jegyzetért kattintson ide

Index