Sztochasztikus folyamatok

Simon Károly
Ez az előadás
Rick Durrett Essentials of Stochastic processes
könyvére épül

Department of Stochastics
Institute of Mathematics
Technical University of Budapest
www.math.bme.hu/~simonk

E file 2015-05-04

Ismétlés: feltételes eloszlások

Feltételes eloszlásokról [1, 6.5. fejezet]-ben tanultak. Ha például adva vannak az X, Y együttesen folytonos valószínűségi változók, együttes sűrűségfüggvényük $f(x,y)$. Képeztük az $f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$ marginális sűrűségfüggvényt. Ha $f_Y(y) \neq 0$, akkor az X változónak az $\{Y = y\}$ (nulla valószínűségű) eseményre vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Ismétlés: feltételes eloszlások (cont.)

Ez abból jött ki, hogy

$$F_{X|Y}(x|y) \approx \mathbb{P}(X < x | Y \in [y, y+\Delta y)) = \frac{F(x, y+\Delta y) - F(x,y)}{\mathbb{P}(Y \in [y, y+\Delta y))} = \frac{\frac{F(x,y+\Delta y)-F(x,y)}{\Delta y}}{\frac{\mathbb{P}(Y\in[y,y+\Delta y))}{\Delta y}} \approx \frac{F'_y(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Ezt x-szerint differenciálva kaptuk:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{F''_{x,y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Ismétlés: feltételes eloszlások (cont.)

Ennek megfelelően:

$$\mathbb{E}[X|Y=y] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x,y)dx,$$

ha $f_Y(y) > 0$. Ezt [1, 7.3 fejezet]-ben tanulták.
Ha Y-t nem rögzítjük, $\mathbb{E}[X|Y]$ maga is egy v.v.

Ismétlés: feltételes eloszlások (cont.)

LEMMA 1

(L. [1, 7.3 fejezet]) Legyenek $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel mérhető függvények. Ekkor

(a) $\mathbb{E}[u(X) \cdot v(Y)|Y] = v(Y) \cdot \mathbb{E}[u(X)|Y]$, ahol u, v Borel mérhető függvények.

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Borel mérhető függvényre:

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[g(X,Y)|Y]] \quad (1)$$

Ez a toronyszabály. Speciálisan:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] \quad (2)$$

PÉLDA 2

Határozzuk meg $\mathbb{E}[X|Y]$-t, ha

$$f(x,y) = \frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}, \text{ ha } 0 < x, y < \infty.$$

Megoldás:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{(1/y)e^{-x/y}e^{-y}}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1/y)e^{-x/y}e^{-y}dx} = \frac{e^{-x/y}}{y}.$$

Tehát $\mathbb{E}[X|Y=y] = \int\limits_0^{\infty} \frac{x}{y} e^{-x/y}dx = y$. Innen $\mathbb{E}[X|Y] = Y$.

PÉLDA 3

Legyen $T := [0,1] \times [0,2]$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2x+y), & \text{ha } (x,y) \in T; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg azt a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre $\mathbb{E}[X|Y] = g(Y)$.

Megoldás: $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \frac{1}{4}(1+y)$.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2x+y}{1+y} \text{ ha } (x,y) \in T.$$

Tehát

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X|Y=y] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x|y)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{2x+y}{1+y}dx \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{4+3y}{1+y}. \end{aligned}$$

Legyen $g(y) := \frac{1}{6} \cdot \frac{4+3y}{1+y}$. Ekkor a fentiből:

$$\mathbb{E}[X|Y] = g(Y).$$

PÉLDA 4

Legyen $X = \mathrm{Uniform}(0,1)$ és $Y|X = x = \mathrm{Uniform}(0,x)$, ha $0 < x < 1$. Ekkor [1, 6.34. Példa] és [1, 7.39. Példa] tanulták, hogy

$$\mathbb{E}[X|Y] = \frac{Y-1}{\ln Y}.$$

Az alábbi lemma ezt a tulajdonságot fogalmazza meg:

LEMMA 5

Legyenek $X, Y_1, \dots, Y_n$ valószínűségi változók. Ekkor létezik olyan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel mérhető függvény, amelyre

$$\mathbb{E}[X|Y_1, \dots, Y_n] = g(Y_1, \dots, Y_n). \tag{3}$$

Ezt arra az esetre láttuk mikor $n = 1$ és az (X, Y) együttesen folytonos. De az általános esetben is pontosan ugyan ezen okból teljesül a fenti állítás.

Egy kis mértékelmélet

Adott egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező.

Egy kis mértékelmélet (cont.)

DEFINÍCIÓ 6

- Legyen $\mathcal{B}^n$ a Borel σ-algebra $\mathbb{R}^n$-en. Ha $n = 1$, akkor csak $\mathcal{B}$-t írunk.
- $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ egy valószínűségi változó (jelben v.v vagy r.v.), ha $\xi^{-1}(\mathcal{B}^n) \subset \mathcal{A}$.
- A $\xi_1, \dots, \xi_n$ v.v. által generált σ-algebra

$$\sigma(\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi^{-1}(\mathcal{B}^n). \tag{4}$$

- $\eta \in \mathcal{A}$ azt jelenti, hogy η mérhető $\mathcal{A}$-ra.

Egy kis mértékelmélet (cont.)

TÉTEL 7

- η és $\xi_1, \dots, \xi_n$ v.v. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
- $\mathcal{F} := \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Egy $\eta \in \mathcal{F}$, $\iff \exists g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Borel mérhető függvény, amelyre

$$\eta(\omega) = g(\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)). \tag{5}$$

A tétel nem csak folytonos v.v.-re szól, bizonyítása: [4, 3.6 Fejezet] olvasható.

Egy kis mértékelmélet (cont.)

MEGJEGYZÉS 8

Itt a 7. Tétel jelöléseit használjuk. Legyen $A \in \mathcal{A}$ egy esemény. Ekkor

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{F} &\iff \mathbb{1}_A \in \mathcal{F} \\ &\iff \exists g,\ \mathbb{1}_A(\omega) = g(\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)), \end{aligned} \tag{6}$$

ahol $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borel mérhető függvény. Vagyis $A \in \mathcal{A}$ bekövetkezése pontosan akkor dönthető el egyértelműen a $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ismeretében, ha $A \in \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Feltételes várható érték egy tulajdonsága

Jelöljük: $\mathbb{E}[X;A] := \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_A]$, ahol $A \in \mathcal{A}$.

TÉTEL 9

(a) $\mathbb{E}[X|Y] \in \sigma(Y)$

(b) $\forall A \in \sigma(Y)$, $\mathbb{E}[X;A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y];A]$

Az (a) rész következik a 7. tételből.
(b) rész bizonyítása. Rögzítsünk $a < b$ tetszőleges valós számokat és legyen $A = Y^{-1}([a,b])$. Nyilván elég az ilyen alakú halmazokra igazolni a tétel (b) részét.

Feltételes várható érték egy tulajdonsága (cont.)

Legyen $g(x,y) := x \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(y)$. Most alkalmazni fogjuk az 1. Lemmának előbb a (b) majd az (a) részét:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X;A] &= \mathbb{E}[g(X,Y)] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[g(X,Y)|Y]] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(Y)|Y\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{[a,b](Y)} \cdot \mathbb{E}[X|Y]\right] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y];A].
\end{aligned}$$

■

Feltételes várható érték σ-algebrára

Definiálni szeretnénk a σ-algebrára vonatkozó feltételes várható értéket. Úgy vehetjük, hogy az Y v.v.-re vett feltételes várható érték p.l. a 9. Tételben, a $\sigma(Y)$-algebrára vett feltételes várható érték.

Cél: Ezt a definíciót kiterjeszteni tetszőleges (tehát nem csak a folytonos) v.v-nek egy tetszőleges $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebrára vett feltételes várható értékké.

DEFINÍCIÓ 10 (σ-algebrára vonatkozó feltételes várható érték)

Adott egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező. Legyen

- X egy v.v. amelyre: $\int\limits_{\Omega} |X(\omega)| d\mathbb{P}(\omega) < \infty$.
- $\mathcal{F}$ az $\mathcal{A}$-nak rész σ-algebrája.

Az X-nek az $\mathcal{F}$-re vonatkozó feltételes várható értéke (jelben $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$) egy olyan Z v.v., amelyre:

(a) $Z \in \mathcal{F}$, (Z mérhető az $\mathcal{F}$-re) és

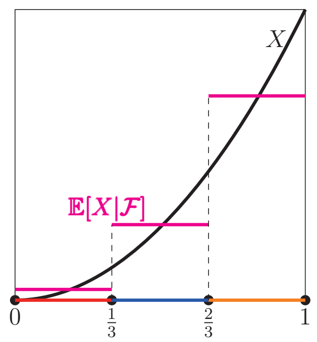
(b) $\forall A \in \mathcal{F}$-re:

$$\int\limits_A X d\mathbb{P} = \int\limits_A Z d\mathbb{P}. \tag{7}$$

MEGJEGYZÉS 11

- A fenti (a) és (b) pontok a 9. Tétel (a) és (b) pontjainak az általánosításai, abban az értelemben, hogy a 9. Tételben $\mathcal{F} = \sigma(Y)$. Vagyis az $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ az $\mathbb{E}[X|Y]$-nak az általánosítása, ez utóbbinak a 9. tételben megfogalmazott tulajdonságai mentén.
- Ha a Z v.v. teljesíti a fenti feltételeket, azt mondjuk, hogy Z az $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ egy verziója.
- Lent belátjuk, hogy $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ létezik és egyértelmű meghaladja. Ebben a fejezetben a [3] könyvet követjük.

$\mathcal{F}$ is generated by $\{[0,\frac{1}{3}), [\frac{1}{3},\frac{2}{3}), [\frac{2}{3},1)\}$



Feltételes várható érték definíciója

Legyen ξ egy integrálható v.v. az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$-n ($\int |\xi(\omega)| d\omega < \infty$), és legyen $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ rész σ-algebra. Most definiálni fogjuk a ξ-nek az $\mathcal{F}$ σ-algebrára vonatkozó feltételes várható értékét, $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}]$-et. Ennek lényege, hogy sok esetben $\mathcal{F}$ adja meg a számunkra elérhető információt. (Gondoljunk a 7. Tételre.) Ennek birtokában az X értékére a legjobb becslés a most definiálásra kerülő $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}]$.

Feltételes várható érték definíciója (cont.)

Az $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}]$ definiálása céljából először is vezessük be a μ_ξ előjeles mértéket az $\mathcal{A}$-n:

$$\mu_\xi(B) := \int_B \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \quad B \in \mathcal{A}. \tag{8}$$

Nyilván μ_ξ egy előjeles mérték. Definícióból adódóan:

$$\mu_\xi \ll \mathbb{P}. \tag{9}$$

Feltételes várható érték definíciója (cont.)

Ha mind μ_ξ-t, mind $\mathbb{P}$-t megszorítjuk $\mathcal{F}$-re kapjuk a $\mu|_\mathcal{F}$ és $\mathbb{P}|_\mathcal{F}$ mértékeket. A (9) formulabeli abszolut folytonosság a megszorított mértékekre is fenn áll:

$$\mu_\xi|_\mathcal{F} \ll \mathbb{P}|_\mathcal{F}. \tag{10}$$

Tekintsük az

$$f := \frac{d\mu|_\mathcal{F}}{d\mathbb{P}|_\mathcal{F}}$$

Radon-Nikodym deriváltat. Ekkor

(a) $f \in \mathcal{F}$ és

(b) $\forall E \in \mathcal{F}$: $\int_E f d\mathbb{P} = \mu_\xi(E) = \int_E \xi d\mathbb{P}$.

Feltételes várható érték definíciója (cont.)

Vegyük észre, hogy: a fenti (a) és (b) feltétel ugyanaz mint a 7 Definícióbeli (a) és (b) feltételek, ezért

- $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}]$ feltételes várható érték, létezik,
- $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}]$ majdnem mindenütt egyenlő a $\frac{d\mu|_\mathcal{F}}{d\mathbb{P}|_\mathcal{F}}$ Radon-Nikodym deriválttal
- Radon-Nikodym derivált mod 0 egyértelműségéből adódóan $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}]$ is egyértelmű ebben az értelemben.
- A $\frac{d\mu|_\mathcal{F}}{d\mathbb{P}|_\mathcal{F}}$ Radon-Nikodym derivált a $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}]$ feltételes várható értéknek egy verziója.

Feltételes várható érték definíciója (cont.)

DEFINÍCIÓ 12 (Feltételes valószínűség)

Legyen $\mathcal{F}$ az $\mathcal{A}$ rész σ-algebrája. Minden $A \in \mathcal{A}$-ra az A feltételes valószínűségét az $\mathcal{F}$ σ-algebrára:

$$\mathbb{P}(A|\mathcal{F}) := \mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{F}]. \tag{11}$$

Feltételes várható érték tulajdonságai I

(a) **Linearitás**:
$\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{F}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$

(b) **Monotonitás**:
Ha $X \leq Y$, akkor $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \leq \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$.

(c) **Csebisev egyenlőtlenség**:

$$\mathbb{P}(|X| \geq a|\mathcal{F}) \leq a^{-2}\mathbb{E}\left[X^2|\mathcal{F}\right]. \tag{12}$$

(d) **Monoton konvergencia tétel**: Tegyük fel, hogy $X_n \geq 0,\ X_n \uparrow X,\ \mathbb{E}[X] < \infty$ akkor

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}] \uparrow \mathbb{E}[X|\mathcal{F}].$$

Feltételes várható érték tulajdonságai II

(e) A fentit $Y_1 - Y_n$-re alkalmazva: Ha $Y_n \downarrow Y$, $\mathbb{E}[|Y_1|], \mathbb{E}[|Y|] < \infty$, akkor
$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}] \downarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$.

(f) **Jensen egyenlőtlenség**: Ha φ konvex, $\mathbb{E}[|X|], \mathbb{E}[|\varphi(X)|] < \infty$, akkor

$$\varphi(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)|\mathcal{F}]. \tag{13}$$

(g) **Feltételes Cauchy Schwarz:**

$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{F}]^2 \leq \mathbb{E}\left[X^2|\mathcal{F}\right]\mathbb{E}\left[Y^2|\mathcal{F}\right]. \tag{14}$$

Feltételes várható érték tulajdonságai III

(h) $X \to \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ egy kontrakció az L^p-n, ha $p \geq 1$:

$$\mathbb{E}[|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]|^p] \leq \mathbb{E}[|X|^p]$$

(i) Ha $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, akkor

1. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]|\mathcal{F}_2] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]$
2. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_2]|\mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]$

Vagyis mindig a primitívebb σ-algebra győz. (Ismerős az életből?)

(j) Ha $X \in \mathcal{F}$, $\mathbb{E}[|Y|], \mathbb{E}[|XY|] < \infty$, akkor

$$\mathbb{E}\left[X \cdot Y|\mathcal{F}\right] = X \cdot \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]. \tag{15}$$

Feltételes várható érték tulajdonságai III

(k) $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ **mint projekció**: Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}\left[X^2\right] < \infty$. Ekkor $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ az X-nek a $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$-re vett merőleges vetülete. Más szóval:

$$\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2\right] = \min_{Y \in \mathcal{F}} \mathbb{E}\left[(X - Y)^2\right].$$

(l) $X \to \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ **önadjungált az $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$-n:**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \cdot \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \cdot Y]. \end{aligned} \tag{16}$$

Feltételes várható érték tulajdonságai V

Definiáljuk: a σ-algebrára vonatkozó feltételes variációt (L. [1, 7.35 Definíció] és [1, 7.36. Állítás]):

$$\mathrm{Var}(X|\mathcal{F}) := \mathbb{E}\left[X^2|\mathcal{F}\right] - \mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}\right]^2 .$$

Ekkor

(m) $\mathrm{Var}\,(X) = \mathbb{E}\left[\mathrm{Var}(X|\mathcal{F})\right] + \mathrm{Var}\left(\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}\right]\right).$

(n) $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ diszjunkt unió és $\mathbb{P}(\Omega_i) > 0$. Legyen $\mathcal{F}$ az $\{\Omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ által generált σ-algebra. Ekkor egy X v.v.-re:

$$\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}\right] = \sum_i \frac{\mathbb{E}\left[X;\Omega_i\right]}{\mathbb{P}(\Omega_i)} \cdot \mathbb{1}_{\Omega_i}.$$

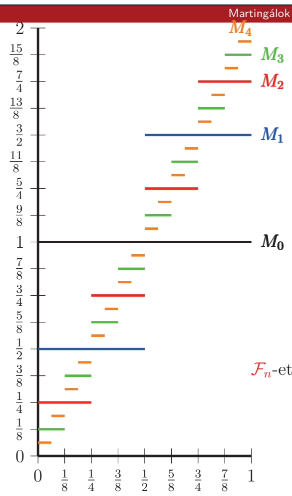
Feltételes várható érték tulajdonságai VI

(p) **Bayes's formula:** Let $F \in \mathcal{F}$ és $A \in \mathcal{A}$. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(F|A\right) = \frac{\int_F \mathbb{P}(A|\mathcal{F})}{\int_\Omega \mathbb{P}(A|\mathcal{F})}. \tag{17}$$

Könnyen látható, hogy ez az állítást a Bayes tételt adja, abban az esetben amikor $\mathcal{F}$-et egy partíció generálja.

A fenti (a)-(p) állítások bizonyításai többnyire triviálisak, gyakorlaton hangzanak el, a vizsga anyagát képezik.



$\Omega = [0,1]$ és $\mathbb{P} = \mathcal{L}eb|_{[0,1]}$

ha $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^{-n}$, $x_n \in \{0,1\}$

legyen $\theta_k = \begin{cases} 1, & \text{ha } x_k = 1; \\ -1, & \text{ha } x_k = 0. \end{cases}$

Ezzel, $M_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \theta_k 2^{-k}$

$\mathcal{F}_n$-et generálja $\left\{\left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right) : i = 0, \dots 2^n - 1\right\}$

$M_n \in \mathcal{F}_n$

$\mathbb{E}\left[M_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] = M_n$

DEFINÍCIÓ 13

- σ-algebrák egy növekvő $\mathcal{F}_n$ sorozatát **filtrációnak** nevezzük.
- X_n **adaptált** az $\mathcal{F}_n$-hez, ha $X_n \in \mathcal{F}_n$, $\forall n$-re.
- (X_n) egy **martingál** az $\mathcal{F}_n$ filtrációra, ha
  - (a) $\mathbb{E}\left[|X_n|\right] < \infty$
  - (b) X_n adaptált az $\mathcal{F}_n$-hez,
  - (c) $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$, $\forall n \geq 1$-re.

Ha (a) és (b) teljesül, de (c)-ben $=$ helyett

(c') $\leq$ van akkor (X_n) **szupermartingál**,

(c'') $\geq$ van akkor (X_n) **szubmartingál**.

PÉLDA 14

Képzeljünk el egy játékost, aki egy igazságos (nulla várható értékű) játékot játszik egymás után nagyon sokszor. Legyen M_n az n-edik játék után a nyereménye (vagy vesztesége ha M_n negatív) és légyen Y_n az n-edik játék kimenetele. Legyen továbbá $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$. Ekkor **$(M_n)$ egy martingál** az $\mathcal{F}_n$-re.

PÉLDA 15

Egy szabályos érmét feldobunk egymás után sokszor. Az n-edik dobás eredménye $\xi_n = 1$ ha fej és $\xi_n = -1$ ha írás. Legyen $X_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$ és $\mathcal{F}_n := \sigma\left\{\xi_1, \dots, \xi_n\right\}$ ha $n \geq 1$ és $X_0 = 0$ és $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Ekkor

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] = \underbrace{\mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{F}_n\right]}_{X_n} + \underbrace{\mathbb{E}\left[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]}_{0} = X_n.$$

Tehát X_n martingál $\mathcal{F}_n$-re.

PÉLDA 16

Legyen $X_1,\dots,X_n$ i.i.d. $\mathbb{E}[X_i]=\mu$ és $S_n := S_0+X_1+\cdots+X_n$ egy véletlen séta. Ekkor $M_n := S_n - n\mu$ egy martingál $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1,\dots,X_n)$-re.
Nevezetesen: $M_{n+1}-M_n = X_{n+1}-\mu$ független $X_n,\dots,X_1,S_0$-tól tehát

$$\mathbb{E}[M_{n+1}-M_N|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}]-\mu=0.$$

Vagyis
$$\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]=M_n.$$

Ha $\mu\le 0$, akkor S_n szupermartingál, ha $\mu\ge 0$, akkor S_n submartingál.

TÉTEL 17

Legyen Legyen X_n egy Markov Lánc, melynek átmenet valószínűség mátrixa $\mathbf{P}=(p(x,y))_{x,y}$. Tegyük fel, hogy az $f: S\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ függvényre:

$$f(x,n)=\sum_y p(x,y)f(y,n+1). \tag{18}$$

Ekkor $M_n=f(X_n,n)$ egy martingál $\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,\dots,X_n)$-re. Speciálisan, ha

$$h(x)=\sum_y p(x,y)h(y), \tag{19}$$

akkor $h(X_n)$ martingál $\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,\dots,X_n)$-re.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X_{n+1},n+1)|\mathcal{F}_n] &= \sum_y p(X_n,y)f(y,n+1)\\ &= f(X_n,n).\end{aligned}$$

■

PÉLDA 18 (Gambler's Ruin)

Let $X_1,X_2,\dots$ i.i.d. úgy hogy valamely $p\in(0,1)$, $p\ne 1/2$-re:

$$\mathbb{P}(X_i=1)=p \text{ és } \mathbb{P}(X_i=-1)=q=1-p.$$

Legyen $S_n=S_0+X_1+\cdots X_n$. Ekkor

$$M_n := \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$$

egy martingál.

Ez abból következik, hogy $h(x)=\left(\frac{q}{p}\right)^x$ teljesíti a (19) feltételt tehát a 17. Tétel alkalmazható.

PÉLDA 19 (Szimmetrikus egyszerű véletlen séta)

$Y_1,Y_2,\dots$ i.i.d. $\mathbb{P}(Y_i=1)=\mathbb{P}(Y_i=-1)=1/2$. $S_n=S_0+Y_1+\cdots+Y_n$. Ekkor $M_n:=S_n^2-n$ egy martingál $\sigma(Y_1,\dots,Y_n)$-re.

Nevezetesen: meg kell mutatni, hogy $f(x,n)=x^2-n$-re (18) teljesül. Vagyis hogy

$$x^2-n=\frac{1}{2}((x-1)^2-(n+1))+\frac{1}{2}\left((x+1)^2-(n+1)\right).$$

Ezt pedig egy triviális számolás igazolja.

PÉLDA 20 (független v.v. szorzata)

Adott $X_1,X_2,\dots\ge 0$ i.i.d. és $\mathbb{E}[X_i]=1$. Ekkor $M_n=M_0\cdot X_1\cdots X_n$ egy martingál $\mathcal{F}_n:=\sigma(X_1,\dots,X_n)$-re.

Nevezetesen:

$$\mathbb{E}[M_{n+1}-M_n|\mathcal{F}_n]=M_n\cdot\mathbb{E}[X_{n+1}-1|\mathcal{F}_n]=0.$$

Ez utóbbi azért van mert X_{n+1} független $X_1,\dots,X_n$-től, tehát az általuk generált $\mathcal{F}_n$ σ-algebrától is független vagyis $\mathbb{E}[X_{n+1}-1|\mathcal{F}_n]=\mathbb{E}[X_{n+1}-1]=0$.

TÉTEL 21

Legyen $\varphi,\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ egy konvex függvények és ψ növekvő.

(a) Ha M_n egy martingál, akkor $\varphi(M_n)$ egy szubmartingál.

(b) Ha M_n szubmartingál, akkor $\psi(M_n)$ egy is szubmartingál.

Ez a Jensen egyenlőtlenségnek ((13) formula) és a definíciónak azonnali következménye.
Tehát ha M_n martingál, akkor például $|M_n|$ és M_n^2 szubmartingál.

TÉTEL 22

Legyen M_n egy Martingál. Ekkor

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1}^2|\mathcal{F}_n\right]-M_n^2=\mathbb{E}\left[(M_{n+1}-M_n)^2|\mathcal{F}_n\right]. \tag{20}$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(M_{n+1}-M_n)^2|\mathcal{F}_n\right] &= \\ &\mathbb{E}\left[M_{n+1}^2|\mathcal{F}_n\right]-2M_n\underbrace{\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]}_{M_n}+M_n^2\\ &=\mathbb{E}\left[M_{n+1}^2|\mathcal{F}_n\right]-M_n^2. \end{aligned}\tag{21}$$

■Most a martingál növekmények merőlegességét igazoljuk.

TÉTEL 23

Legyen M_n egy Martingál és legyen $0 \leq i \leq j \leq k < n$. Ekkor

$$\mathbb{E}\left[(M_n - M_k)\cdot M_j\right] = 0. \tag{22}$$

és ennek nyilvánvaló következménye:

$$\mathbb{E}\left[(M_n - M_k)\cdot(M_j - M_i)\right] = 0. \tag{23}$$

Bizonyítás. A (22) bizonyítása:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(M_n - M_k)M_j\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(M_n - M_k)M_j|\mathcal{F}_k\right]\right]\\ &= \mathbb{E}\Big[M_j \cdot \underbrace{\mathbb{E}\left[(M_n - M_k)|\mathcal{F}_k\right]}_{0}\Big] = 0\end{aligned}$$

■

KÖVETKEZMÉNY 24

A 23. Tétel jelöléseit használva:

$$\mathbb{E}\left[(M_n - M_0)^2\right] = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[(M_k - M_{k-1})\right]^2.$$

Bizonyítás. A (23) formulát használjuk:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(M_n - M_0)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} M_k - M_{k-1}\right)^2\right]\\ &= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[(M_k - M_{k-1})^2\right]\\ &+ 2\sum_{1\leq j<k\leq n}\underbrace{\mathbb{E}\left[(M_k - M_{k-1})(M_j - M_{j-1})\right]}_{0}.\end{aligned}$$

Legyen $m \leq n$ ekkor a definícióból nyilvánvalóan:

LEMMA 25

- Ha M_n martingál, akkor $\mathbb{E}[M_m] = \mathbb{E}[M_n]$,
- Ha M_n szubmartingál, akkor $\mathbb{E}[M_m] \leq \mathbb{E}[M_n]$,
- Ha M_n szupermartingál, akkor $\mathbb{E}[M_m] \geq \mathbb{E}[M_n]$.

A következő példa egy híres fogadó stratégiáról szól.

Doubling strategy

Egy igazságos játék minden fordulójában Kázmér a következő úgynevezett doubling strategy -t folytatja: Ha egy játékban nyer, akkor 1$ tesz fel a következőben. Viszont amikor veszít a következő játékban duplázza az előző játék tétjét. Tehát ha négy vesztes játék után nyer:

tét	1	2	4	8	16
játék kimenete	L	L	L	L	W
profit	-1	-3	-7	-15	1

Ha k vesztés után a $k+1$-adik játékban nyer, akkor a vesztesége: $1 + 2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$. $k+1$-edik játékban nyereménye: 2^k vagyis az egyenlege: 1$.

Általánosítás

- X_i az i-edik játék kimenetele (pl. ± 1).
- M_n a net nyereménye az n-edik játék után annak, aki minden játékban 1$-t tesz fel.
- H_n egy fogadási stratégia, ami tehát az első $n-1$ játék kimenetelétől függ vagyis $H_n \in \mathcal{F}_{n-1} = \sigma(M_0, X_1, \dots, X_{n-1})$.
- W_n a tiszta nyereménye, annak a játékosnak, aki a H_n fogadási stratégiával játszik.

$$W_n = W_0 + \sum_{m=1}^{n} H_m \cdot (M_m - M_{m-1}). \tag{24}$$

TÉTEL 26

Tegyük fel, hogy

- M_n egy szupermartingál az $\mathcal{F}_n$-re.
- $\exists c_n > 0$, hogy $0 \leq H_n \leq c_n$,

Ekkor W_n is egy szupermartingál .

$H_n \geq 0$ kell, hogy biztosítsuk, hogy a fogadó nem veszi át a ház szerepét.

$H_n \leq c_n$ kell ahhoz, hogy létezzen várható érték. Az alkalmazásokra nem ártalmas feltétel.

Bizonyítás. A nyeremény változása az n-edikről az $n+1$-edik pillanatra:

$$W_{n+1} - W_n = H_{n+1}\left(M_{n+1} - M_n\right).$$

Mivel $H_{n+1} \in \mathcal{F}_n$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[W_{n+1} - W_n|\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[H_{n+1}\left(M_{n+1} - M_n\right)|\mathcal{F}_n\right]\\ &= H_{n+1}\mathbb{E}\left[M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n\right] \leq 0.\end{aligned}$$

Vagyis W_n szupermartingál $\mathcal{F}_n$-re.

■

TÉTEL 27

Használva a fenti jelöléseket: tegyük fel létezik $0 < c_n$, hogy $|H_n| < c_n$. Ekkor

(a) Ha M_n egy martingál, akkor W_n is martingál (az $\mathcal{F}_n$-re).

(b) Ha M_n egy szupermartingál, akkor W_n is szupermartingál (az $\mathcal{F}_n$-re).

A bizonyítás úgy megy mint a 26. Tétel esetén.

Megállási idő

(Angolul: Stopping time vagy optional random variable) Ezt a fogalmat a Markov folyamatok esetén bevezettük. Lásd A file **??** slide. Legyen $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ az n-edik pillanatban rendelkezésünkre álló információ.

DEFINÍCIÓ 28

Egy T v.v., melynek értékei a $\{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ halmazból kerülnek ki, megállási idő , ha $\{N = n\} \in \mathcal{F}_n$, $\forall n < \infty$.

Megállási idő (cont.)

PÉLDA 29 ("hitting time")

$X_1, X_2, \dots$ i.i.d., $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$, $S_n := X_1 + \dots + X_n$. Az A halmaznak az ún. hitting time-ja $N := \min\{n : S_n \in A\}$.

LEMMA 30

Megállási idők összege, maximuma, minimuma is megállási idő.

Ennek igazolása definícióból triviális.

Megállási idő (cont.)

Most bevezetjük a T megállási időhöz tartozó $\mathcal{F}_T$ σ-algebrát, ami lényegében a T időben ismert információt reprezentálja.

DEFINÍCIÓ 31 (megállási időhöz tartozó σ-algebra)

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{A} : A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\}.$$

Megállási idő (cont.)

LEMMA 32

Legyenek N, T egy megállási idők. Ekkor

- $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_T$, vagyis $T \in \mathcal{F}_T$.
- $X_1, X_2, \dots$ i.i.d., $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$, $S_n := X_1 + \dots + X_n$, $M_n := \max\{S_m : m \leq n\}$. Ekkor $S_N, M_N \in \mathcal{F}_N$.
- Általánosan: ha $Y_n \in \mathcal{F}_n$, akkor $Y_T \in \mathcal{F}_T$.
- Ha $N \leq T$, akkor $\mathcal{F}_N \subset \mathcal{F}_T$.

A fenti állítások belátása házi feladat.

Példa

Legyen $X_1, X_2, \dots$ i.i.d.

$$\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$$

és

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n).$$

Legyen

$$N := \min\left\{k : \sum_{i=1}^{k} X_i \geq \frac{k}{2}\right\} \wedge 3$$

és

$$\widetilde{N} := \min\left\{k : \sum_{i=1}^{k+1} X_i \geq \frac{k}{2}\right\} \wedge 3.$$

Példa (cont.)

Ekkor N megállási idő, de $\widetilde{N}$ nem az. Nevezetesen

$$N = \begin{cases} 1, & \text{ha } \{X_1 = 1\} \in \mathcal{F}_1; \\ 2, & \text{ha } \{X_1 = 0, X_2 = 1\} \in \mathcal{F}_2 \ ; \\ 3, & \text{ha } \{X_1 = 0, X_2 = 0\} \in \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3. \end{cases}$$

és

$$\widetilde{N} = \begin{cases} 1, & \text{ha } \{X_1 = 0\} \cup \{X_1 = 0, X_2 = 1\} \notin \mathcal{F}_1; \\ 2, & \text{ha } \{X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1\} \notin \mathcal{F}_2; \\ 3, & \text{ha } \{X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0\} \in \mathcal{F}_3. \end{cases}$$

TÉTEL 33

Legyen $X_1, X_2, \dots$ i.i.d., $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}$, T egy megállási idő. Feltételesen $\{T < \infty\}$-re: $\{X_{N+n}, n \geq 1\}$ független $\mathcal{F}_N$-től és ugyanaz az eloszlása mint X_n-nek.

Bizonyítás. Legyen μ az X_i eloszlása. Vagyis $\mu(B) := \mathbb{P}(X_i \in B)$. Választunk tetszőleges $k \geq 1$-re, $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ és $F \in \mathcal{F}_N$ halmazokat.

$$U := \{A, N < \infty, X_{N+j} \in B_j, 1 \leq j \leq k\}.$$

Elég belátni, hogy ekkor

$$\mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(A \cap \{N < \infty\}) \prod_{j=1}^{k} \mu(B_i). \tag{25}$$

$U_n := U \cap \{N = n\}$-re:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U_n) &= \mathbb{P}(A, N = n, X_{n+j} \in B_j, 1 \leq j \leq k) \\ &= \mathbb{P}\left(A \bigcap \{N = n\}\right) \prod_{j=1}^{k} \mu(B_j). \end{aligned} \tag{26}$$

Ez azért van mert $A \cap \{N = n\} \in \mathcal{F}_n$ és az $\mathcal{F}_n$ független $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$-től. Mivel $\mathbb{P}(U) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(U_n)$ a (26) formulából kapjuk, hogy (25) teljesül. ∎

tét= 1\$ egy megállási időig

Adott T megállási idő és minden játékban csak 1\$ tét. A játékot a T időpontban hagyjuk abba. Legyen

$$H_m := \begin{cases} 1, & \text{ha } m \leq T; \\ 0, & \text{ha } m > T. \end{cases}$$

Belátjuk, hogy $H_m \in \mathcal{F}_{m-1}$ azaz H_m egy legitim fogadási stratégia az 53. slide definíciója értelmében. Vagyis és a 26. Tétel alkalmazható:

$$\{H_m = 0\} = \bigcup_{k=1}^{m-1} \{T = k\} \in \mathcal{F}_{m-1}.$$

Tehát ezzel a stratégiával sem nyerhetünk sokat.

TÉTEL 34

Tegyük fel hogy M_n martingál, szupermartingál vagy szubmartingál az $\mathcal{F}_n$ σ-algebrára és legyen T egy megállási idő. Ekkor az $M_{n \wedge T}$ megállított folyamat is martingál, szupermartingál vagy szubmartingál az M_n-nek megfelelően, ahol

$$T \wedge n := \min \{T, n\}.$$

Továbbá,

(a) M_n martingál $\Longrightarrow \mathbb{E}[M_{T\wedge n}] = M_0$,

(b) M_n szupermartingál $\Longrightarrow \mathbb{E}[M_{T\wedge n}] \leq M_0$,

(b) M_n szubmartingál $\Longrightarrow \mathbb{E}[M_{T\wedge n}] \geq M_0$.

Bizonyítás

Legyen $W_0 := M_0$. Ekkor a (24) egyenletből

$$W_n = M_0 + \sum_{m=1}^{n} H_m(M_m - M_{m-1}) = M_{T\wedge n}.$$

Nevezetesen,

- ha $T \geq n$, akkor $W_n = M_n$ és
- ha $T \leq n$, akkor $W_n = M_T$.

Használva ezt, a 26. és a 27. Tételeket kapjuk az állítást. Az (a), (b), (c) pontok a 25. Lemmából következnek.

Kilépési eloszlások

Most látni fogjuk a 34.Tétel egy alkalmazását és vizsgáljuk az általános esetben, hogy mikor cserélhető ki a 34. Tétel (a) pontjában a $M_{T\wedge n}$, M_T-re.

Adottak: $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$, $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. és

$$\mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \tfrac{1}{2}.$$

Legyen $S_n := S_0 + X_1 + \cdots + X_n$ és

$$\tau := \min \{n : S_n \notin (a, b)\}.$$

Kilépési eloszlások (cont.)

Nyilván: S_n martingál és τ megállási idő. Ha meg akarjuk határozni $\mathbb{E}_x[\tau]$-t, akkor a következő heurisztika kínálkozik:

$$x \overset{?}{=} \mathbb{E}_x[S_\tau] = a \cdot \mathbb{P}_x(S_\tau = a) + b \cdot (1 - \mathbb{P}_x(S_\tau = a)). \quad (27)$$

Ha ez igaz, akkor:

$$\mathbb{P}_x(S_\tau = a) = \frac{b-x}{b-a}. \quad (28)$$

A fenti gondolatmenet azért csak heurisztika mert a (27) formula első egyenlősége helyett, a 34.Tétel csak

Kilépési eloszlások (cont.)

$x = S_{\tau\wedge n}$-t garantálja. Mikor hagyhatjuk el a $\wedge n$-et? Először is lássunk egy esetet amikor nem:

Legyen $V_a := \min \{n : S_n = a\}$. Emlékezzünk, hogy a B-file (**??**) formulában igazoltuk, hogy $\forall N > 0$-ra:

$$\mathbb{P}_1(V_N < V_0) = \frac{1}{N}. \quad (29)$$

Tehát $\mathbb{P}_1(V_0 < \infty) = 1$. Valamely $n \in \mathbb{N}$-re:

$$T := V_0 \text{ és } \widetilde{T}_n := \min\{V_0, V_n\}.$$

Kilépési eloszlások (cont.)

Ekkor T és $\widetilde{T}_n$ nyilván megállási idők. A (29) formulából látható, hogy

$$\mathbb{E}_1\left[S_{\widetilde{T}_n}\right] = 0 \cdot \mathbb{P}_1(V_0 < V_n) + n \cdot \underbrace{\mathbb{P}_1(V_n < V_0)}_{1/n} = 1.$$

Vagyis is itt eldobhattuk a $\wedge n$-et. Viszont

$$1 \neq 0 = \mathbb{E}_1[S_T].$$

Vagyis a T esetében $\wedge n$ nem hagyható el. A következő tétel megmutatja mikor hagyható el a $\wedge n$.

Kilépési eloszlások (cont.)

TÉTEL 35

Tegyük fel, hogy hogy T megállási idő, amelyre

- $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ és
- $\exists K$, hogy $|M_{T\wedge n}| \leq K$.

Ekkor $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$.

Bizonyítás. A 34. Tételből:

$$\mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[M_T; T \leq n] + \mathbb{E}[\underbrace{M_n}_{=M_{T\wedge n} \leq K}; T > n].$$

Kilépési eloszlások (cont.)

Tehát

$$|\mathbb{E}[M_0] - \mathbb{E}[M_T; T \le n]| \le K\mathbb{P}(T > n) \to 0. \quad (30)$$

Másrészt

$$\mathbb{E}[M_T] - \mathbb{E}[M_T; T \le n] = \mathbb{E}[M_T; T > n]. \quad (31)$$

Kilépési eloszlások (cont.)

Using that

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[M_T; T > n]| &\le \sum_{k=n+1}^{\infty} |\mathbb{E}[M_k; T = k]| \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} |\mathbb{E}[M_{k\wedge T}; T = k]| \\ &\le K \cdot \mathbb{P}(T > n) \to 0. \end{aligned}$$

Összetéve ezt a (30) és a (31) formulákat kapjuk a bizonyítást. ■

Wald egyenlőtlenség

Legyen $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Legyen $S_n := S_0 + X_1 + \cdot + X_n$. Tudjuk, hogy ekkor $M_n - n\mu$ egy martingál X_n-re.

TÉTEL 36 (Wald egyenlőtlenség)

$$\mathbb{E}[S_T - S_0] = \mu\mathbb{E}[T].$$

A tétel bizonyítása (l. [3]) túl komplikált ahhoz, hogy itt elmondjuk. Mindenestre vegyük észre, hogy az $S_0 = 1$-ből induló egyszerű szimmetrikus véletlen séta

Wald egyenlőtlenség (cont.)

esetén ha $T = V_0$ a nullába való első érkezés ideje: $\mu = 0$, $S_0 = 1$, $S_T = 0$, tehát

$$-1 = \mathbb{E}[S_T - S_0] = \mu\mathbb{E}[V_0]$$

formulából: $\mathbb{E}_1[V_0] = \infty$.

Konvergencia

TÉTEL 37 (Konvergencia tétel)

Ha $X_n \ge 0$ egy szupermartingál, akkor $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n$ létezik és $\mathbb{E}[X_\infty] \le \mathbb{E}[X_0]$.

A tétel bizonyítása előtt egy segéd lemma:

LEMMA 38

Legyen $X_n \ge 0$ egy szupermartingál és $\lambda > 0$. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\max_{n\ge0} X_n > \lambda\right) \le \mathbb{E}[X_0]/\lambda. \quad (32)$$

A segéd Lemma bizonyítása

Legyen $T := \min\{n : X_n > \lambda\}$. Vegyük észre, hogy

$$\{T < \infty\} = \left\{\max_{n\ge0} X_n > \lambda\right\} \quad (33)$$

A 34. Tételből következik, hogy

$$\mathbb{E}[X_0] \ge \mathbb{E}[X_{T\wedge n}] \ge \lambda\mathbb{P}(T \le n).$$

Tehát

$$\forall n\text{-re: } \mathbb{P}(T \le n) \le \mathbb{E}[X_0]/\lambda.$$

Innen $\mathbb{P}(T < \infty) \le \mathbb{E}[X_0]/\lambda$. Ebből pedig a (22) formula miatt következik a Lemma állítása. ■

A 37. Tétel bizonyításának vázlata

Legyen $S_0 := 0$, $a < b$ és definiáljuk a következő megállási időket:

$$\begin{aligned} R_k &:= \min\{n \ge S_{k-1} : X_n \le a\} \\ S_k &:= \min\{n \ge R_k : X_n \ge b\}. \end{aligned}$$

A segéd lemma bizonyításának gondolatmenetével kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(S_k < \infty | R_k < \infty) \le \frac{a}{b}.$$

A 37. Tétel bizonyításának vázlata (cont.)

Ezt iterálva

$$\mathbb{P}(S_k < \infty) \le \left(\frac{a}{b}\right)^k \to 0 \text{ exponenciális sebességgel}.$$

Ezért X_n csak véges sokszor metszi át az $[a, b]$ intervallumot alulról felfelé. Legyen

$$Y := \liminf_{n\to\infty} X_n \text{ és } Z := \limsup_{n\to\infty} X_n$$

Ha $\mathbb{P}(Y < Z) > 0$ lenne, akkor valamely $a < b$-re szintén:

$$\mathbb{P}(Y < a < b < Z) > 0.$$

A 37. Tétel bizonyításának vázlata (cont.)

Ebben az esetben X_n az $[a, b]$ intervallumot alulról felfelé végtelen sokszor átmetszené, ami nem lehetséges, vagyis $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ határérték létezik. Másrészt minden n, M-re:

$$\mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_n] \geq \mathbb{E}[X_n \wedge M] \to \mathbb{E}[X_\infty \wedge M].$$

Tehát

$$\mathbb{E}[X_0] \geq \mathbb{E}[X_\infty \wedge M] \uparrow \mathbb{E}[X_\infty].$$

[1] Balázs Márton, Tóth Bálint
Valószínűségszámítás 1. jegyzet matematikusoknak és fizikusoknak
Balázs Márton Honlapja, 2012. Az internettes változatért kattintson ide.

[2] R. Durrett
Essentials of Stochastic Processes, Second edition
Springer, 2012. A majdnem kész változatért kattintson ide.

[3] R. Durrett
Probability Theory with examples, Second edition
Duxbury Press, 1996 . második kiadás.

[4] I.I. Gihman, A.V. Szkorohod
Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe
Műszaki Könyvkiadó1975, Budapest, 1985

[5] S. Karlin, H.M. Taylor
Sztochasztikus Folyamatok
Gondolat, Budapest, 1985

[6] S. Karlin, H.M. Taylor
A second course in stochastic processes
, Academic Press, 1981

[7] G. Lawler
Intoduction to Stochastic Processes
Chapmann & Hall 1995.

[8] D.A. Levin, Y. Peres,E.L. Wilmer
Markov chains and mixing times
American Mathematical Society, 2009.

[9] Major Péter
Folytonos idejű Markov láncok
http://www.renyi.hu/~major/debrecen/debrecen2008a/markov3.html

[10] Piet Van Mieghem
The Poisson process
http://www.nas.its.tudelft.nl/people/Piet/CUPbookChapters/PACUP_Poisson.pdf

[11] Rényi Alfréd
Valószínűségszámítás, (negyedik kiadás)
Tankönyvkiadó Budapest, 1981.

[12] Tóth Bálint *Sztochasztikus folyamatok jegyzet*
Tóth Bálint Jegyzetért kattintson ide

Index