Sztochasztikus folyamatok

Simon Károly
Ez az előadás
Rick Durrett Essentials of Stochastic processes
könyvére épül

Department of Stochastics
Institute of Mathematics
Technical University of Budapest
www.math.bme.hu/~simonk

D file 2015-04-08

Ismétlés: exponenciális eloszlás

Ebben a részben a [2, Chapter 2]-t követjük.

Ismétlés: exponenciális eloszlás (cont.)

DEFINÍCIÓ 1

Azt mondjuk, hogy a T egy λ paraméterű exponenciális eloszlású v.v. jelben $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ ha

$$\mathbb{P}(T \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} \text{ minden } t \geq 0 \text{ -ra.}$$

Vagy ami ezzel ekvivalens: a T sűrűségfüggvénye

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}, & \text{ha } t \geq 0; \\ 0, & \text{ha } t < 0. \end{cases}$$

Ismétlés: exponenciális eloszlás (cont.)

Az exponenciális eloszlás néhány tulajdonsága (l. [2, Chapter 2]). Legyenek $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $T_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, n$, függetlenek.

(a) $\mathbb{P}(T > t + s | T > t) = \mathbb{P}(T > s)$.
Örök ifjú tulajdonság.

(b) $\mathbb{E}[T] = 1/\lambda$ and $\mathrm{Var}(T) = 1/\lambda^2$.

(c) Ha $S \sim \mathrm{Exp}(1)$, akkor $S/\lambda \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

(d1) Az $\mathrm{Exp}(\lambda)$ az egyetlen eloszlás amely teljesíti a következő feltételt:

$$\mathbb{P}(t < X < t + \Delta t | X > t) = \lambda \Delta t + \mathfrak{o}(\Delta t). \tag{1}$$

Ismétlés: exponenciális eloszlás (cont.)

(d2) Legyen $T_{\min} := \min\{T_1, \dots, T_n\}$ és $I \in \{1, \dots, n\}$ az az index amire $T_I = T_{\min}$. Ekkor $T_{\min}$ és I függetlenek és $T_{\min} \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$ és

$$\mathbb{P}(I = i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}.$$

Ebből következik, hogy

Ismétlés: exponenciális eloszlás (cont.)

(e) Ha van n darab μ paramétrű független exponenciális órám és t egy nagyon kicsi szám. Annak a valószínűsége, hogy az első óra a $[0, t]$ intervallumban üt körülbelül μt. Vagyis,
$\lim_{t \to 0} \mathbb{P}(\min\{T_1, \dots, T_n\} < t)/t = n\mu$.

Ismétlés: exponenciális eloszlás (cont.)

(f) Ha $T_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, függetlenek, akkor $T = T_1 + \cdots + T_n$ eloszlása (n, λ) paraméterű gamma eloszlás. Vagyis

$$f_T(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \text{ ha } t \geq 0. \tag{2}$$

Ismétlés: Az X, (α, λ)-paraméterű Gamma eloszlás sűrűség függvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{ha } x \geq 0; \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Ismétlés: exponenciális eloszlás (cont.)

és $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-y} y^{\alpha-1} dy$.

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\gamma} \text{ és } \mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

(g) Legyen $M_2 := \max\{T_1, T_2\}$. Ekkor

$$M_2 = T_1 + T_2 - \min\{T_1, T_2\}.$$

Tehát a fentiekből:

$$\mathbb{E}[M_2] = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (3)$$

Poisson eloszlás: ismétlés

$X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, ha

$$\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}, \text{ ha } n = 0, 1, 2, \dots$$

A Poisson eloszlás tulajdonságai: Legyen $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ és $X_i \sim \mathrm{Poi}(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, n$ függetlenek. Ekkor

(i) $\mathbb{E}[T] = \mathrm{Var}(T) = \lambda$.

(ii) Legyen $p(n) \in (0,1)$: $n \cdot p(n) \to \lambda$ és $Y_n = \mathrm{Binom}(n, p(n))$. Ekkor $\forall i$-re:
$\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n = i) = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}$.

(iii) $X_1 + \dots + X_n = \mathrm{Poi}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.

Poisson folyamat: Ismétlés

Itt [6, Chapter 3]-at követjük. Ebben a fejezetben az idő $t \in [0, \infty)$ folytonos. Legyen $N(t)$ azon vásárlók száma akik egy boltba érkeznek t idővel bezárólag. Három feltételt teszünk a vásárlók beérkezésének rátájával kapcsolatban.

(i) Ha $I_1, I_2 \subset [0, \infty)$ diszjunkt, akkor az I_1-ben és az I_2-ben érkező vásárlók száma független.

(ii) Tetszőleges kicsi időintervallumban az átlagosan beérkező vásárlók száma osztva az idő intervallum hosszával egy konstanshoz tart.

(iii) A vásárlók egyesével érkeznek.

Poisson folyamat: Ismétlés (cont.)

Ezeket pontosabban megfogalmazva:

(i') Tegyük fel, hogy $N(0) = 0$ és minden $s_1 \le t_1 \le s_2 \le t_2 \le \dots \le s_n \le t_n$. esetén $N(t_1) - N(s_1), \dots, N(t_n) - N(s_n)$ v.v. függetlenek.

(ii')

$$\mathbb{P}(N(t + \Delta t) = N(t)) = 1 - \lambda \Delta t + \mathfrak{o}(\Delta t). \quad (4)$$

$$\mathbb{P}(N(t + \Delta t) = N(t) + 1) = \lambda \Delta t + \mathfrak{o}(\Delta t). \quad (5)$$

(iii')

$$\mathbb{P}(N(t + \Delta t) \ge N(t) + 2) = \mathfrak{o}(\Delta t). \quad (6)$$

Poisson folyamat: Ismétlés (cont.)

Jelölés: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\mathfrak{o}(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.

Poisson folyamat: Ismétlés (cont.)

DEFINÍCIÓ 2

Ha valamely események (új vevő jön a boltba, megcsörren a telefon) a fenti (i')-(iii') feltételeknek megfelelően következnek be, akkor a t ideig bekövetkező események $N(t)$ számát $\mathrm{Poisson}(\lambda)$ folyamatnak nevezzük. Ezen események között eltelt idő intervallumok hossza (inter event times) rendre: $\tau_1, \tau_2, \dots$. Az n-edik esemény bekövetkezésének időpontja:

$$T_n := \tau_1 + \dots + \tau_n. \quad (7)$$

Tehát $N(s) = \max\{n : T_n \le s\}$.

TÉTEL 3

(a) Egy adott t_0 hosszúságú $I \subset \mathbb{R}^+$ idő intervallumban bekövetkező események száma:

$$\#\{k : T_k \in I\} = \mathrm{Poi}(\lambda \cdot t_0)$$

(b) A $\tau_1, \tau_2, \dots$ függetlenek és $\tau_i = \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Bizonyítás. Ezen tétel (a) részét a Valszám 1-ben lényegében igazolták l. [1, 43. old.]. A (b) rész a (4) és az (5) formulákból elemi számolással adódik. Nevezetesen: az nyilvánvaló, hogy τ_i i.i.d. r.v.

Most megmutatjuk, hogy τ_k eloszlása $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

Legyen $x > 0$ és egy nagy n-re $\Delta t = \frac{x}{n}$. Legyen $y \ge 0$ tetszőleges és

$$F_\ell(x) := \mathbb{P}(T_\ell \le y + x | T_{\ell-1} = y).$$

Most felosztjuk $[y, y + x]$-et

$$\{I_k = [y + (k-1)\Delta t, y + k\Delta t]\}_{k=1}^n.$$

$F_\ell(x)$ azon valószínűségek összege, hogy az ℓ-edik esemény I_k-ban következett be. Vagyis:

$$\begin{aligned} F_\ell(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda\Delta t(1-\lambda\Delta t)^{k-1} + n\cdot\mathfrak{o}(\Delta t) \\ &= \lambda\Delta t \sum_{k=0}^{n-1}(1-\lambda\Delta t)^k + n\cdot\mathfrak{o}(\Delta t) \\ &= 1-(1-\lambda\Delta t)^n + n\cdot\mathfrak{o}(\Delta t) \\ &= 1-\left(1-\lambda\frac{x}{n}\right)^n + n\cdot\mathfrak{o}\left(\frac{x}{n}\right) \end{aligned}$$

Használva, hogy x rögzített az utolsó tag 0-hoz tart ha $n\to\infty$. Ezért tehát

$$F_\ell(x) = 1 - e^{-\lambda x}. \tag{8}$$

Ha $\ell=1$ a fentieket alkalmazva $T_0=0$-ra kapjuk, hogy $\tau_1=\mathrm{Exp}(\lambda)$. Ezek után indukcióval és a teljes valószínűség tételével kapjuk, hogy $\tau_\ell=\mathrm{Exp}(\lambda)$. Az, hogy $\{\tau_1,\tau_2,\dots\}$ függetlenek szintén következik a (8) formulából. ■

DEFINÍCIÓ 4

Azt mondjuk, hogy a nem-negatív egész számokat felvevő ξ valószínűségi változó egy λ intenzitású Poisson pontfolyamat az $\mathbb{R}^d$-n , ha

1. A $\xi(A_1),\dots,\xi(A_n)$ valószínűségi változók függetlenek, ha $A_1,\dots,A_n$ páronként diszjunkt,
2. Minden korlátos A halmazra, a $\xi(A)$ eloszlása egy $\lambda\cdot\mathcal{L}\mathrm{eb}_d(B)$ paraméterű Poisson eloszlás.

Poisson folyamatok

TÉTEL 5

Feltételezve, hogy egy tetszőleges $[0,t_0]$ idő intervallumban a Poisson folyamat egyetlen eseménye következett be, ezen esemény bekövetkezésének időpontja egyenletes eloszlású a $[0,t_0]$ intervallumon.

Poisson folyamatok (cont.)

Bizonyítás. Valamely $0\le s\le t_0$-re legyen $\mathfrak{P}:=\mathbb{P}(\tau_1\le s|X_{t_0}=1)$. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \frac{\mathbb{P}(\{\tau_1\le s\}\cap\{N(t_0)=1\})}{\mathbb{P}(N(t_0)=1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\{N(s)=1\}\cap\{N(t_0)=1\})}{\mathbb{P}(N(t_0)=1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\{N(s)=1\}\cap\{N(t_0)-N(s)=0\})}{\mathbb{P}(N(t_0)=1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\{N(s)=1\})\cdot\mathbb{P}(\{N(t_0-s)=0\})}{\mathbb{P}(N(t_0)=1)} \\ &= \frac{(\lambda s)e^{-\lambda s}\cdot e^{-\lambda(t_0-s)}}{(\lambda t_0)e^{-\lambda t_0}} = \frac{s}{t_0}. \end{aligned}$$

Poisson folyamatok (cont.)

■ Hasonló gondolatmenetet követve igazolható (lásd [9, 126.oldal])

TÉTEL 6

Legyen $0=s_0<s_1\le\dots<s_n<t$ és legyen

$$F(s_1,\dots,s_n) := \mathbb{P}(T_1\le s_1,\dots,T_n\le s_n|X_t=n).$$

Ekkor

$$F(s_1,\dots,s_n) = \frac{n!}{t^n}\prod_{j=1}^{n}(s_j-s_{j-1}). \tag{9}$$

Poisson folyamatok (cont.)

Ez az jelenti, hogy: Legyenek

$$U_1,\dots,U_n$$

független egyenletes eloszlású v.v. a $[0,t]$-n. Ezekből nagyság szerinti sorba rendezéssel kapjuk a

$$V_1<\dots<V_n$$

valószínűségi változókat.

TÉTEL 7

Feltételezve, hogy $N(t)=n$, a $(T_1,\dots,T_n)$ eloszlása ugyanaz mint a fent definiált $(V_1,\dots,V_n)$ eloszlása.

Poisson folyamatok: két hiányosság

Tekintsünk egy konkrét példát:

KÉRDÉS 8

Hány hallgató érkezik a Stoczek menzára 11:00 és 13:00 között?

Ha ennek a kérdésnek a megválaszolására a Poisson folyamatot mint matematikai modellt akarjuk alkalmazni, akkor ellenőriznünk kell, hogy a 11. slide-on bevezetett definíció (i)-(iii) feltételei teljesülnek-e. Ezzel a következő két súlyos probléma van:

Poisson folyamatok: két hiányosság (cont.)

(a) a 11. slide-on az (ii) szerint egy adott intervallumban érkező hallgatók száma kb. az idő intervallum hossza szorozva egy konstanssal.

(b) a 11. slide-on az (iii) szerint a hallgatók egyesével érkeznek.

Poisson folyamatok: két hiányosság (cont.)

Gondoljuk meg, hogy abban az időszakban amikor a nagy előadások befejeződnek sokkal több hallgató megy a menzára mint egyébként ((a) nem teljesül) és sokszor a hallgatók baráti köre együtt, egyszerre megy a menzára ((b) nem teljesül). Ettől még a Poisson folyamat valamely variánsát alkalmazhatjuk a fenti kérdés megválaszolására az alábbiak szerinti módosításokkal:

- Az (a)-ban említett nehézség leküzdésére a nem-homogén Poisson folyamatot alkalmazzuk.

Poisson folyamatok: két hiányosság (cont.)

- A (b)-beli probléma kezelésére vezetjük be a Compund Poisson folyamatot.

DEFINÍCIÓ 9 (nem-homogén Poisson folyamat)

1. Azt mondjuk, hogy az $\{N(s) : s \geq 0\}$ nem-homogén $\lambda(r)$ rátájú Poisson folyamat ha
2. $N(0) = 0$,
3. $N(t)$ növekményei függetlenek,
4. $N(t) - N(s) = \mathrm{Poi}\left(\int_s^t \lambda(r)dr\right)$.

Vigyázat: Ebben az esetben, a Poisson folyamattal ellentétben, az események bekövetkezése közötti ú.n. inter even time $\tau_1, \tau_2, \ldots$-ra:

- $\tau_1, \tau_2, \ldots$ NEM függetlenek,

- τ_i, $i = 1, 2, \ldots$ NEM exponenciális eloszlásúak.

Nevezetesen: legyen $\mu(t) := \int_0^t \lambda(x)dx$. Ekkor Házi feladat megmutatni, hogy ha f_{τ_1} a τ_1-nek a sűrűség függvénye és f_{τ_1,τ_2} a (τ_1, τ_2)-nek az együttes sűrűség függvénye, akkor:

1. $f_{\tau_1}(t) = -\frac{d}{dt}\mathbb{P}(\tau_1 > t) = \lambda(t)e^{-\mu(t)}$.
2. $f_{\tau_1,\tau_2}(s, t) = \lambda(s)e^{-\mu(t)} \cdot \lambda(s+t)e^{-(\mu(s+t)-\mu(s))}$.

Tehát, ha $\lambda(r)$ nem konstans, akkor τ_1 nem exponenciális és τ_1, τ_2 nem függetlenek.

Legyen $\{N(s) : s \geq 0\}$ nem-homogén $\lambda(r)$ rátájú nem-homogén Poisson folyamat. Legyen

$$\lambda_{a,b} := \int_a^b \lambda(r)dr.$$

Ekkor

$$\mathbb{P}(N(b) - N(a) = \ell) = \frac{e^{-\lambda_{a,b}} \cdot {\lambda_{a,b}}^{\ell}}{\ell!}, \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots \tag{10}$$

A λ-paraméterű Poisson-folyamatra:

$$\mathbb{P}(N(b) - N(a) = \ell) = \frac{e^{-\lambda\cdot(b-a)}(\lambda\cdot(b-a))^{\ell}}{\ell!}, \ell = 0, 1, 2, . \tag{11}$$

Compound Poisson folyamatok

PÉLDA 10 (Motiváló példa)

Észszerű feltételezni, hogy egy McDonald étterem autós kiszolgáló részlegéhez 12 : 00 és 13 : 00 között érkező autók száma $\mathrm{Poi}(\lambda)$. Legyen $N(t)$ a $12 + t$ óráig beérkező autók száma. Legyen Y_i az i-edik autóban ülő vásárlók száma. Feltehető, hogy Y_i i.i.d. (independent identically distributed) és, hogy Y_i független az érkezési időktől. Ekkor a t ideig beérkező vendégek száma

$$S(t) = Y_1 + \cdots + Y_{N(t)}.$$

Compound Poisson folyamatok (cont.)

TÉTEL 11

(Ez volt [1, 7.38. Példa].) Legyen $Y_1, Y_2, \ldots$ i.i.d. r.v. és adott a tőlük független N v.v., amely értékeit $\mathbb{N}$-ből veszi fel. Legyen

$$S := Y_1 + \cdots + Y_N.$$

Ekkor

1. Ha $\mathbb{E}[Y_i], \mathbb{E}[N] < \infty \Rightarrow \mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[Y_i]$.
2. Ha $\mathbb{E}\left[Y_i^2\right], \mathbb{E}\left[N^2\right] < \infty \Rightarrow \mathrm{Var}(S) = \mathbb{E}[N]\mathrm{Var}(Y_i) + \mathrm{Var}(N)(\mathbb{E}[Y_i])^2$.
3. Ha $N = \mathrm{Poisson}(\lambda) \Rightarrow \mathrm{Var}(S) = \lambda\mathbb{E}\left[Y_i^2\right]$.

Thinning

Legyen $N(t) = \mathrm{Poisson}(\lambda)$ és az i-edik bekövetkező eseményhez asszociáljuk az Y_i i.i.d. r.v., amelyek függetlenek $N(t)$-től és értékeiket $\mathbb{N}$-ből veszik fel.

$$N_j(t) := \#\{i \leq N(t) : Y_i = j\}.$$

TÉTEL 12

Minden t-re, $N_j(t) = \mathrm{Poisson}(\lambda \cdot \mathbb{P}(Y_i = i))$ független v.v.

A bizonyítás megtalálható: [2, Section 2.4].

Felújítási folyamatok

Definíció: A Poisson folyamatok esetén az inter event time-ok i.i.d exponenciális v.v. Ennek általánosítása a Felújítási folyamat, ahol az inter event time-ok i.i.d. v.v. de nem feltétlenül exponenciális eloszlásúak, hanem mondjuk az eloszlás függvényük egy adott F, amelyre $F(0)=0$.

Felújítási folyamatok (cont.)

PÉLDA 13 (Gép javítás)

Egy gép D_k ideig dolgozik majd J_k ideig javítják. Legyen $T_k := D_k + J_k$ a k-adik ciklus hossza. Ha a felújítás a gépet lényegében új szerű állapotba hozza, akkor T_i-k függetlenek és egy felújítási folyamatot kaptunk.

Felújítási folyamatok (cont.)

PÉLDA 14 (Számláló folyamat)

Ha az előbbi példában $J_k \equiv \tau$ fix időtartam és $D_k = \mathrm{Exp}(\lambda)$ a következő orvosi alkalmazást kapjuk: részecskék érkeznek egy számlálóba $\mathrm{Poisson}(\lambda)$ eloszlás szerint és eltorlaszolják a számlálót egy τ fix időtartamra. Az ezen intervallum alatt érkező részecskéknek nincs hatása. Ezután a számláló újra szabaddá válik. Legyen T_n azon pillanat, amikor a számláló szabaddá válik az n-edik alkalommal. Ekkor T_n felújítási folyamat.

Felújítási folyamatok (cont.)

TÉTEL 15

Legyen μ az inter arrival time-ok várható értéke és $N(t)$ az érkezések száma t-ig. Ekkor

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \mu.$$

A tétel bizonyítása a Nagy Számok Erős Törvényéből könnyen következik. (L. [2, 120. oldal]).

$GI/G/1$ sorban állás

- GI : general input. Azaz a τ_i inter even times i.i.d. v.v. és eloszlás függvényük F, várható értékük $1/\lambda$. Azért $1/\lambda$ mert ekkor a 15. Tételből:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_i]} = \lambda. \tag{12}$$

- G Az i-edik ügyfél kiszolgálási ideje i.i.d. v.v. G eloszlás függvénnyel és $1/\mu$ várható értékkel.
- 1 Egy kiszolgáló van.

$GI/G/1$ sorban állás (cont.)

TÉTEL 16

Ha $\lambda < \mu$ és a sorban véges sok ügyfél van, akkor véges időn belül a sor kiürül.

Folytonos idejű MC, bevezetés

DEFINÍCIÓ 17

Az X_t, $t \geq 0$ egy folytonos idejű Markov lánc (MC) ha minden i, j-re és minden $0 \leq s, t$-re

$$\mathbb{P}\left(X_{t+s} = j | X_s = i\right) = \mathbb{P}\left(X_t = j | X_0 = i\right) =: p_t(i,j).$$

Folytonos idejű MC, bevezetés (cont.)

Folytonossági feltétel: Csak azokat az eseteket nézzük amikor A $P_t = (p_t(i,j))_{ij \in S}$, $t > 0$ átmenetvalószínűség mátrixokra teljesül, hogy:

$$\lim_{t \to 0} p_t(i,j) = \delta_{i,j}. \tag{13}$$

Chapman-Kolmogorov

LEMMA 18 (Chapman-Kolmogorov egyenlőség:)

$$\sum_k p_s(i,k) p_t(k,j) = p_{s+t}(i,j). \tag{14}$$

Vagyis

$$P_{t+s} = P_t \cdot P_s. \tag{15}$$

Bizonyítás. Ahhoz, hogy a lánc $s + t$ idő alatt i-ből j-be érjen s idő után kell hogy valahol legyen. Ezek után a Markov tulajdonságból következik az állítás. ■

Ugrás diszkrét MC + Poisson(λ) szerint

PÉLDA 19

Legyen Y_n egy diszkrét idejű MC, melynek átmenetvalószínűség mátrixa: $U = (u(i,j)_{i,j \in S})$. Legyen $N(t) = \mathrm{Poisson}(\lambda)$. Ekkor

$$X_t = Y_{N(t)}$$

egy folytonos idejű MC.

Legyen $u^n(i,j)$ az U^n mátrix (i,j)-edik eleme. Mivel minden rögzített t-re az $N(t)$ eloszlása $\mathrm{Poi}(\lambda t)$, ezért

Ugrás diszkrét MC + Poisson(λ) szerint (cont.)

annak valószínűsége, hogy a t-ig pontosan n ugrás volt $e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$. Ezért

$$p_t(i,j) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} u^n(i,j).$$

Infinitezimális generátor

Chapman-Kolmogorov egyenlőségből adódik, hogy ha tudjuk az átmenetvalószínűség mátrixokat kis t-re, akkor minden t-re tudjuk, hiszen $P_{nh} = (P_h)^n$. Ez adja az ötletet, hogy ha az átmenet valószínűség mátrixok 0-ban való deriváltját tudjuk akkor minden t-re tudjuk az átmenetvalószínűség mátrixot.

Infinitezimális generátor (cont.)

DEFINÍCIÓ 20 ($i \to j$ ugrási ráta)

Az i-ből j-be ugrás rátája:

$$q(i,j) := \lim_{h \to 0} \frac{p_h(i,j)}{h}, \text{ ha } i \neq j \tag{16}$$

ha a limesz létezik. Legyen

$$\lambda_i := \sum_{j \neq i} q(i,j)$$

A Q infinitizális generátor mátrix $q(i,j)$ elemét definiáltuk fent, ha $i \neq j$. Legyen $q(i,i) := -\lambda_i$.

Infinitezimális generátor III

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & q(1,2) & q(1,3) & \cdots \\ q(2,1) & -\lambda_2 & q(2,3) & \cdots \\ q(3,2) & q(3,2) & -\lambda_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Nyilván

$$\forall i\text{-re: } \sum_j q(i,j) = 0. \tag{17}$$

A következők bizonyítása meghaladja ezen kurzus kereteit. A bizonyítások megtalálhatóak: [5, 1.1 és 1.2 Tételek].

Mikor létezik a (16)-beli határérték?

Általános végtelen állapotterű, folytonos idejű MC esetén a

$$\lim_{h\to 0+} \frac{p_h(i,j)}{h} = q(i,j),\ i \neq j \text{ és } \lim_{h\to 0+} \frac{1-p_h(i,i)}{h} = \lambda(i) \tag{18}$$

határértékek léteznek és

$$0 \leq q(i,j) < \infty, i \neq j \text{ de } 0 \leq \lambda(i) \leq \infty.$$

Tehát $q(i,j)$ véges, de $\lambda(i)$ lehet, hogy végtelen. Ha $\#S < \infty$ akkor persze $\lambda(i)$ is véges.

Ugrási ráta a 19. Példára

A $[0,h]$ intervallumon legfeljebb 1 ugrás van ha $h>0$ kicsi. Annak, hogy van 1 ugrás a valószínűsége: $\lambda h e^{-\lambda h}$. Vagyis

$$\frac{p_h(i,j)}{h} \approx \lambda e^{-\lambda h} \cdot u(i,j) \to \lambda u(i,j), \text{ amint } h \to 0.$$

Tehát a 19. Példában:

$$q(i,j) = \lambda u(i,j) \text{ ha } i \neq j.$$

Általában az ellentétes irányban haladunk, tehát a feladatból közvetlen felírjuk az ugrási rátákat, és ebből határozzuk meg az átmenetvalószínűség mátrixot. Például ha $X_t = \mathrm{Poisson}(\lambda)$, akkor

Kolmogorov féle forward és backward differenciálegyenletek

A 31. Lemmában megfogalmaztuk a Kolmogorov-féle forward differenciálegyenletet:

$$\frac{d}{dt}P_t = P_t \cdot Q \tag{19}$$

A kolmogorov-féle backward differenciálegyenlet:

$$\frac{d}{dt}P_t = Q \cdot P_t. \tag{20}$$

Kolmogorov féle forward és backward differenciálegyenletek (cont.)

Ezeknek az egyenleteknek nagyon fontos szerepe van, de tanulmányozásuk meghaladja ezen kurzus kereteit.
Javasolt olvasmány: Major Péter: A folytonos idejű Markov láncokról szóló előadása:
klikeljen ide
Itt csak néhány észrevétel következik.
A $\frac{d}{dt}P_t = P_tQ$ forward egyenlet teljesülésének **feltételei**:

- **(F1)** A (16) formulában definiált $\lambda(i) < \infty$, $\forall i$.

Kolmogorov féle forward és backward differenciálegyenletek (cont.)

- **(F2)** Minden rögzített j-re a (16) formulabeli konvergencia i-ben egyenletes.

Ezen feltételek mellett az a bizonyítás amit majd az $\#S < \infty$ speciális esetre adunk a 75. slideon lépésről lépésre működik.
A backward egyenlethez csak a fenti (F1)-et kell megkövetelni. Ez utóbbi állítás bizonyítása hosszabb és megtalálható [8, 10. oldal]. Ne felejtsük el, hogy mi feltettük, hogy mindig, hogy (13) teljesül (csak a 0-ban

Kolmogorov féle forward és backward differenciálegyenletek (cont.)

folytonos átmenetvalószűnűségekkel rendelkező láncokat nézünk) és emlékezzünk a 49. slideon a diszkusszióra.

Exponenciális várakozási idők

Minden $x \in S$-re legyen T_x az az idő amit a lánc az x-ben tölt azután, hogy az x állapotba jutott.

LEMMA 21

Tegyük fel, hogy minden x-re $\lambda_x < \infty$. Minden $x \in S$-re, $T_x = \mathrm{Exp}(\lambda_x)$ és $\{T_x\}_{x\in S}$ függetlenek.

Bizonyítás. Legyen

$$G_x(t) := \mathbb{P}(T_x \geq t).$$

Exponenciális várakozási idők (cont.)

Markov tulajdonság miatt $h \to 0$ esetén:

$$\begin{aligned} G_x(t+\Delta t) &= G_x(t)G_x(\Delta t) = \\ &= G_x(t)\left[1 - \lambda(x)\Delta t + \mathfrak{o}(\Delta t)\right] \end{aligned}$$

$$G_x'(t) = -\lambda(x)G_x(t).$$

Mivel $G_x(0) = 1$, innen adódik, hogy

$$1 - \mathbb{P}(T_x < t) = G_x(t) = e^{-t\lambda(x)}.$$

Tehát $T_x = \mathrm{Exp}(\lambda_x)$. Az nyilvánvaló a Markov tulajdonságból, hogy $\{T_x\}_{x\in S}$ függetlenek. ∎

Exponenciális várakozási idők (cont.)

LEMMA 22

Tegyük fel, hogy minden x-re $\lambda_x < \infty$. Minden $x \in S$-re, amikor a lánc elugrik, x-ből, $r(x,y) = \frac{q(x,y)}{\lambda_x}$ valószínűséggel ugrik y-ba.

Bizonyítás. Legyen $U(x,y)$ az az esemény, hogy amikor a lánc kiugrik x-ből, akkor y-ba ugrik. Legyen f a T_x sűrűség függvénye. Ekkor

$$\mathbb{P}(U(x,y)) = \int_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}(U(x,y)|T_x = t) \cdot f(t)dt \qquad (21)$$

Exponenciális várakozási idők (cont.)

Definíció szerint

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U(x,y)|T_x = t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbb{P}(X_{t+\Delta t} = y|X_t = x)}{\sum_{z \in S} \mathbb{P}(X_{t+\Delta t} = z|X_t = x)} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\lambda(x)\Delta t + o(\Delta t)}{q(x,y)\Delta t + o(\Delta t)} \\ &= \frac{q(x,y)}{\lambda(x)} \quad \forall t\text{-re}\end{aligned}$$

Innen és a (21) formulából következik a Lemma állítása.
■

Stationary distribution, ireducibilitás

Az itt bevezetésre kerülő definíciók akkor is érvényesek, ha $\#S = \infty$.

DEFINÍCIÓ 23

X_t irreducibilis, ha minden i állapotból minden j állapot elérhető véges sok lépésben. Vagyis, ha $\exists k_0 = i, k_1, \dots, k_{n-1}, k_n = j$, hogy

$$q(k_{\ell-1}, k_\ell) > 0, \quad \forall \ell = 1, \dots, n \qquad (22)$$

Stationary distribution, ireducibilitás (cont.)

LEMMA 24

Ha X_t irreducibilis, akkor $\forall t > 0$ és $\forall i,j$, $p_t(i,j) > 0$. (Nincs baj a periódussal.)

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $i,j \in S$-et és a 23. Definícióbeli $k_1, k_1, \dots, k_n$-et. A (16) és a (22) formulákból kapjuk, hogy $\exists h_0 > 0$, hogy minden $0 < h < h_0$-ra $p_h(k_{\ell-1}, k_\ell) > 0$. Innen

$$p_{h'}(i,j) > 0, \quad \forall h' < nh_0\text{-ra}. \qquad (23)$$

Stationary distribution, ireducibilitás (cont.)

Másrészt, tudjuk, hogy a j-beli várakozási idő exponenciális eloszlású. Ezért minden $s > 0$-ra:

$$p_s(j,j) \geq \mathbb{P}(T_j > s) = \exp(-s\lambda_j) > 0. \qquad (24)$$

Legyen $0 < h < h_0$ és $s > 0$ olyan hogy $t = s + nh$. Ekkor a (23) és a (24) formulákból:

$$p_t(i,j) \geq p_{nh}(i,j) \cdot p_s(j,j) > 0.$$

■

Stationary distribution, ireducibilitás (cont.)

DEFINÍCIÓ 25

A $\boldsymbol{\pi}$ valószínűségi vektort stacionárius állapotnak hívjuk, ha

$$\forall t > 0\text{-ra:} \quad \boldsymbol{\pi}^T \cdot P_t = \boldsymbol{\pi}^T, \qquad (25)$$

ahol Q az infinitezimális generátor mint mindig.

Mivel ezt nehéz minden t-re ellenőrizni ezért hasznos:

Stationary distribution, ireducibilitás (cont.)

LEMMA 26

$\boldsymbol{\pi}$ valószínűségi vektor stacionárius eloszlást határoz meg akkor és csak akkor, ha

$$\boldsymbol{\pi}^T \cdot Q = \mathbf{0}. \qquad (26)$$

Stationary distribution, ireducibilitás (cont.)

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{\pi}^T \cdot P_t = \boldsymbol{\pi}^T$. A harmadik lépésben a Kolmogorov féle forward d.e.-t használva:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\pi}^T \cdot P_t\right) \\ &= \sum_i \pi(i) \sum_k p_t'(i,k) \cdot q(k,j) \\ &= \sum_k \underbrace{\sum_i \pi(i) p_t(i,k)}_{\pi(k)} q(k,j).\end{aligned}$$

Stationary distribution, ireducibilitás (cont.)

Tehát $\boldsymbol{\pi}^T \cdot Q$ vektor j-edik eleme 0 minden j-re, vagyis $\boldsymbol{\pi}^T \cdot Q = \mathbf{0}$.
Fordítva: Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{\pi}^T \cdot Q = \mathbf{0}$. A második lépésben a Kolmogorov féle backwrad d.e.-t használva:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\sum_i \pi(i) p_t(i,j)\right) &= \sum_i \pi(i) p_t'(i,j) \\ &= \sum_i \pi(i) \sum_k q(i,k) p_t(k,j) \\ &= \sum_k \underbrace{\sum_i \pi(i) q(i,k)}_{0} p_t(k,j) = 0.\end{aligned}$$

Stationary distribution, ireducibilitás (cont.)

Tehát $\boldsymbol{\pi}^T P_t$ konstans vagyis egyenlő $\boldsymbol{\pi}^T P_0 = \boldsymbol{\pi}^T$-al. ■

TÉTEL 27

Ha a folytonos idejű MC irreducibilis és létezik a $\boldsymbol{\pi}$ stacionárius eloszlása, akkor

$$\lim_{t\to\infty} p_t(i,j) = \pi(j) \qquad (27)$$

Bizonyítás. A 24. Lemma miatt minden $h > 0$-ra P_h mátrix irreducibilis és aperiodikus. Ezért a B file **??**. Tétel miatt $\lim_{n\to\infty} p_{nh}(i,j) = \pi(j)$. ■

Detailed balance condition

A diszkrét idejű MC-re alkotott fogalmat kiterjesztve, azt mondjuk, hogy a detailed balance condition teljesül, ha:

DEFINÍCIÓ 28

$$\pi(k)q(k,j) = \pi(j)q(j,k), \quad \forall j \neq k.$$

TÉTEL 29

Ha (28) teljesül, akkor $\boldsymbol{\pi}$ stacionárius eloszlás.

Detailed balance condition (cont.)

Bizonyítás.

$$\sum_{k\neq j} \pi(k)q(k,j) = \pi(j)\sum_{k\neq j} q(k,j) = \pi(j)\lambda_j,$$

vagyis $\forall j$-re:

$$\sum_{k\neq j} \pi(k)q(k,j) - \pi(j)\lambda_j = 0.$$

A jobb oldal a $\boldsymbol{\pi}^T \cdot Q$ vektor j-edik komponense. ■

Adott rátákból a lánc ha $\#S < \infty$

Itt feltételezzük, hogy

$$\#S < \infty. \qquad (28)$$

Emlékeztető $q(i,j)$ jelentése: Ha $h > 0$ kicsi akkor

$$p_h(i,j) \approx h \cdot q(i,j).$$

A lánc az i állapotot

$$\lambda_i := \sum_{i\neq j} q(i,j)$$

Adott rátákból a lánc ha $\#S < \infty$ (cont.)

rátával hagyja el. Vagyis ha az i állapotból indulunk, akkor egy kicsi $h > 0$-ra, annak valószínűsége, hogy a lánc elugrik i-ből a $[0,h]$ időintervallumban egyenlő $\lambda_i \cdot h$-val. Mindig feltesszük, hogy $\lambda_i < \infty$. Ha $\lambda_i = 0$, akkor a folyamat az i állapotot sohasem fogja elhagyni. Bevezetjük az $(r(i,j)_{i,j})$ "routing" mátrixot:

$$r(i,j) = q(i,j)/\lambda_i, \text{ ha } i \neq j \text{ és } r(i,i) = 0. \qquad (29)$$

annak a valószínűsége, hogy ha egy kis $[0,h]$ időintervallumban a lánc elhagyja az i állapotot, akkor j-be ugrik. Az $R = (r(i,j))_{i,j}$ egy sztochasztikus mátrix.

Adott rátákból a lánc ha $\#S < \infty$ (cont.)

Az R-hez tartozó diszkrét idejű Y MC az az MC, amit a folytonos idejű X_t követ amikor ugrik.

A lánc informális konstrukciója:

Tegyük fel, hogy a lánc egy adott $t \geq 0$ időben az i állapotban van. Ha $\lambda_i = 0$, akkor a lánc mindörökre i-ben marad, ha $\lambda_i > 0$, akkor a lánc i ben marad egy $\mathrm{Exp}(\lambda_i)$ ideig majd ekkor $r(i,j)$ valószínűséggel ugrik j-be.

A 3. slide (d) pontját használva most elmondjuk ugyanezt másképpen:

Adott rátákból a lánc ha $\#S < \infty$ (cont.)

A fenti másképpen elmondva:

Minden $j \neq i$ állapotban ül egy $\mathrm{Exp}(q(i,j))$ paraméterű óra.

- A lánc akkor ugrik amikor az első óra megszólal
- és oda ugrik, ahol az első megszólaló óra van.

Mindezek a 21 és a 22 Lemmákból következnek (l.55 és 57. slideok). A következő definíció tulajdonképpen már a 20. slideon be lett vezetve, ez itt most csak amolyan emlékeztető:

DEFINÍCIÓ 30 (Q-rátájú folytonos idejű MC)

Az S véges állapottér minden x, y elemére adott a nem negatív $q(x,y)$ számok és képezzük a $\lambda(x) := \sum_y q(x,y)$ összeget. Azt mondjuk, hogy az X_t folytonos idejű MC Q rátákkal, ha $\forall x \neq y$-ra:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X_{t+\Delta t} = x | X_t = x\right) &= 1 - \lambda(x)\Delta t + \mathfrak{o}(\Delta t) \\ \mathbb{P}\left(X_{t+\Delta t} = y | X_t = x\right) &= q(x,y)\Delta t + \mathfrak{o}(\Delta t) \end{aligned} \tag{30}$$

Célunk, hogy meghatározzuk a P_t átmenetvalószínűség mátrixot $t > 0$-ra, amelynek elemei

$$p_t(x,y) = \mathbb{P}\left(X_t = y | X_0 = x\right).$$

LEMMA 31

P_t kielégíti a Kolmogorov-féle forward egyenletet:

$$\frac{d}{dt}P_t = P_t \cdot Q, \ P_0 = I, \tag{31}$$

ahol I az egység mátrix. Ennek megoldása:

$$P_t = e^{t \cdot Q}. \tag{32}$$

Bizonyítás. Már sokszor használtuk a következő jelölést:

$$\mathbb{P}_x\left(X_t = y\right) := \mathbb{P}\left(X_t = y | X_0 = x\right).$$

Rögzítsünk egy kis $t > 0$-át és $x, y \in S$-et. A teljes valószínűség tételét használva:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_x\left(X_{t+\Delta t} = y\right) - \mathbb{P}_x\left(X_t = y\right) \\ &\quad = \mathbb{P}_x\left(X_{t+\Delta t} | X_t = y\right) \cdot \mathbb{P}_x\left(X_t = y\right) \\ &+ \sum_{u \neq y} \mathbb{P}_x\left(X_{t+\Delta t} = y | X_t = u\right) \cdot \mathbb{P}_x\left(X_t = u\right) - \mathbb{P}_x\left(X_t = y\right) \\ &\quad = \left[1 - \lambda(x)\Delta t + \mathfrak{o}(\Delta t) - 1\right] \cdot \mathbb{P}_x\left(X_t = y\right) \\ &\qquad + \sum_{u \neq y} \left(\left[q(u,y)\Delta t + \mathfrak{o}(\Delta t)\right]\right) \cdot \mathbb{P}_x\left(X_t = u\right). \end{aligned}$$

Ha itt mind két oldalt elosztjuk Δt-vel, és $\Delta t \to 0$, akkor

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\mathbb{P}_x\left(X_t = y\right) \\ &= -\lambda(x)\mathbb{P}_x\left(X_t = y\right) + \sum_{u \neq y} q(u,y) \cdot \mathbb{P}_x\left(X_t = u\right). \end{aligned} \tag{33}$$

A fenti egyenletben a baloldal éppen a $\frac{d}{dt}P_t$ mátrix (x,y)-adik eleme, míg a jobb oldal éppen a $P_t \cdot Q$ mátrixnak szintén az (x,y)-adik eleme. Mivel x, y és $t > 0$ tetszőleges volt, ezért kapjuk, hogy $\frac{d}{dt}P_t = P_t \cdot Q$. ∎

LEMMA 32

Legyen X_t egy véges állapotterű irreducibilis folytonos MC. Az infinitezimális generátort mint mindig, Q-val jelöljük. Ekkor

(a) Egyetlen olyan $\boldsymbol{\pi}$ valószínűségi vektor létezik, amely Q-nak a 0 sajátértékhez tartozó baloldali saját vektora.

(b) A Q minden nem nulla sajátértékének valós része negatív.

Bizonyítás. (a) rész bizonyítása: Legyen $a > \max_{i,j} q(i,j)$. Ekkor

$$P := (1/a)Q + I$$

egy irreducibilis sztochasztikus mátrix. Legyen $\mathbf{u}$ a P-nek az 1-hez tartozó sajátvektora. Nyilvánvalóan, $\boldsymbol{\pi}^T \cdot Q = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor, ha $\boldsymbol{\pi}^T \cdot P = \boldsymbol{\pi}^T$. Innen a $\boldsymbol{\pi}$ létezése és egyértelműsége.

(b) rész bizonyítása: Ha $\mathbf{u}^T \cdot Q = \alpha \cdot \mathbf{u}^T$, akkor

$$\mathbf{u}^T P = \left(\frac{\alpha}{a} + 1\right)\mathbf{u}^T.$$

Vagyis $\frac{\alpha}{a} + 1$ sajátértéke a P sztochasztikus mátrixnak, tehát $\left|\frac{\alpha}{a} + 1\right| \leq 1$. Innen $Re\left(\frac{\alpha}{a} + 1\right) \leq 1$, vagyis $Re\left(\frac{\alpha}{a}\right) \leq 0$ vagyis $Re(\alpha) \leq 0$. Ha $Re(\alpha) = 0$, akkor $Im\alpha = 0$ kell legyen (különben $\left|\frac{\alpha}{a} + 1\right| > 1$), de akkor $\alpha = 0$. ∎

Példa: egy speciális két állapotú lánc

Legyen $S = \{1,2\}$ és tudjuk, hogy $q(1,2) = 1$ és $q(2,1) = 2$. Ekkor $\lambda(1) = 1$ és $\lambda(2) = 2$. Vagyis

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Tudjuk, hogy

$$P_t = e^{tQ}. \tag{34}$$

Ennek kiszámításához diagonalizálni kell a Q-t:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, R^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Példa: egy speciális két állapotú lánc (cont.)

Ezzel
$$Q = R \cdot D \cdot R^{-1}$$
Innen
$$e^{tQ} = R \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot R^{-1}$$
Vagyis
$$e^{tQ} = \boxed{\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}} + e^{-3t} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Példa: egy speciális két állapotú lánc (cont.)

Nyilván $\pi^T = (2/3, 1/3)$-ra,
$$\lim_{t\to\infty} P_t = \begin{bmatrix} \pi^T \\ \pi^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Általános két állapotú lánc

Általánosan: tegyük fel hogy valamely $\lambda, \mu > 0$-ra
$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$
Ekkor a fentihez hasonlóan igazolható, hogy
$$P_t = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{bmatrix}} + e^{-t(\mu+\lambda)} \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & -\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ -\frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\mu}{\lambda+\mu} \end{bmatrix} \quad (35)$$
Vagyis $\pi^T := (\frac{\mu}{\lambda+\mu}, \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$-re
$$\lim_{t\to 0} P_t = \boxed{\begin{bmatrix} \pi^T \\ \pi^T \end{bmatrix}}.$$

Egy négyállapotú lánc

PÉLDA 33
Tekintsük azt a folytonos MC-t, amelynek infinitizimális generátora:
$$Q = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
Határozzuk meg a stacionárius állapotot erre a láncra.

Példák születési és halálozási folyamatokra

PÉLDA 34 (M/M/s sorbanállás)

Képzeljünk el egy bankot, ahol $s \leq \infty$ pultnál szolgálja ki az ügyfeleket, akik egy sorban állnak ha többen vannak mint az őket kiszolgáló pultok. Észszerű feltételezni, hogy az ügyfelek egy $\text{Poisson}(\lambda)$ folyamat szerint érkeznek és az egyes ügyfelek kiszolgálási ideje független $\text{Exp}(\mu)$.

Példák születési és halálozási folyamatokra (cont.)

Ugrási ráták:

$$q(n, n+1) = \lambda \text{ és } q(n, n-1) = \begin{cases} n\mu, & \text{ha } 1 \leq n \leq s; \\ s\mu, & \text{ha } n \geq s. \end{cases}$$

A második lépésben felhasználtuk a 7. slide (e) pontot.

Példák születési és halálozási folyamatokra (cont.)

PÉLDA 35 (elágazó folyamatok)

Ebben az esetben minden egyed μ rátával hal meg és minden egyed λ rátával létrehoz egy új egyedet. Vagyis
$$q(n, n+1) = \lambda n \text{ és } q(n, n-1) = \mu n.$$
Amikor $\mu = 0$, akkor ezt a folyamatot Yule folyamatnak hívjuk.

Példák születési és halálozási folyamatokra (cont.)

PÉLDA 36 (Elágazó folyamat imigrációval)

Feltételezzünk, hogy minden egyed μ rátával meghal, λ rátával hoz létre egy új egyedet mint fent. Továbbá, új bevándorló egyedek érkeznek ν rátával. Ekkor

$$q(n,n+1)=n\lambda+\nu \text{ és } q(n,n-1)=n\mu.$$

Születési halálozási folyamatok

A fenti példák mind a születési halálozási folyamatok osztájába tartoztak mert az állapottér $S=\{0,1,2,\dots\}$ és ha n-ben vagyunk sehova sem ugorhatunk csak $n-1$-be vagy $n+1$-be. Ha $n+1$-be ugrunk az születés, ha $n-1$-be az halálozás. Definíció szerint X_t születési halálozási folyamat λ_n születési rátákkal és μ_n halálozási rátákkal ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X_{t+\Delta t}=n \mid X_t=n\right) &= 1-\left(\mu_n+\lambda_n\right)\Delta t+\mathfrak{o}(\Delta t) \\ \mathbb{P}\left(X_{t+\Delta t}=n+1 \mid X_t=n\right) &= \lambda_n\Delta t+\mathfrak{o}(\Delta t) \\ \mathbb{P}\left(X_{t+\Delta t}=n-1 \mid X_t=n\right) &= \mu_n\Delta t+\mathfrak{o}(\Delta t). \end{aligned} \tag{36}$$

Példa: gyorsan növő populációs modell

PÉLDA 37

Legyen

$$\mu_n \equiv 0 \text{ és } \lambda_n=\lambda\cdot n^2,\ \lambda>0$$

Ebben az esetben a populáció nagyon gyorsan nő és véges időn belül végtelen nagy lesz. Ezt a jelenséget körül járjuk alaposabban a következő slideokon:

Tiszta születési folyamatok

DEFINÍCIÓ 38

Tiszta születési folyamatok olyan születési halálozási folyamatok, ahol $\forall n$-re $\mu_n=0$.

TÉTEL 39

(a) Ha $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}=\infty$, akkor $\sum\limits_{j=i}^{\infty}p_t(i,j)=1$, teljesül $\forall t\geq 0$-ra.

(b) Ha $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}<\infty$, akkor $\sum\limits_{j=i}^{\infty}p_t(i,j)<1$, teljesül $\forall t>0$-ra.

Tiszta születési folyamatok (cont.)

Magyarázat: Az n-ből az $n+1$-be való ugrás várakozási ideje $\mathrm{Exp}(\lambda_n)$. Ezek különböző n-ekre függetlenek és a várható érték: $1/\lambda_n$. Az N-edik ugrás ideje $\sum\limits_{n=1}^{N}1/\lambda_n$.

Mikor $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/\lambda_n=\infty$, akkor a Kolmogorov három sor tételből adódóan $T_n\to\infty$ majdnem biztosan viszont, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/\lambda_n<\infty$, akkor $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ korlátos vagyis $\exists T\leq\infty$, hogy az idő nem megy T fölé.

Most ezt kifejtjük részletesen:

Tiszta születési folyamatok (cont.)

TÉTEL 40 (Kolmogorov három sor tétel)

Legyen $X_1,X_2,\dots$ i.i.d. r.v. A $\sum\limits_{i=1}^{\infty}X_i$ véletlen sor konvergál majdnem biztosan akkor és csak akkor ha mind a három alábbi sor konvergens. Ha csak egyike ezen soroknak is nem konvergens, akkor $\sum\limits_{i=1}^{\infty}X_i$ majdnem biztosan divergens.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(|X_n|>1\right)<\infty$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[X_n\cdot\mathbb{1}_{\{|X_n|\leq 1\}}\right]$ konvergens.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{Var}\left(X_n\cdot\mathbb{1}_{\{|X_n|\leq 1\}}\right)<\infty$.

Robbanás a tiszta születési folyamatban

Bizonyítás 39. Tétel (a) rész. Tegyük fel, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/\lambda_n=\infty$. Legyen

$$X_n=\mathrm{Exp}(\lambda_n),\ Y_n=X_n\cdot\mathbb{1}_{X_n\leq 1},\ Z_n=X_n\cdot\mathbb{1}_{X_n>1}.$$

Mivel $\mathbb{E}\left[X_n\right]=1/\lambda_n$

$$\mathbb{E}\left[Y_n\right]=1/\lambda_n-\mathbb{E}\left[Z_n\right]. \tag{37}$$

Robbanás a tiszta születési folyamatban (cont.)

Most kiszámoljuk $\mathbb{E}\left[Z_n\right]$-t:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[Z_n\right] &= \int_0^{\infty}\mathbb{P}\left(Z_n\geq t\right)dt \\ &= \int_0^{1}\mathbb{P}\left(Z_n\geq t\right)dt+\int_1^{\infty}\mathbb{P}\left(Z_n\geq t\right)dt \\ &= e^{-\lambda_n}+\frac{e^{-\lambda_n}}{\lambda_n}. \end{aligned}$$

Robbanás a tiszta születési folyamatban (cont.)

Innen és (37) formulából:

$$\mathbb{E}[Y_n] = \frac{1 - e^{-\lambda_n}}{\lambda_n} - e^{-\lambda_n}.$$

A Kolmogorov három sor tétel első összege $\sum_n e^{-\lambda_n}$. Ha ez divergens akkor kész vagyunk. Tegyük fel, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n} < \infty$. Akkor A fentiekből nyilvánvaló, hogy Kolmogorov fenti tételében mind a második sor $(\sum_{n=1}^{\infty} Y_n)$

Robbanás a tiszta születési folyamatban (cont.)

mind a harmadik sor: $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(Y_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty$ konvergens. ∎
A 39. Tétel bizonyításának (b) része nyilvánvaló a Kolmogorov három sor tételből.

Stacionárius eloszlás

TÉTEL 41

Legyen $S = \{0, 1, \dots, N\}$, ahol $N \leq \infty$.
$q(n, n+1) = \lambda_n$ ha $n < N$. és
$q(n, n-1) = \mu_n$ ha $n > 0$.
$\mu_0 = 0$ és $\lambda_N = 0$, ha $N < \infty$. Ekkor a

$$\pi(n) = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_0}\pi(0)$$

teljesíti a detaliled balance conditiont, tehát stacionárius eloszlást ad, ha $\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_0} < \infty$ (ami mindig teljesül, ha $N < \infty$).

PÉLDA 42 (Borbély üzlet)

A fodrászaton van egy borbély és két szék a várakozok számára. Minden időt órában mérve:

- Egy hajvágás ideje $\mathrm{Exp}(3)$.
- A vendégek $\mathrm{Poisson}(2)$ folyamat szerint érkeznek.
- A beérkező vendég el is megy rögtön, ha a várakozóknak fenntartott mindkét szék foglalt.

Kérdés: A bejövő potenciális vendégek hány százalékának vágja le a haját a borbély?

Borbély üzletes példa megoldása

Az állapottér az üzletben tartózkodó vendégek száma: $S := \{0, 1, 2, 3\}$.

$$\mu_i = 3, \ i = 1, 2, 3 \text{ és } \lambda_i = 2, \ i = 0, 1, 2.$$

Ha $\pi(0) = c$, akkor

$$\pi(1) = \frac{2c}{3}, \ \pi(2) = \frac{2^2}{3^2}c, \ \pi(3) = \frac{2^3}{3^3}c.$$

Mivel $\sum_{i=0}^{3} \pi(i) = 1$ így

$$\pi(0) = \tfrac{27}{65}, \ \pi(1) = \tfrac{18}{65}, \ \pi(2) = \tfrac{12}{65}, \ \pi(3) = \tfrac{8}{65}.$$

Borbély üzletes példa megoldása (cont.)

Tehát az idő $\frac{8}{65}$ részében van három vendég, tehát a vendégek $57/65 = 87.7\%$-ának a haját vágják le.

PÉLDA 43 ($M/M/\infty$ sorban állás)

$$q(n, n+1) = \lambda \text{ és } q(n, n-1) = \mu\lambda.$$

Ekkor $\pi(n) = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\pi(0)$. So, we choose $\pi(0) = e^{-\lambda/\mu}$ and then we see that the stacionárius eloszlás egy $\mathrm{Poi}(\lambda/\mu)$.

$M/M/s$ sorban állás mellőzéssel I

Emlékezzünk az $M/M/s$ sorban állási példában (a 86. slide) :

$$q(n, n+1) = \lambda \text{ és } q(n, n-1) = \begin{cases} n\mu, & \text{ha } 0 \leq n \leq s; \\ s\mu, & \text{ha } n \geq s. \end{cases}$$

Módosítjuk ezt, de csak annyival, hogy minden n-ra adott egy a_n valószínűsége annak, hogy ha a sor hossza n, akkor az érkező ügyfél csak a_n valószínűséggel csatlakozik a sorhoz és $1 - a_n$ valószínűséggel elmegy. Vagyis ez egy születési halálozási folyamat, rátái:

$$\lambda_n = \lambda a_n \text{ és } \mu_n = \begin{cases} n\mu, & \text{ha } 0 \leq n \leq s; \\ s\mu, & \text{ha } n \geq s. \end{cases}$$

$M/M/s$ sorban állás mellőzéssel II

TÉTEL 44

Ha $a_n \to 0$, akkor létezik stacionárius eloszlás.

Bizonyítás.

$$\pi(n+1) = \frac{a_n\lambda}{s\mu}\pi(n).$$

Létezik egy N, ha $n > N$, akkor $\frac{a_n\lambda}{s\mu} < \frac{1}{2}$. Ezért egy $n > N$-ra $\pi(n+1) < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}\pi(N)$. Ezért $\sum_{n \geq 1} \pi(n) < \infty$ és így 41. Tételből adódóan létezik stacionárius mérték.
∎ Ha $s = 1$ és $1/(n+1)$, akkor $\boldsymbol{\pi} = \mathrm{Poi}(\lambda/\mu)$.

Embedded MC

A (29)-ban bevezettük az $r(i,j) := q(i,j)/\lambda_i$, ha $i \neq j$ és $r(i,i) = 0$ mátrixot. Itt $\lambda_i = \sum_{j\neq i} q(i,j)$ volt. Ez egy stochasztikus mátrix ami egy diszkrét idejű MC-t határoz meg. Ezt a diszkrét idejű láncot embedded MC -nek hívjuk. Legyen

$$V_k := \min\{t \geq 0 : X_t = k\}$$

és

$$T_k := \min\{t \geq 0 : X_t = k \text{ és } \exists s < t,\ S_s \neq k\}.$$

Embedded MC (cont.)

PÉLDA 45 ($M/M/1$ sorban állás)

$q(i,i+1) = \lambda$, ha $i \geq 0$ és $q(i,i-1) = \mu$ ha $i \geq 1$. Az embedded MC:

$$r(i,i+1) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu},\ i \geq 0,\ r(i,i-1) = \frac{\mu}{\lambda+\mu},\ i \geq 1.$$

Ez egy véletlen bolyongás részben visszaverő határral. Tehát mint láttuk

- pozitív rekurrens, ha $\lambda < \mu$.
- null rekurrens, ha $\lambda = \mu$.
- tranziens, ha $\lambda > \mu$.

Kilépési eloszlások embedded MC-vel

Most azt akarjuk meghatározni, hogy ha van néhány elnyelő állapot (ezek halmazát A-nak hívjuk), akkor mi a valószínűsége, hogy a lánc az $a \in A$-ba érkezik.
Legyen $A \subset S$ és $a \in A$.

$$V_A := \min\{t \geq 0 : X_t \in A\},\ h(i) := \mathbb{P}_i(X_{V_A} = a).$$

Ekkor ha $b \in A \setminus a$:

$$h(a) = 1,\ h(b) = 0.$$

Kilépési eloszlások embedded MC-vel (cont.)

Tehát nekünk csak $\forall i \notin A$-ra kell $h(i)$-t meghatározni. Ehhez vegyük észre, hogy : $\forall i \notin A$:

$$h(i) = \sum_{j\neq i} \frac{q(i,j)}{\lambda_i} \cdot h(j) \text{ ahol } \lambda_i = \sum_{j\neq i} q(i,j). \tag{39}$$

Innen $\forall i \notin A$:

$$\sum_j q(i,j)h(j) = 0,\ \text{ ahol } q(i,i) = -\lambda_i. \tag{40}$$

Tehát minden $i \notin A$ van egy egyenletünk, amikből $h(i)$, $i \notin A$ meghatározható (cf. B File **??**. Tétel.)

Kilépés várható ideje: elmélet

A várható kilépési időre felírjuk (40) analógját.

$$V_A := \min\{t \geq 0 : X_t \in A\},\ g(i) := \mathbb{E}_i[V_A].$$

Tehát $g(i) = 0$, ha $i \in A$. Mint mindig

$$\lambda_i = \sum_{j\neq i} q(i,j) \text{ és } r(i,j) := \frac{q(i,j)}{\lambda_i}.$$

Tudjuk, hogy a lánc az i-edik állapotban $\mathrm{Exp}(\lambda_i)$ időt tartózkodik majd ugrik a $j \neq i$ állapotba $r(i,j)$

Kilépés várható ideje: elmélet (cont.)

valószínűséggel. Használva, hogy $\mathbb{E}[\mathrm{Exp}(\lambda_i)] = 1/\lambda_i$ kapjuk:

$$i \notin A: \quad g(i) = \frac{1}{\lambda_i} + \sum_{j\neq i} \frac{q(i,j)}{\lambda_i} g(j).$$

Ezt átrendezve és használva, hogy $q(i,i) = -\lambda_i$:

$$i \notin A: \quad \sum_j q(i,j)g(j) = -1. \tag{41}$$

Ha S véges, ez $\#S - \#A$ egyenlet az $\#S - \#A$ számú ismeretlen $g(i)$, $i \notin A$-ra.

Kilépési várható ideje: Borbély üzlet

Tekintsük a 42. Példát (Borbély üzlet).
Emlékeztető: A vendégeket 3 rátával szolgálják ki és 2 rátával érkeznek, de vissza is fordulnak, ha mind a két várakozó szék foglalt: Vagyis

$$q(i,i-1) = 3 \text{ ha } i = 1,2,3$$
$$q(i,i+1) = 2 \text{ ha } i = 0,1,2.$$

	0	**1**	**2**	**3**
0	0	1	0	0
1	3/5	0	2/5	0
2	0	3/5	0	2/5
3	0	0	1	0

Kilépési várható ideje: Borbély üzlet (cont.)

Tehát itt $A = \{0\}$, $g(0) = 0$, $g(i) = \mathbb{E}_i[V_0]$. Legyen

$$\mathbf{g} := \begin{bmatrix} g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix} \text{ és } \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor a (41) egyenletrendszer ekvivalens a:

$$\widetilde{Q} \cdot \mathbf{g} = -\mathbb{1}, \tag{42}$$

Kilépési várható ideje: Borbély üzlet (cont.)

ahol $\widetilde{Q}$ a Q megszorítása az $S \setminus A$-ba tartozó (jelen esetben 0-tól különböző) oszlopokra. Ez az ekvivalencia abból következik, hogy tudjuk, hogy $g(i) = 0$, ha $i \in A$. Tehát az $i \in A$ oszlopok hozzájárulása minden egyenlethez nulla.

$$\widetilde{Q} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \text{ és } -(\widetilde{Q})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/9 & 4/27 \\ 1/3 & 5/9 & 10/27 \\ 1/3 & 5/9 & 19/27 \end{bmatrix}$$

Kilépési várható ideje: Borbély üzlet (cont.)

A (40) formulából:

$$\mathbf{g} = -(\widetilde{Q})^{-1} \cdot \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 19/27 \\ 34/27 \\ 43/27 \end{bmatrix},$$

vagyis $\mathbf{g}$-nek az i-edik elemét a $-(\widetilde{Q})^{-1}$ mátrixnak az i-edik sor összege adja.

Kilépés várható ideje: Mikor megy haza az óvónéni?

Példa: Egy óvodában zárási időben még három gyerekért Attila (A), Béla (B) és Cecilia (C), nem jöttek a szülők. Az óvónéni addig marad amíg mind a három gyereket el nem viszik a szüleik. A szülők telefonáltak, hogy zárási idő után (a gyerekek nevének sorrendjében) $\mathrm{Exp}(1), \mathrm{Exp}(2)$ és $\mathrm{Exp}(3)$ óra múlva érkeznek. (Tehát várhatóan 1, $1/2$ és $1/3$ órával a zárási idő után viszik el a gyerekeiket (egymástól függetlenül).) Kérdés mikor mehet haza az óvónéni?

Kilépés várható ideje: Mikor megy haza az óvónéni? (cont.)

Megoldás: A MC állapotai a szüleik által haza nem vitt gyerekek nevei és $\emptyset$ mikor mindenkit elvittek:

Q	**ABC**	**AB**	**AC**	**BC**	**A**	**B**	**C**	$\emptyset$
ABC	-6	3	2	1	0	0	0	0
AB	0	-3	0	0	2	1	0	0
AC	0	0	-4	0	3	0	1	0
BC	0	0	0	-5	0	3	2	0
A	0	0	0	0	-1	0	0	1
B	0	0	0	0	0	-2	0	2
C	0	0	0	0	0	0	-3	3
$\emptyset$	0	0	0	0	0	0	0	0

Kilépés várható ideje: Mikor megy haza az óvónéni? (cont.)

Használjuk az előző példa jelöléseit és módszerét:

Itt $A := \emptyset$. Tehát $\widetilde{Q}$ a fenti Q mátrix megszorítva az első hét sorra és oszlopra. Ekkor a $-\left(\widetilde{Q}\right)^{-1}$ mátrix első sorvektora:

$$(1/6, 1/6, 1/2, 1/30, 7/12, 2/15, 1/20).$$

Ennek összege: $63/60$. Vagyis az óvónéni egy óra és 3 perccel a zárás után mehet haza.

Kilépés várható ideje: Mikor megy haza az óvónéni? (cont.)

Megjegyzés: Ezt egyszerűbben abból az összefüggésből is megkaphatjuk, hogy bármely a, b, c számra:

$$\begin{aligned} \max\{a, b, c\} =& a + b + c - \min\{a, b\} - \min\{a, c\} \\ & - \min\{b, c\} + \min\{a, b, c\}. \end{aligned}$$

Ezt és a 6. slide (d2) pontját alkalmazhatjuk, ha $T_i = \mathrm{Exp}(\lambda_i)$, $i = 1, 2, 3$ függetlenek a $\max\{T_1, T_2, T_3\}$ meghatározására.

$M/M/1$ sorban állás már megint

- $q(n, n+1) = \lambda$, ha $n \geq 0$,
- $q(n, n-1) = \mu$ ha $n \geq 1$.

Feltesszük, hogy

$$\mu < \lambda. \tag{43}$$

Mint láttuk ez egy születési halálozási folyamat melyben

$$\lambda_n = \lambda \text{ és } \mu_n = \mu.$$

A (43) feltétel miatt alkalmazhatjuk a 41. Tételt. Innen:

$$\pi(n) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \pi(0). \tag{44}$$

$M/M/1$ sorban állás már megint (cont.)

Ahhoz, hogy ez valószínűségi mértéket adjon: $\pi(0) := 1 - \lambda/\mu$ kell. Vagyis

$$\pi(n) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \quad n \geq 0. \qquad (45)$$

Tegyük fel, hogy a rendszer stacionárius állapotban van. Ekkor legyen

- Q a sor hossza, $L = \mathbb{E}[Q]$,
- T_Q a sorban töltött idő, $W_Q = \mathbb{E}[T_Q]$ és $W = W_Q + \mathbb{E}[$ kiszolgálás ideje $]$

$M/M/1$ sorban állás már megint (cont.)

Nyilván

$$\mathbb{P}(T_Q = 0) = \mathbb{P}(Q = 0) = 1 - \frac{\lambda}{\mu}. \qquad (46)$$

Legyen $f(x)$ a T_Q sűrűség függvénye a $(0,\infty)$-en. Vigyázat (46) miatt: $\int_0^\infty f(x)dx = \lambda/\mu$. Feltételezve, az ügyfél érkezésekor $Q = n$, (aminek valószínűsége (45)-ben adott), $T_Q = Gamma(n,\mu)$. Így (2)-ből:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\mu x}\frac{\mu^n x^{n-1}}{(n-1)!}. \qquad (47)$$

$M/M/1$ sorban állás már megint (cont.)

Triviális átrendezés után kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{\lambda}{\mu}(\mu - \lambda)e^{-(\mu-\lambda)x}. \qquad (48)$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy

$M/M/1$ sorban állás már megint (cont.)

LEMMA 47

- T_Q-nak a $T_Q > 0$-ra vonatkozó feltételes eloszlása $\mathrm{Exp}(\mu - \lambda)$.
- $W_Q = \mathbb{E}[T_Q] = \frac{\lambda}{\mu}\frac{1}{\mu-\lambda}$.
- $\mathbb{E}[W] = W_Q + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}\frac{1}{\mu-\lambda} + \frac{1}{\mu}$.
- $L = \frac{1}{1-\lambda/\mu} - 1 = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$.

$M/M/1$ sorban állás véges várószobával

- Egyetlen kiszolgáló van és egy ügyfél kiszolgálása $\mathrm{Exp}(\mu)$ ideig tart.
- Ügyfelek $\mathrm{Poisson}(\lambda)$ szerint érkeznek
- A váróteremben 1 kiszolgálás alatt álló és $N-1$ várakozó ügyfélnek van hely. Az az ügyfél, aki olyankor érkezik amikor ez az összesen N hely el van foglalva, azonnal elmegy és nem jön vissza.

$M/M/1$ sorban állás véges várószobával (cont.)

LEMMA 48

- Legyen X_t egy MC, amelyre létezik létezik $\boldsymbol{\pi}$ stacionárius eloszlás és ez eleget tesz a detailed balance condition-nak. Az X_t lánc infinitezimális generátora Q.
- Legyen $A \subset S$ és Y_t az X_t megszorítása A-ra. Vagyis az Y_t infinitezimális generátora $\widetilde{Q}$, ahol
$$\tilde{q}(x,y) = \begin{cases} q(x,y), & \text{ha } x,y \in A; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$
- Legyen $C := \sum_{x \in A} \pi(x)$.

$M/M/1$ sorban állás véges várószobával III

Bizonyítás. Használva, hogy $\boldsymbol{\pi}$-re teljesül a detailed balance condition, azonnal adódik, hogy, hogy ugyanez teljesül ν-re is, tehát ν stacionárius állapot az Y_t láncra.
■

$M/M/1$ sorban állás véges várószobával IV

Innen és (45)-ből adódik, hogy a fent leírt N férőhelyes várószobájú $M/M/1$ sorbanállásra a stacionárius állapot:

$$\pi(n) := \frac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^{N+1}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \text{ ha } 0 \leq n \leq N. \qquad (49)$$

Véges várószobánál ez akkor is teljesül, ha $\lambda > \mu$. Csak akkor nem , ha $\lambda = \mu$. Ebben az esetben:

$$\pi(n) = \frac{1}{N+1} \text{ ha } 0 \leq n \leq N.$$

Borbély üzletes példa utoljára

Ismétlés: A Borbély üzletes példát a 100. slide-on vezettük be és a 101. slide-on kiszámoltuk a stacionárius eloszlást:

$$\boldsymbol{\pi}^T = \left(\frac{27}{65}, \frac{18}{65}, \frac{12}{65}, \frac{8}{65}\right),$$

amely egyezik azzal, ami a (49) formulából adódik.

A 111. slide-on kiszámoltuk, hogy ha $i = 1, 2, 3$ vendég van a borbélynál, akkor várhatóan mennyi időt kell várni amíg az üzlet legelőször kiürül.

Borbély üzletes példa utoljára (cont.)

Amikor belépek az üzletbe ott $i = 0, 1, 2, 3$ vendég lehet. Az $i = 3$ esetben haza megyek. Az $i = 0, 1, 2$ esetben az üzletben töltött időm várhatóan $(i + 1) \cdot \frac{1}{3}$ (hiszen az előttem lévők haját és az én hajamat is $\mathrm{Exp}(3)$ idő alatt, az az várhatóan $1/3$ óra alatt vágják le.) Ezeket figyelembe véve az üzletben töltött időm W várható értéke:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{1 - \pi(3)} \left[\pi(0) \cdot \frac{1}{3} + \pi(1) \cdot \frac{2}{3} + \pi(2) \cdot 1\right] \\ &= \frac{33}{57}. \end{aligned}$$

Borbély üzletes példa utoljára (cont.)

Inn következik, hogy a hajvágásra várással töltött időm várhatóan:

$$W_Q = W - \frac{1}{3} = \frac{14}{57} = 0.2456 \text{ óra } = 14.736 \text{ perc }.$$

$M/M/s$ sorban állás

A 86. slide-on vezettük be az $M/M/s$ sorban állást

- Egy bankban s ablaknál szolgálják ki az ügyfeleket, akik egy sorban állnak, amikor minden kiszolgáló foglalt.
- Az ügyfelek $\mathrm{Poisson}(\lambda)$ szerint érkeznek.
- Kiszolgálási idők: független $\mathrm{Exp}(\mu)$ idők.

Itt $S = 0, 1, 2, \dots$ a bankban lévő ügyfelek száma. Amint láttuk ez a születési halálozási folyamat a következő rátákkal:

$$q(n, n+1) = \lambda, \quad n \geq 0.$$

$M/M/s$ sorban állás (cont.)

és

$$q(n, n-1) = \begin{cases} n\mu, & \text{ha } 1 \leq n \leq s; \\ s\mu, & \text{ha } n \geq s. \end{cases}$$

LEMMA 49

Ha $\lambda < s\mu$, akkor létezik egy $\boldsymbol{\pi}$ stacionárius állapot, amely eleget tesz a detailed balance condition-nek.

$M/M/s$ sorban állás (cont.)

Bizonyítás. Ha felírjuk a detailed balance condition-t a következő feltételt kapjuk:

$$\begin{aligned} \lambda\pi(j-1) &= \mu j \pi(j) & \text{ha } j \leq s \\ \lambda\pi(j-1) &= \mu s \pi(j) & \text{ha } j \geq s \end{aligned}$$

Innen

$$\pi(k) = \begin{cases} \frac{c}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, & \text{ha } k \leq s; \\ \frac{c}{s!s^{k-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, & \text{ha } k \geq s. \end{cases} \tag{50}$$

$M/M/s$ sorban állás (cont.)

ahol c-t úgy szeretnénk megválasztani, hogy $\boldsymbol{\pi}$ valószínűségi mérték legyen. Ez biztosan lehetséges, ha $\lambda < s\mu$. ■

LEMMA 50

Ha $\lambda > s\mu$ az $M/M/s$ lánc tranziens., Ha $\lambda < s\mu$ az $M/M/s$ lánc rekurrens.

Bizonyítás. Ha $\lambda > s\mu$, akkor az $M/M/1$ sorbanállásra $n\mu$ kiszolgálási idővel nyilvánvalóan tranziens. Ez abból adódik, hogy az $M/M/1$ sorbanállásra van $\boldsymbol{\pi}$ stacionárius állapot (tehát rekurrens) ha $\lambda < \mu$. Az $M/M/s$ lánc μ kiszolgálási idővel kevésbé hatékony tehát ez is tranziens.

$M/M/s$ sorban állás (cont.)

A másik irány következik a stacionárius állapot létezéséből. ■

PÉLDA 51

Határozzuk meg a stacionárius mértéket

(a) Az $M/M/s$ sorban állásra, ha $\mu = 1$, $\lambda = 2$, $s = 3$,

(b) Az $M/M/1$ sorban állásra, ha $\mu = 3$, $\lambda = 2$, $s = 1$.

Ezáltal hasonlítsuk össze ezen láncokat hatékonyság szempontjából.

$M/M/s$ sorban állás (cont.)

Megoldás (a):

$\sum_{k=2}^{\infty} \pi(k) = \frac{c}{2} \cdot 2^2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (2/3)^j = 6c$, $\pi(0) = c$,

$\pi(1) = \frac{\lambda}{\mu} c = 2c$. Vagyis $9c = 1$, amiből $c = 1/9$. Tehát

$$\pi(0) = \frac{1}{9}, \quad \pi(1) = \frac{2}{9} \text{ és } \pi(k) = \frac{2}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^k \text{ ha } k \geq 3. \tag{51}$$

Megoldás (b): A (45) formulából:

$$\pi(n) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad n \geq 0,$$

Vagyis $\pi(0 = \frac{1}{3})$ és $\pi(1 = \frac{2}{9})$.

[1] Balázs Márton, Tóth Bálint
Valószínűségszámítás 1. jegyzet matematikusoknak és fizikusoknak
Bálázs Márton Honlapja, 2012. Az internettes változatért kattintson ide.

[2] R. Durrett
Essentials of Stochastic Processes, Second edition
Springer, 2012. A majdnem kész változatért kattintson ide.

[3] R. Durrett
Probability Theory with examples, Second edition
Duxbury Press, 1996 . második kiadás.

[4] S. Karlin, H.M. Taylor
Sztochasztikus Folyamatok
Gondolat, Budapest, 1985

[5] S. Karlin, H.M. Taylor
A second course in stochastic processes
, Academic Press, 1981

[6] G. Lawler
Intoduction to Stochastic Processes
Chapmann & Hall 1995.

[7] D.A. Levin, Y. Peres,E.L. Wilmer
Markov chains and mixing times
American Mathematical Society, 2009.

[8] Major Péter
Folytonos idejű Markov láncok
`http://www.renyi.hu/~major/debrecen/debrecen2008a/markov3.html`

[9] Piet Van Mieghem
The Poisson process
`http://www.nas.its.tudelft.nl/people/Piet/CUPbookChapters/PACUP_Poisson.pdf`

[10] Rényi Alfréd
Valószínűségszámítás, (negyedik kiadás)
Tankönyvkiadó Budapest, 1981.

[11] Tóth Bálint *Sztochasztikus folyamatok jegyzet*
Tóth Bálint Jegyzetért kattintson ide

Index