Sztochasztikus folyamatok

Simon Károly
Ez az előadás
Rick Durrett Essentials of Stochastic processes
könyvére épül

Department of Stochastics
Institute of Mathematics
Technical University of Budapest
www.math.bme.hu/~simonk

C file 2015-04-06

Stacionáris állapotok Reducibilis MC-re

Ebben a fejezetben mindig feltesszük, hogy az állapottér véges.

$$\#S < \infty.$$

A B file 109. slidján található Peron Frobenius tétel (ii) és (iii) pontjai szerint, még abban az esetben is ha $\mathbf{P}$ reducibilis, a Perron-Frobenius sajátérték $\lambda = 1$ és megfelelő baloldali sajátvektorokat választhatjuk, úgy hogy minden komponensük nem negatív, vagyis

Stacionáris állapotok Reducibilis MC-re (cont.)

megfelelő normálás után mindig létezik olyan $\boldsymbol{\pi}$ valószínűségi vektor, amelyre tehát

$$\forall x, \boldsymbol{\pi}(x) \geq 0, \sum_x \boldsymbol{\pi}(x) = 1 \text{ és } \boldsymbol{\pi}^T \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}^T. \tag{1}$$

Az ezen tulajdonságokkal rendelkező $\boldsymbol{\pi}$-t neveztük stacionáris eloszlásnak. Most a stacionáris eloszlással foglalkozunk abban az esetben , ha

Feltételek:

- Az (X_n) MC reducibilis és

Stacionáris állapotok Reducibilis MC-re (cont.)

- Az állapottér $\#S < \infty$.

A továbbiakban használni fogjuk az A file 10. Tételt és annak jelöléseit. Először is, rendezzük úgy a MC állapotterét, hogy legelöl álljanak az R_1-beli (A file 10. Tétel jelöléseivel) azután az R_2-beli,..., az R_k-beli,

Stacionáris állapotok Reducibilis MC-re (cont.)

leghátul pedig a tranziens, tehát T-beli állapotok. Ezen átrendezés után:

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{R}_1 & & 0 & \\ 0 & \ddots & & 0 \\ & & \mathbf{R}_k & \\ \hline & S & & Q \end{array}\right] \text{ és } \mathbf{P}^n = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{R}_1^n & & 0 & \\ 0 & \ddots & & 0 \\ & & \mathbf{R}_k^n & \\ \hline & S_n & & Q^n \end{array}\right], \tag{2}$$

ahol $\mathbf{P}_i$ a $\mathbf{P}$ megszorítása az R_i-ebli állapotokra és Q a $\mathbf{P}$ megszorítása a T-beli állapotokra. Használva az A

Stacionáris állapotok Reducibilis MC-re (cont.)

file-beli (10) formulát ás a szintén A file-beli 11. Lemmát azonnal kapjuk, hogy

$$y \text{ tarnziens } \Longrightarrow \forall x, \quad \lim_{n \to \infty} p^n(x, y) = 0. \tag{3}$$

Ez azt adja, hogy

$$\lim_{n \to \infty} Q^n = 0. \tag{4}$$

Innen pedig két dolog következik. Egyrészt:

$$y \text{ tarnziens } \Longrightarrow \boldsymbol{\pi}(y) = 0. \tag{5}$$

Stacionáris állapotok Reducibilis MC-re (cont.)

Másrészt:

$$1 \text{ nem sajátértéke } Q\text{-nak.} \tag{6}$$

A (6) nyilvánvaló és az (5) teljesül, mivel (3) formulából: ha $y \in T$, akkor minden $\varepsilon > 0$-ra létezik n:

$$\boldsymbol{\pi}(y) = \sum_x \pi(x) p^n(x, y) = \sum_{x \in T} \pi(x) p^n(x, y) < \varepsilon.$$

Tudjuk, hogy az R_i, $i = 1, \dots, k$ komponensek zártak és irreducibilisek, tehát ha a Markov láncot R_k-ra megszorítjuk egy irreducibilis MC-t kapunk. Tehát az A

Stacionáris állapotok Reducibilis MC-re (cont.)

file 30. Tételből minden $i = 1, \dots, k$-ra létezik egyetlen $\boldsymbol{\pi}_i$ stacionárius eloszlás, amire tehát

$$\forall x, \boldsymbol{\pi}_i(x) > 0, \sum_x \boldsymbol{\pi}_i(x) = 1 \text{ és } \boldsymbol{\pi}_i^T \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}_i^T. \qquad (7)$$

Ezen $\boldsymbol{\pi}_i$, $i = 1, \dots, k$ stacionárius eloszlások tetszőleges konvex kombinációja:

$$\boldsymbol{\pi} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \boldsymbol{\pi}_i, \quad \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1.$$

Stacionáris állapotok Reducibilis MC-re (cont.)

is stacionárius eloszlás. Tehát ha egynél több irreducibilis komponens van, akkor végtelen sok stacionárius eloszlás létezik.

LEMMA 1

A $\lambda = 1$ Perron Frobenius sajátérték multiplicitása (mind az algebrai mind a geometriai) egyenlő az irreducibilis komponensek ($R_1, \dots, R_k$ az A file 10. Tétel jelöléseivel) számával.

Stacionáris állapotok Reducibilis MC-re (cont.)

Bizonyítás. Ha a MC irreducibilis, akkor $\lambda = 1$ multiplicitása 1. Ha $k \geq 2$-re az irreducibilis komponensek $R_1, \dots, R_k$, akkor $\forall x \in R_i$, $\sum_{y \in R_i} p(x, y) = 1$. Tehát ha $\mathbf{v}_i(x) = 1$ minden $x \in R_i$ $\mathbf{v}_i(x) = 0$ minden $x \in R_j$, $j \neq i$, akkor könnyen látható, hogy $x \in T$-re megválasztható $\mathbf{v}_i(x)$, úgy hogy a $\mathbf{v}_i$ a $\mathbf{P}$ mátrixnak az 1-hez tartozó saját vektor legyen. Nyilván $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ függetlenek, ezért az 1 sajátérték geometriai multiplicitása legalább k.

Stacionáris állapotok Reducibilis MC-re (cont.)

Másrészt, a $\mathbf{P}$ mátrixban az 1 sajátérték algebrai multiplicitásának meghatározásához, emlékezzünk, hogy az mivel minden P_i mátrix irreducibilis, ezért az 1 sajátértéke P_i-nek, egyszeres (algebrai) multiplicitással. Mivel

$$\det(P - \lambda I) = \prod_{i=1}^k \det(P_i - \lambda I) \det(Q - \lambda I)$$

ezért a (6) felhasználásával kapjuk, hogy $\lambda = 1$ éppen k-szoros gyöke a P karakterisztikus polinomjának, vagyis

Stacionáris állapotok Reducibilis MC-re (cont.)

1 éppen k-szoros algebrai multiplicitású sajátértéke P-nek. Mivel a geometriai multiplicitás mindig kisebb egyenlő az algebrai multiplicitásnál, ezért kaptuk, hogy mind a két multiplicitás egyenelő k-val.

■

Egynél nagyobb periódusú MC

Alapvető feltételezések: Továbbiakban mindig feltesszük, hogy a MC

- Irreducibilis és
- Periódusa $q > 1$.

Alapvető észrevétel:

$$\text{Ha } p^n(x, y) > 0, \ p^k(y, x) > 0$$

és

$$n \equiv r \mod q \text{ akkor } k \equiv q - r \mod q$$

Egynél nagyobb periódusú MC (cont.)

Ez azért van mert x-ből indulva, x-be csak olyan úton térhetünk vissza, melynek hossza a q-nak többszöröse. Rögzítsümk egy tetszőleges x-et és particionáljuk S elemeit az $S_1, \dots S_q$ osztályokba, az x-ből az illető ponthoz vezető út hossza mod q szerint. Ez partíció a fenti alapvető észrevétel szerint és ha $p(x, y) > 0$ és $x \in S_i$, akkor $y \in S_{i+1}$. Tehát S_1-ből megyünk S_2-be, onnan S_3-ba, végül S_q-ból S_1-be. Ekkor tehát a $\mathbf{P}^q$ által meghatározott MC szét esik q darab ($S_1, \dots, S_q$ állapottereken) MC-re amelyek külön-külön irreducibilisek és aperiodikusak.

Egynél nagyobb periódusú MC (cont.)

Visszatérve az eredeti, a $\mathbf{P}$ átmenetvaslószínűség mátrixhoz tartozó MC-re, ennek a $\lambda = 1$ egyszeres sajátértéke, de van összesen q-darab 1 abszolút értékű sajátértéke, melyek a $z^q = 1$ egyenlet megoldásai. (Ezt most itt nem látjuk be.) Ehelyett ezt a periodikus helyzetet végig követjük egy konkrét példán, amely a Lawler könyvből: [4, 20. old.] származik.

Visszaverő szimmetrikus bolyongás

Tekintsük az A file 31. slide-ján bevezetett visszeverő peremfeltételű bolyongást, amely szimmetrikus, vagyis $p = q = 1/2$. Ekkor tehát az átmenetvalószínűség mátrix:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	0	0	0
1	1/2	0	1/2	0	0
2	0	1/2	0	1/2	0
3	0	0	1/2	0	1/2
4	0	0	0	1	0

Visszaverő szimmetrikus bolyongás (cont.)

Ekkor létezik egyetlen stacionáris eloszlás:

$$\boldsymbol{\pi} := (1/8, 1/4, 1/4, 1/4, 1/8)\,.$$

$\mathbf{P}$ sajátértékei: $1, -1, 0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}$. A megfelelő (jobboldali) sajátvektorokat (mint oszlopvektorokat) mátrixba rendezve:

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Visszaverő szimmetrikus bolyongás (cont.)

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Ha $D = \mathrm{Diag}(1, -1, 0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, akkor tehát $P = QDQ^{-1}$. Innen

$$P^n = QD^nQ^{-1}.$$

Visszaverő szimmetrikus bolyongás (cont.)

Mivel nagy n-re a D-beli 1-nél kisebb abszolút értékű elemek n-edik hatványa lényegében 0, ezért

$$D^n \approx \mathrm{Diag}(1, (-1)^n, 0, 0, 0).$$

Tehát

$$P^{2k+1} = QD^{2k+1}Q^{-1} \approx \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Visszaverő szimmetrikus bolyongás (cont.)

és

$$P^{2k} = QD^{2k}Q^{-1} \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Ennek annyi köze van a $\boldsymbol{\pi}$-hez, hogy

$$\forall x \text{ -re: } \boldsymbol{\pi}(y) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(p^n(x,y) + p^{n+1}(x,y)\right)$$

Az általános esetben

Ha $\mathbf{P}$ irreducibilis és periódusa q, akkor az 1 ugyan egy egyszeres sajátérték, de összesen van q darab egységnyi abszolút értékű sajátérték. Ezek a $z^q = 1$ megoldásai. Létezik és egyértelmű a $\boldsymbol{\pi}$ stacionárius eloszlás. $\lim\limits_{n\to\infty} P^n$ nem létezik. Viszont, ha ϕ egy tetszőleges eloszlás S-en, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q}\left[\phi^T \mathbf{P}^{n+1} + \cdots + \phi^T \mathbf{P}^{n+q}\right] = \boldsymbol{\pi}.$$

Mértékek totál variációs távolsága

Ebben a fejezetben szorosan követjük a Levin, Peres, Wilmer könyv [5, 4. fejezet]-et és ebben a fejezetben mindig feltételezzük, hogy az állapottér véges.

$$\#S < \infty. \tag{8}$$

Legyen μ, ν két valószínűségi mérték S-en. Vagyis

$$\sum_{x\in S} \mu(x) = 1, \mu(x) \geq 0 \text{ és } \sum_{x\in S} \nu(x) = 1, \nu(x) \geq 0.$$

Ekkor a μ és a ν mértékek totál variációs távolsága:

$$\|\mu - \nu\|_{TV} := \max_{A\subset S} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

Mértékek totál variációs távolsága (cont.)

LEMMA 2

$$\begin{aligned} \|\mu - \nu\|_{TV} &= \frac{1}{2}\sum_{x\in S} |\mu(x) - \nu(x)| \\ &= \sum_{\substack{s\in S \\ \mu(x)\geq\nu(x)}} |\mu(x) - \nu(x)|. \end{aligned} \tag{9}$$

Mértékek totál variációs távolsága (cont.)

Bizonyítás. Legyen $B := \{x \in S : \mu(x) > \nu(x)\}$. Tehát $B^c = \{x \in S : \mu(x) \leq \nu(x)\}$. Ekkor nyilvánvalóan $\forall A \subset S$-re:

$$\mu(A) - \nu(A) \leq \mu(A \cap B) - \nu(A \cap B) \leq \mu(B) - \nu(B).$$

Ugyanígy

$$\nu(A) - \mu(A) \leq \nu(B^c) - \mu(B^c).$$

Mivel μ, ν valószínűségi mértékek ezért az előző két egyenlőség jobb oldalai megegyeznek. ∎

A Π mátrix definíciója és tulajdonságai

Legyen Π az a mátrix aminek minden sora $\boldsymbol{\pi}$. Vagyis:

$$\Pi := \mathbb{1} \cdot \boldsymbol{\pi}^T.$$

A következő tulajdonságok a definícióból triviálisak:
A Π tulajdonságai.

(a) Π projekció. Tehát: $\Pi^2 = \Pi$.

(b) Ha M egy **sztochasztikus mátrix,** akkor $M\Pi = \Pi$.

(c) Ha M egy olyan **sztochasztikus mátrix**, amire $\boldsymbol{\pi}^T M = \boldsymbol{\pi}^T$, akkor $\Pi M = \Pi$.

Konvergencia tétel

Először is vegyük észre, hogy minden $y \in S$-re, $p^t(y, \cdot)$ egy valószínűségi mérték. Nevezetesen

$$p^t(y, A) := \sum_{z\in A} p^t(y, z).$$

Ennek a távolságát vizsgáljuk az egyensúlyi állapottól. Nevezetesen, belátjuk, hogy ez a távolság exponenciálisan kicsi.

Konvergencia tétel (cont.)

TÉTEL 3

Legyen $\mathbf{P}$ irreducibilis és aperiodikus. Ekkor $\exists C > 0$ és $\alpha \in (0, 1)$, úgy hogy minden $t \in \mathbb{N}$-re:

$$\max_{x\in S} \|p^t(x, \cdot) - \boldsymbol{\pi}\|_{TV} \leq C\alpha^t. \tag{10}$$

Bizonyítás vázlat. Emlékezzünk, hogy ebben az esetben a $\boldsymbol{\pi}$-nek minden eleme pozitív (l. A file 30. Tétel). Az A file 17 Lemmából következik, hogy ha $\mathbf{P}$ irreducibilis és aperiodikus, akkor $\mathbf{P}$ egy primitív mátrix,

Konvergencia tétel (cont.)

vagyis $\exists r > 0$, hogy $\mathbf{P}^r$ minden eleme pozitív. Válasszunk olyan $\delta > 0$-át, amelyre:

$$\mathbf{P}^r(x, y) \geq \delta\boldsymbol{\pi}(y), \quad \forall x, y \in S. \tag{11}$$

Legyen

$$\theta := 1 - \delta. \tag{12}$$

Definiáljuk a Q sztochasztikus mátrixot a következő egyenlőséggel:

$$\mathbf{P}^r = (1 - \theta) \cdot \Pi + \theta \cdot Q. \tag{13}$$

Konvergencia tétel (cont.)

Felhasználva a Π tulajdonságait (l. fent), indukcióval belátható (l. [5, 53. oldal]), hogy

$$\mathbf{P}^{rk}(1 - \theta^k)\Pi + \theta^k Q^k. \tag{14}$$

Legyen $1 \leq j \leq r - 1$. Mindkét oldalt $\mathbf{P}^j$-el megszorozva és átrendezve a tagokat:

$$\mathbf{P}^{rk+j} - \Pi = \theta^k \left(Q^k\mathbf{P}^j - \Pi \right). \tag{15}$$

Mindkét oldalon egy rögzített x_0 sorába tartozó elemek abszolút értékeit összegezzük és az összeget osszuk el kettővel. A baloldal: $\|p^{rk+j}(x_0) - \boldsymbol{\pi}\|_{TV}$.

Konvergencia tétel (cont.)

Most belátjuk, hogy ha ezt a műveletet a jobboldalon végre hajtjuk, akkor legfeljebb θ^k-t kapunk:
A jobb oldalon: először is vegyük észre, hogy $Q^k\mathbf{P}^j$ egy sztochasztikus mátrix, hiszen Q egy sztochasztikus mátrix. Ezért $Q^k\mathbf{P}^j$ mátrixnak az x_0-adik sora egy eloszlást definiál S-en. Nevezzük ezt η_{x_0}-nak. Ha a fent leírt műveletet végrehajtjuk a (15) formula jobb oldalán, akkor kapjuk, hogy a jobb oldal: $\theta^k \cdot \underbrace{\|\eta_{x_0} - \pi\|_{TV}}_{\leq 1} \leq \theta^k$

mivel valószínűségi mértékek között a totális variációs távolság legfeljebb 1. ∎

Következmény

Legyen
- $\#S < \infty$,
- $\mathbf{P}$ irreducibilis és
- $\mathbf{P}$ aperiodikus

továbbá, r, olyan hogy $\mathbf{P}^r$ minden eleme pozitív és legyen

$$\theta := 1 - \min_{x,y \in S} \frac{p^r(x,y)}{\pi(y)}.$$

Ekkor

$$\|p^t(x,\cdot) - \pi\|_{TV} \leq \theta^{\lfloor t/r \rfloor}.$$

Példa a 3.Tétel alkalmazására

Használjuk a 3.Tétel jelöléseit a következő példa megoldása során:

PÉLDA 4

Tekintsük az A file beli 28. Lemma beli példát. Vagyis legyen $0 < a, b < 1$ és $a + b \neq 1$:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} \text{ ekkor } \pi = \begin{bmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{bmatrix}$$

Adjunk minél jobb felső becslést a 3.Tételbeli θ-ra ebben az esetben!

Példa a 3.Tétel alkalmazására (cont.)

Megoldás: Ekkor a (11)-ben definiált

$$\delta = \min_{x,y} \frac{p(x,y)}{\pi(y)} = \min\left\{a+b, \frac{(1-a)(a+b)}{b}, \frac{(1-b)(a+b)}{a}\right\}.$$

Tehát $\delta = a + b$ akkor és csak akkor ha $a + b < 1$.
Ha $a + b > 1$ akkor $\delta > \min\{1-a, 1-b\}$. Tehát:

$$\delta \geq \begin{cases} a+b, & \text{ha } a+b<1; \\ \min\{1-a, 1-b\}, & \text{ha } a+b>1. \end{cases}$$

Példa a 3.Tétel alkalmazására (cont.)

Innen

$$\theta = 1 - \delta \leq \begin{cases} 1-(a+b), & \text{ha } a+b<1; \\ \max\{a,b\}, & \text{ha } a+b>1. \end{cases}$$

A fejezeten belül mindig használt jelölések, feltételek

- Ebben a fejezetben mindig feltesszük, hogy X egy olyan v.v., amelynek értékei csakis nemnegatív egész számok lehetnek.
- $\forall k \in \mathbb{N}$-re legyen $p_k := \mathbb{P}(X = k)$.
- Az X v.v. generátor függvénye:

$$g_X(s) := \mathbb{E}\left[s^X\right] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot s^k.$$

A generátor függvény (rövidítése g.f.) alapvető három tulajdonsága: (bizonyításuk:[6, 128. oldal])

Generátorfüggvény

(a) A g.f. egyértelműen meghatározza az eloszlásfüggvényt,
(b) Független nemnegatív egész értékeket felvevő v.v. összegének generátorfüggvénye, a generátorfüggvények szorzatával egyenlő.
(c) $\mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-k)] = g^{(k+1)}(1)$, ahol $g^{(k+1)}$ a $k+1$-edik deriváltja a g g.f.-nek. Tehát

$$\mathbb{E}[X] = g'(1) \text{ és } \mathbb{E}\left[X^2\right] = g''(1) + g'(1). \tag{16}$$

Generátorfüggvény (cont.)

LEMMA 5

Legyen X és N független, kizárólag nemnegatív egészeket felvevő v.v., a generátorfüggvények: g_X és g_N. Legyen

$$R := X_1 + \cdots + X_N.$$

Ekkor

$$g_R(s) = g_N(g_X(s)). \tag{17}$$

Generátorfüggvény (cont.)

Innen:

$$\boxed{\mathbb{E}[R]} = g_R'(1) = g_N'(\underbrace{g_X(1)}_{1}) \cdot g_X'(1) = \boxed{\mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X]}. \tag{18}$$

Generátorfüggvény (cont.)

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
\boxed{g_R(s)} &= \mathbb{E}\left[s^R\right] = \mathbb{E}\left[s^{X_1+\cdots+X_N}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[s^{X_1+\cdots+X_N}\right] \middle| N\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[s^{X_1+\cdots+X_n}\right] \middle| N=n\right] \cdot \mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}\left[s^{X_1+\cdots+X_n}\right]}_{g_X^n(s)} \cdot \mathbb{P}(N=n) \\
&= \mathbb{E}\left[g_X^N(s)\right] = \boxed{g_N\left(g_X^n(s)\right)}.
\end{aligned}$$

Generátorfüggvény (cont.)

■

Elágazó folyamatok

Az A file 21. slide-on vezettük be az elágazó folyamatokat. Használva az ottani jelöléseket: Adott a $\boxed{\{p_n\}_{n=0}^{\infty}}$ eloszlás az $\mathbb{N}$-en. A 0-adik generációban egyetlen egyed van. $X_0 = 1$ biztosan. Tetszőleges $n \geq 1$-re bármelyik n-edik generációs egyed gyerekei Y számának eloszlása:

$$\mathbb{P}(Y = k) = p_k. \tag{19}$$

Ha tehát az n-edik generációban X_n egyed van, akkor az $n+1$-edik generációs egyedek száma:

$$X_{n+1} := Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{X_n}, \tag{20}$$

Elágazó folyamatok (cont.)

ahol $Y_1, Y_2, \ldots$ i.i.d. r.v., melyek eloszlását a (19) formula adja. Legyen

$$g_n := \mathbb{E}\left[s^{X_n}\right],$$

vagyis g_n az n-edik generációs egyedek X_n számának generátorfüggvénye. Legyen

$$g(s) := g_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot s^n.$$

Elágazó folyamatok (cont.)

Nyilván, minden m-re az Y_m generátorfüggvénye éppen a $g(s)$ függvény:

$$g(s) = g_{Y_m}(s) \quad \forall m\text{-re}.$$

A g_n generátor függvény vizsgálata céljából, alkalmazzuk az 5. Lemmát a következő helyettesítésekkel: $X_i \to X_i$, $X_n \to N$ és $X_{n+1} \to R$. ekkor az 5. Lemma és a (20) formula alapján

$$g_{n+1} = g_n(g(s)).$$

Elágazó folyamatok (cont.)

Innen indukcióval kapjuk, hogy

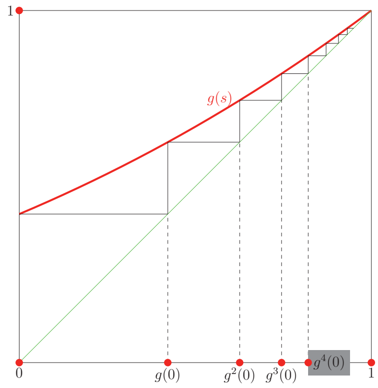
$$g_n(s) = \underbrace{g \circ \cdots \circ g}_{n}(s) =: g^n(s). \qquad (21)$$

Ezt $s = 0$-ra alkalmazva:

$$\mathbb{P}\left(X_n = 0\right) = g^n(0). \qquad (22)$$

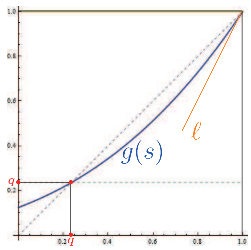
Innen: $\mathbb{P}$ (kihalás valószínűsége) $= \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$

$\mathbb{E}\left[Y\right] = g'(1) < 1 \implies \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 1$



Tehát p_n annak a valószínűsége, hogy egy egyednek pontosan n leszármazottja van. Ekkor $m := \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n \cdot n$ a leszármazottak számának várható értéke. Definiáltuk a $g(s) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n \cdot s^n$ generátor függvényt. A g átmegy az $(1,1)$ ponton. Legyen ℓ az érintő egyenese g-nek $s = 1$-ben. Ekkor ℓ meredeksége: $g'(1) = m$. Ha $m > 1$, akkor az ℓ-nek a $[0,1]^2$-be eső része az $y = x$ alatt megy tehát létezik a $q < 1$ "másik" $[0,1]$-beli fixpontja g-nek. A grafikoról:

$0 \leq g'(q) < 1$. Ezért ha $g^n := \underbrace{g \circ \cdots \circ g}_{n}$, akkor $g^n(x) \to q$, $\forall x < 1$. Az előző slide-ról és az ábrából: q a kihalás valószínűsége.



Egyszerű véletlen bolyongás $\mathbb{Z}^d$-ben

A B file 67. slide-ján vezettük be az egyszerű véletlen bolyongást gráfokon. Az átmenetvalószínűség mátrix:

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(x)}, & x, y \text{ szomszédok;} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \qquad (23)$$

Tekintsük azt az esetet, amikor a gráf csúcsai $V := \mathbb{Z}^d$ és $(x,y) \in E$, ha $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 1$. Tehát minden csúcs foka

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d, \quad \deg(x) = \frac{1}{2^d}.$$

Egyszerű véletlen bolyongás $\mathbb{Z}^d$-ben (cont.)

Az első nagyon fontos kérdés: vajon rekurrens-e az $x = 0$?

TÉTEL 6

$\mathbb{R}^d$ az egyszerű véletlen bolyongás rekurrens ha $d \leq 2$ és tranziens, ha $d \geq 3$.

A bizonyítás meghaladja a kurzus kereteit. Lásd: [2, 186. oldal] vagy Tóth Bálint jegyzetében a (kattintson ide) linken.

[1] R. Durrett
Essentials of Stochastic Processes, Second edition
Springer, 2012. A majdnem kész változatért kattintson ide.

[2] R. Durrett
Probability Theory with examples, Second edition
Duxbury Press, 1996 . második kiadás.

[3] S. Karlin, H.M. Taylor
Sztochasztikus Folyamatok
Gondolat, Budapest, 1985

[4] G. Lawler
Intoduction to Stochastic Processes
Chapmann & Hall 1995.

[5] D.A. Levin, Y. Peres,E.L. Wilmer
Markov chains and mixing times
American Mathematical Society, 2009.

[6] Rényi Alfréd
Valószínűségszámítás, (negyedik kiadás)
Tankönyvkiadó Budapest, 1981.

[7] Tóth Bálint *Sztochasztikus folyamatok jegyzet*
Tóth Bálint Jegyzetért kattintson ide

Index