Sztochasztikus folyamatok

Simon Károly
Ez az előadás
Rick Durrett Essentials of Stochastic processes
könyvére épül

Department of Stochastics
Institute of Mathematics
Technical University of Budapest
www.math.bme.hu/~simonk

B file 2015-03-23

Jelölés

Legyen $A=(a_{ij})$ egy $N\times N$-es négyzetes mátrix. A továbbiakban mindig feltesszük, hogy A nem negatív. Vagyis $a_{ij}\geq 0$.

$a_{ij}^{(m)}$ jelöli az A^m mátrix (i,j)-edik elemét.

Jelölés (cont.)

DEFINÍCIÓ 1 (Irányított gráf adjacencia mátrixa (adjacency matrix))

Legyen $G=(V,E)$ egy irányított gráf. A csúcsok halmazát V-vel az élek halmazát E-vel jelöljük.
A G gráf adjacencia mátrixa (csúcsmátrix) $A_G=(a_{ij})$

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{if } (i,j)\in E;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{1}$$

Könnyen látható hogy

$$a_{ij}^{(m)}=\#\{\ m \text{ hosszú séták } i\text{-ből } j\text{-be}\ \}. \tag{2}$$

Jelölés (cont.)

Másrészt, minden nemnegatív A mátrixhoz tartozik egy G_A irányított gráf , melyben, $V(G):=\{1,\dots,N\}$ és

$$(i,j)\in E(G) \text{ akkor és csak akkor ha } a_{ij}>0.$$

DEFINÍCIÓ 2 (irreducibilis mátrixok)

Az A mátrix irreducibilis, ha $\forall(i,j)$, $\exists m=m(i,j)$, hogy $a_{ij}^{(m)}>0$

Nyilván, A irreducibilis, akkor és csak akkor, ha G_A erősen összefüggő, vagyis bármely két pontot összeköt út az irányított élek mentén.

Jelölés (cont.)

DEFINÍCIÓ 3 (Primitív mátrixok)

Azt mondjuk, hogy az A nemnegatív mátrix primitív ha létezik M, úgy hogy $\forall i,j,\ a_{ij}^{(M)}>0$.

Könnyű látni, hogy ha egy nemnegatív mátrix irreducibilis és legalább az egyik diagonális eleme nem nulla, akkor primitív.

Perron-Frobenius Tétel I

TÉTEL 4

Legyen A egy $N\times N$-es nemnegatív mátrix. Ekkor

(i) Létezik egy nem negatív valós sajátértéke λ (az úgynevezett Perron-Frobenius sajátérték), úgy hogy az A semelyik sajátértékének abszolút értéke sem nagyobb λ-nál.

(ii) $\min\limits_i \sum\limits_{j=1}^N a_{ij}\leq\lambda\leq\max\limits_i\sum\limits_{j=1}^N a_{ij}$.

(iii) A λ-hoz tartozó baloldali és jobboldali sajátvektorokat $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ választhatjuk, úgy, hogy minden komponensük nemnegatív.

$$\mathbf{u}^T\cdot A=\lambda\mathbf{u}^T,\ A\cdot\mathbf{v}=\lambda\cdot\mathbf{v}.$$

Perron-Frobenius Tétel II

Továbbiakban mindig úgy normalizáljuk $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$-t, hogy

$$\sum_{i=1}^N u_i=1 \quad\text{és}\quad \sum_{i=1}^N u_iv_i=1. \tag{3}$$

Ha még feltesszük, hogy A is irreducibilis, akkor:

(iv) λ egyszeres sajátérték és az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok minden eleme pozitív.

(v) λ az egyetlen olyan sajátérték, amelyhez találhatunk olyan sajátvektorokat, melyek minden eleme nemnegatív.

Perron-Frobenius Tétel folytatása III

A továbbiakban mindig feltesszük, hogy A primitív ekkor:

(vi) $\forall i,j$:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n} a_{ij}^{(n)} = u_j v_i \,, \tag{4}$$

ahol $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ a λ-hoz tartozó baloldali, és jobboldali csupa pozitív komponensű sajátvektorai, melyek kielégítik a (3) feltételeket.

A Perron Frobenius tétel (vi) része a Felújítási tételből következik.

Perron-Frobenius Tétel folytatása IV

(vii) Legyen

$$M_1 := \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_2 v_1 & \cdots & u_N v_1 \\ u_1 v_2 & u_2 v_2 & \cdots & u_N v_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1 v_N & u_2 v_N & \cdots & u_N v_N \end{pmatrix} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^T. \tag{5}$$

Nyilván: $M_1 \cdot M_1 = M_1$. Továbbá, létezik egy $N \times N$-es M_2 mátrix, melyre

- $A^n = \lambda^n M_1 + M_2^n$, $n = 1m2, \ldots$
- $M_1 M_2 = M_2 M_1 = \mathbf{0}$,
- $\|M_2^n\| = \mathcal{O}(\alpha^n)$, valamely $0 < \alpha < \lambda$.

Perron-Frobenius Tétel folytatása V

(viii) Legyen B egy olyan nem negatív elemű mátrix, melyre $\forall i,j \leq N$-re

$$0 \leq b_{ij} \leq a_{ij}$$

és legyen β egy sajátértéke B-nek. Ekkor

- $|\beta| \leq \lambda$ és
- ha $|\beta| = \lambda$, akkor $B = A$.

Felújítási Tétel

Legyenek $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ és $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ számsorozatok, melyekre:

- Az $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatról feltesszük, hogy:
  - $a_n \geq 0$ és $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$.
  - legnagyobb közös osztója$\{n : a_n > 0\} = 1$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$.

Felújítási Tétel (cont.)

- Feltesszük, hogy az $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ egy korlátos sorozat, amely kielégíti a felújítási egyenletet:

$$\forall n \geq 0 \;\; u_n := b_n + a_0 u_n + a_1 u_{n-1} + \cdots + a_n u_0. \tag{6}$$

Ekkor $\lim_{n\to\infty} u_n$ létezik és

(a) Ha $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k < \infty$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k}{\sum_{k=0}^{\infty} k a_k}. \tag{7}$$

Felújítási Tétel (cont.)

(b) Ha $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k = \infty$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{8}$$

Felújítási tétel bizonyítása: [3, 95.oldal].

Felújítási egyenlet valószínűség számítási tartalma

Tekintsünk egy villany körtét, amelynek ξ-vel jelölt élettartamát diszkrét egységekben mérjük:

$$\mathbb{P}(\xi = k) = a_k, k = 0, 1, 2, \ldots, a_k > 0, \;\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1.$$

A villany körtét, annak kiégése után azonnal kicseréljük. Az első körte ξ_1, a második $\xi_1 + \xi_2$ ideig ég. az n-edik körte pedig $\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ ideig ég, ahol $\xi_k \overset{d}{=} \xi$ i.i.d. r.v. (independent, identically distributed, random variables)

Felújítási egyenlet valószínűség számítási tartalma (cont.)

vagyis a ξ_k-k független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Legyen:

$$u_n := \mathbb{E}\left[\#\left\{n\text{-edik pillanatig szükséges cserék}\right\}\right]$$

Feltéve, hogy az első körte a $0 \leq k \leq n$ pillanatban megy tönke (ennek valószínűsége a_k), az n-edik pillanatig tartó cserék várható értéke $1 + u_{n-k}$ (csere a k-adik pillanatban és a cserék várható értéke a további $n - k$

Felújítási egyenlet valószínűség számítási tartalma (cont.)

pillanatokban). Ha nem megy tönkre az első n

Felújítási egyenlet valószínűség számítási tartalma (cont.)

pillanatban, akkor nem is kell csere. Tehát

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n}(1+u_{n-k})a_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}a_k + \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad (9)\\ &= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}u_k + \underbrace{\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k}}_{b_n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}u_k + b_n. \end{aligned}$$

Előkészületek

Emlékeztető: $\boxed{T_y} := \min\left\{n \geq 1 : X_n = y\right\}$ Legyen

$$f_{ij}^0 := 0 \text{ és } n \geq 1\text{-re } f_{ij}^{(n)} := \mathbb{P}_i\left(T_j = n\right).$$

Mivel $p^n(i,j)$ annak a valószínűsége, hogy i-ből indulva n lépés múlva j-ben leszünk, ezért

$$p^0(i,j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j; \\ 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

Előkészületek (cont.)

LEMMA 5

Ha $n \geq 1$, akkor

$$\boxed{p^n(i,i) = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^k p^{n-k}(i,i)}$$

és

$$\boxed{p^n(i,j) = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^k p^{n-k}(j,j)}, \quad i \neq j, n \geq 0.$$

Előkészületek (cont.)

A bizonyítás az i állapotba való első visszatérés k idejére való feltételezésből azonnal adódik. (Házi feladat pontosan kidolgozni.)
Vezessük be a következő generátor függvényeket:

$$P_{ij}(s) := \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^n \cdot s^n \text{ és } F_{ij}(s) := \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^n \cdot s^n, \ |s| < 1.$$

Az $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ és $\mathbf{b} := \{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ sorozatok konvolúciója a $\mathbf{c} := \mathbf{a} * \mathbf{b}$ sorozat, melyre

$$c_r := \sum_{k=0}^{r} a_k b_{r-k}. \qquad (10)$$

Előkészületek (cont.)

Könnyen igazolható, hogy ha

$$A(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot s^k, \text{ és } B(s) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot s^k$$

az **a** és **b** generátor függvénye, akkor a **c** konvolúció $C(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot s^k$ generátor függvényére

$$C(s) = A(s) \cdot B(s). \qquad (11)$$

Ha $a_k = f_{ii}^k$ és $b_\ell = p^\ell(i,i)$, akkor Lemma 5 miatt

$$c_r = (a * b)_r = p^r(i,i) \text{ ha } 1 \leq r.$$

Előkészületek (cont.)

Viszont $c_0 = 0 \neq 1 = p^0(i,i)$. Ezért (11) miatt $|s| < 1$-re:

$$F_{ii}(s) \cdot P_{ii}(s) = P_{ii}(s) - 1, \text{ vagyis } P_{ii}(s) = \frac{1}{1 - F_{ii}(s)}. \tag{12}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$P_{ij}(s) = F_{ij}(s) P_{jj}(s) \text{ ha } i \neq j \text{ és } |s < 1|. \tag{13}$$

Nyilván

$$\rho_{ij} = \mathbb{P}_i(T_j < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^n.$$

Előkészületek (cont.)

Definíció szerint: i rekurrens $\iff \rho_{ii} = 1$. Tehát

$$i \text{ rekkurrens } \iff \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^n = 1. \tag{14}$$

$$M_i := \mathbb{E}_i[T_i] = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ii}^{(n)}.$$

az i állapotból indulva, az i állapotba való visszajutás várható ideje.

Előkészületek (cont.)

DEFINÍCIÓ 6

Legyen i egy rekurrens állapot. Azt mondjuk, hogy

- i null-rekurrens, ha $M_i = \infty$.
- i pozitív-rekurrens, ha $M_i < \infty$.
- i ergodikus, ha aperiodikus és pozitív rekurrens.
- Egy Markov lánc ergodikus, ha irreducibilis és minden állapot ergodikus.

Markov Láncok határeloszlás tétele.

Tekintsünk véges vagy megszámlálhatóan végtelen állapotterű Markov láncot, amely

- irreducibilis,
- aperiodikus,
- állapotai rekurrensek (L. A file, 13. Lemma).

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} p^n(i,i) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} n f_{ii}^n} = \frac{1}{M_i}, \tag{15}$$

$$\lim_{n\to\infty} p^n(j,i) = \lim_{n\to\infty} p^n(i,i) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} n f_{ii}^n} = \frac{1}{M_i}. \tag{16}$$

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} n f_{ii}^n = \infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} p^n(j,i) = 0$.

Néhány szó a tranziens állapotokról

Legyen $y \in S$ egy tranziens állapot. Ekkor az A file-beli (10) formulából és 11. Lemmából azonnal adódik, hogy

$$y \text{ tranziens } \Longrightarrow \forall x \in S, \ \sum_{n=0}^{\infty} p^n(x,y) < \infty \tag{17}$$

Vagyis, ha y tranziens, akkor $\forall x$-re

$$\lim_{n\to\infty} p^n(x,y) = 0.$$

Továbbá, az A file-beli 13. Lemmából adódóan:

$$\text{ha } \exists n, \ p^n(x,y) \neq 0 \Rightarrow x \text{ is tranziens.}$$

Most bizonyítjuk a tételt.

A (15) formula bizonyítása

Felhasználva az 5. Lemmát és azt, hogy $p^0(i,i) = 1$, kapjuk, hogy

$$b_n := p^n(i,i) - \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^{n-k} p^k(i,i) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0; \\ 0, & \text{ha } n > 0. \end{cases}$$

Ezek után (15) azonnal adódik a Felújítási tételből a következő helyettesítésekkel: Legyen $\{b_n\}$ mint fent és $n \geq 0$-ra:

$$u_n := p^n(i,i), \qquad a_n := f_{ii}^n.$$

A (16) formula bizonyítása

Legyen $i \neq j$ rögzített. Lemma 5 második feléből:

$$p^n(j,i) = \sum_{r=0}^{n} f_{ij}^r p^{n-r}(i,i), \quad n \geq 0. \tag{18}$$

$$y_n := p^n(j,i), \ a_n := f_{ji}^n, \text{ és } x_n := p^n(i,i).$$

Ezzel a jelöléssel (18):

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x_k. \tag{19}$$

A (16) formula bizonyítása (cont.)

Használva hogy a Markov lánc irreducibilis és a (15) formulát:

$$a_m \geq 0, \ \sum_{m=0}^{\infty} a_m = 1, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = c. \tag{20}$$

A tétel bizonyításához elég belátni, hogy ekkor

$$\lim_{n\to\infty} y_n = c. \tag{21}$$

A (16) formula bizonyítása (cont.)

(20) miatt:

$$y_n - c = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x_k - c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad (22)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}(x_k - c) - c \cdot \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m .$$

A (20) formulából adódik, hogy $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists K$:

$$\forall k \geq K, \quad |x_k - c| < \varepsilon/3. \qquad (23)$$

A (16) formula bizonyítása (cont.)

Vágjuk szét a (22) beli első összeget K-nál, majd a $K+1 \leq k \leq n$ tagokra alkalmazzuk a (23) formulát. Kapjuk, hogy

$$|y_n - c| \leq M \sum_{k=0}^{K} a_{n-k} + \frac{\varepsilon}{3} \underbrace{\sum_{r=K+1}^{n} a_{n-r}}_{\leq 1} + |c| \cdot \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m, \qquad (24)$$

ahol $M := \max_{k \geq 0} |x_k - c|$. Legyen N olyan hogy

- $|c| \cdot \sum_{m=N}^{\infty} a_m < \frac{\varepsilon}{3}$,
- $\sum_{k=0}^{K} a_{n-k} \equiv \sum_{m=n-K}^{n} a_m < \frac{\varepsilon}{3M}$ ha $n \geq N$.

A (16) formula bizonyítása (cont.)

Tehát (24)-ből: $|y_n - c| \leq \varepsilon$, ha $n \geq N$. ■

MEGJEGYZÉS 7

Az A állapot terű Markov láncnak legyen egyen R egy zárt és irreducibilis, aperiodikus osztálya, melynek elemei rekurrensek. Ekkor a $\mathbf{P}_S = (p(i,j))_{i,j \in S}$ mátrix egy sztochasztikus mátrix az R állapottéren, hiszen R-ből nem lehet kimenni. Ezért a fenti tétel a Markov láncnak R-re való megszorításra is alkalmazható.

Bevezetés

Stacionárius eloszlás az a π valószínűségi vektor az állapottéren, amelyre $\pi^T \cdot \mathbf{P} = \pi^T$.

DEFINÍCIÓ 8

Azt mondjuk, hogy az állapottéren értelmezett $\mu(i) \geq 0$ függvény stacionárius mérték, ha

$$\sum_{i \in S} \mu(i) p(i,j) = \mu(j). \qquad (25)$$

Bevezetés (cont.)

Ha az állapotér S véges, akkor $\sum_{i \in S} \mu(i) < \infty$ és így normálással minden stacionárius mérték stacionárius eloszlássá tehető.

KÉRDÉS 9

(a) Vannak-e stacionárius eloszlások, ha igen hányan vannak, hogyan találjuk meg őket?

(b) Ha létezik egyetlen stacionárius eloszlás π, akkor egy μ eloszlásból kiindulva $\mu^T \mathbf{P}^n \xrightarrow{?} \pi^T$ (valamilyen értelemben) és ha igen milyen gyorsan?

Bevezetés (cont.)

(A file 30.Tétel): ha $\#S < \infty$ és $\mathbf{P}$ irreducibilis, akkor π létezik, egyértelmű és minden komponense pozitív. Ezt vizsgáljuk az $\#S = \infty$ esetben.

Előkészület: Egy triviális lemma

LEMMA 10

Legyen X egy nemnegatív egészeket felvevő v.v.. Ekkor $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k)$.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X \geq k\}}$, továbbá $\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X \geq k\}}\right] = \mathbb{P}(X \geq k)$. A Lemma állítása ezen két azonosságból azonnal következik. ■

Stacionárius mérték létezése

TÉTEL 11

Tekintsünk egy irreducibilis és rekurrens MC-t. Legyen $x \in S$. Ekkor

$$\mu_x(y) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x\left(X_n = y, T_x > n\right) \tag{26}$$

egy olyan stacionárius mértéket definiál, melyre $0 < \mu_x(y) < \infty$, $\forall y \in S$-re.

Nyilván $\mu_x(x) = 1$.

Cycle trick

A 11. Tétel igazolása az ún. "Cycle trick" segítségével történik. Itt egy heurisztikus okoskodást adunk. A formális bizonyítás ezután jön. Először is vegyük észre, hogy $\#\{a \le n \le b : X_n = y\} = \sum_{n=a}^{b} \mathbb{1}_{\{X_n = y\}}$.
Várható értéket véve:
$\mathbb{E}\left[\#\{a \le n \le b : X_n = y\}\right] = \sum_{n=a}^{b} \mathbb{P}\left(X_n = y\right)$.

$$\mu_x(y) = \mathbb{E}_x\left[\#\{i \in \{0, \dots, T_x - 1\} : X_i = y\}\right]. \tag{27}$$

Cycle trick (cont.)

Ez azt jelenti, hogy $\mu_x(y)$ a várható értéke annak, hogy x-ből indulva, hányszor látogatjuk meg y-t mielőtt először visszatérnénk x-be.
Ezt részletesen levezetjük két slide-al később. Hasonlóan

$$(\mu_x^T \cdot \mathbf{P})(y) = \mathbb{E}_x\left[\#\{i \in \{1, \dots, T_x\} : X_i = y\}\right]$$

Mivel $X_0 = X_{T_x} = x$, ezért $\mu_x(y) = (\mu_x^T \cdot \mathbf{P})(y)$ vagyis μ_x stacionárius mérték, ahol
$(\mu_x^T \cdot \mathbf{P})(y) = \sum_{z \in S} \mu_x(z) \cdot p(z, y)$. Ezen heurisztika után nem sokára megadjuk a bizonyítást, de előbb

Cycle trick (cont.)

bebizonyítjuk a a (27) formulát. Ehhez használjuk a következő jelölést: $A \subset S$-re

$$\mathbb{E}_x\left[Z; A\right] := \int_A Z d\mathbb{P}_x. \tag{28}$$

A (27) formula igazolása.

Legyen $Z := \#\{0 \le i < T_x : X_i = y\}$. Ezzel

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \sum_{L=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[Z; \{T_x = L\}\right] \\
&= \sum_{L=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{L-1} \mathbb{1}_{\{X_n = y, T_x = L\}}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{L=n+1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X_n = y, T_x = L\}}\right]}_{\mathbb{P}(X_n = y, n < T_x)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(X_n = y, n < T_x\right). \\
&= \mu_x(y).
\end{aligned}$$

A 11. Tétel bizonyítása

$$\overline{p}_n(x, y) := \mathbb{P}_x\left(X_n = y, n < T_x\right)$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\sum_y \mu_x(y) p(y, z) &= \sum_y \sum_{n=0}^{\infty} \overline{p}_n(x, y) p(y, z) \qquad (29) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_y \overline{p}_n(x, y) p(y, z)}_{S_x(z)}.
\end{aligned}$$

A belső (sárgával kihúzott) összeget, amelyet $S_x(z)$-vel jelölök, fogjuk megbecsülni két esetre bontva:

A 11. Tétel bizonyítása (cont.)

Első eset: az általános $z \ne x$ eset:

$$\begin{aligned}
S_x(z) &= \sum_y \mathbb{P}_x\left(X_n = y, n < T_x, X_{n+1} = z\right) \\
&= \mathbb{P}_x\left(n + 1 < T_x, X_{n+1} = z\right) = \overline{p}_{n+1}(x, z).
\end{aligned}$$

Tehát a (29) formula jobb oldala:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{p}_{n+1}(x, z) = \mu_x(z)$$

Vagyis a (29) formulából, ha $x \ne z$:

$$\sum_y \mu_x(y) p(y, z) = \mu_x(z). \tag{30}$$

A 11. Tétel bizonyítása (cont.)

Második eset: $x = z$.

$$\begin{aligned}
S_x(z) &= \sum_y \mathbb{P}_x\left(X_n = y, n < T_x, X_{n+1} = x\right) \\
&= \mathbb{P}_x\left(T_x = n + 1\right).
\end{aligned}$$

Használva, hogy $T_x \ge 1$, a (29) formula jobb oldala:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x\left(T_x = n + 1\right) = 1 = \mu_x(x).$$

Vagyis a (29) formulából, ha $x = z$:

$$\sum_y \mu_x(y) p(y, x) = \mu_x(x). \tag{31}$$

A 11. Tétel bizonyítása (cont.)

Összetéve a (30) és a (31) formulákat kapjuk, hogy (25) teljesül, vagyis μ_x egy stacionárius mérték.
Most belátjuk, hogy

$$\mu_x(y) < \infty \quad \forall y\text{-ra} . \tag{32}$$

Mivel μ_x egy stacionárius mérték $\mathbf{P}^n$-re, $\forall y$-ra és $\forall n$-re teljesül, hogy:

$$1 = \mu_x(x) = \sum_z \mu_x(z)p^n(z,x) \geq \mu_x(y)p^n(y,x).$$

Egy tetszőleges y-ra az irreducibilitásból adódóan találunk olyan n-et, hogy $p^n(y,x) > 0$. Erre az n-re

A 11. Tétel bizonyítása (cont.)

alkalmazzuk a fenti formulát. Kapjuk, hogy $\mu_x(y) < \infty$.
Ezzel igazoltuk (a 32) formulát.
Most belátjuk, hogy

$$\mu_x(y) > 0, \quad \forall y\text{-ra} . \tag{33}$$

Ez nyilvánvaló $y = x$-re mert $\mu_x(x) = 1$. Feltesszük, hogy $y \neq x$. Legyen

$$K := \min\left\{k : p^k(x,y) > 0\right\}.$$

A 11. Tétel bizonyítása (cont.)

Ekkor létezik $y_1, \dots, y_{K-1} \in S$ és $y_i \neq y$, hogy

$$p(x,y_1)p(y_1,y_2)\cdots p(y_{K-1}y) > 0.$$

Tehát

$$\mathbb{P}_x\left(X_K = y, K < T_x\right) > 0.$$

Innen kapjuk, hogy

$$\mu_x(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x\left(X_n = y, n < T_x\right) > 0. \blacksquare$$

Mielőtt ezt a tételt felhasználnánk a stacionáris eloszlás megkonstruálására két további tételt kell bebizonyítanunk.

Egy állapot látogatásának gyakorisága

Legyen $N_n(y) := \#\{1 \leq \ell \leq n : X_\ell = y\}$ az y állapotba való látogatások száma az n-edik lépésig. Mivel a lánc rekurrens, ezért végtelen sokszor visszatér y-ba, tehát

$$N_n(y) \to \infty \text{ m.b. } . \tag{34}$$

TÉTEL 12

Egy irreducibilis és rekurrens Markov láncra:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(y)}{n} = \frac{1}{\mathbb{E}_y\left[T_y\right]} \text{ m.b. } . \tag{35}$$

$\mathbb{E}_y\left[T_y\right] = \infty$ lehetséges és ekkor $1/\infty = 0$.

Nagyszámok Erős Törvénye

TÉTEL 13 (SLLN)

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ páronként független azonos eloszlású v.v., melyekre $\mathbb{E}\left[|X_i|\right] < \infty$. Legyen $\mu := \mathbb{E}\left[X_i\right]$. Továbbá $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} S_n/n = \mu \text{ m.b. } . \tag{36}$$

KÖVETKEZMÉNY 14

Legyen $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. és $\mathbb{E}\left[X_i^+\right] = \infty$, továbbá $\mathbb{E}\left[X_i^-\right] < \infty$. Ekkor $\lim_{n\to\infty} S_n/n = \infty$ m.b. , ahol S_n mint fent. (Bizonyítás: [2, 7.2.Tétel, 58. old.])

A 12. Tétel bizonyítása

Tegyük fel, hogy y-ból indulunk. Ekkor az y-ba való egymás utáni visszatérések időpontjai $t_1, t_2, \dots$ i.d.d. nem negatív v.v. Tehát a Nagy Számok Törvénye vagy ha várható értékük végtelen, a SLLN fenti következménye alkalmazható rájuk. Vagyis, legyen

$$\begin{aligned} R(k) &= \min\left\{n \geq 1 : N_n(y) = k\right\} = T_y^k \\ &= t_1 + \cdots + t_k. \end{aligned} \tag{37}$$

Ekkor SLLN-ből

$$\lim_{k\to\infty} \frac{R(k)}{k} = \mathbb{E}_y\left[T_y\right] \leq \infty. \tag{38}$$

A 12. Tétel bizonyítása (cont.)

Általánosan: vegyük észre, hogy ha $N_n(y) = k$, akkor $T_y^k \leq n < T_y^{k+1}$. Vagyis

$$R(N_n(y)) \leq n < R(N_n(y)+1).$$

$$\frac{R(N_n(y))}{N_n(y)} \leq \frac{n}{N_n(y)} < \frac{R(N_n(y)+1)}{N_n(y)+1} \cdot \frac{N_n(y)+1}{N_n(y)}.$$

A tétel állítása a (34) és a (38) formulákból adódik.
Ha nem y-ból indulunk, hanem valamely $x \neq y$-ból akkor $t_1 < \infty$ idő alatt érünk először y-ba (I. A file 8. Lemma) és a fenti tételt alkalmazzuk $t_2, t_3, \dots$-ra $t_1, t_2, \dots$ helyett.

π és a várható visszatérési idő

TÉTEL 15

Tegyük fel, hogy a MC irreducibilis és létezik egy π stacionáris eloszlása. Ekkor

$$\pi(y) = \frac{1}{\mathbb{E}_y[T_y]}. \tag{39}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a lánc első eleme X_0 nem egy rögzített állapot hanem egy valószínűségi változó, amelynek eloszlása π.

π és a várható visszatérési idő (cont.)

Felhasználva a 12. Tételt, a Lebesgue féle domináns konvergencia konvergencia tételből kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\boxed{\mathbb{E}_\pi [N_n(y)]}}{n} = \frac{1}{\mathbb{E}_y[T_y]}. \qquad (40)$$

$$\mathbb{E}_\pi \left[\boxed{N_n(y)}\right] = \mathbb{E}_\pi \left[\boxed{\sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{1}_{\{X_\ell=y\}}}\right] = \sum_x \mathbb{E}_x \left[\sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{1}_{\{X_\ell=y\}}\right] \pi(x)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n} \sum_x \underbrace{\mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\{X_\ell=y\}}\right]}_{p^\ell(x,y)} \pi(x)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n} \sum_x \pi(x) p^\ell(x,y) = \sum_{\ell=0}^{n} \pi(y) = n\pi(y).$$

π és a várható visszatérési idő (cont.)

Innen és a (40) formulából kapjuk, hogy

$$\pi(y) = \frac{1}{\mathbb{E}[T_y]}.$$

■

$\exists\pi \iff$ MC pozitív-rekurrens

TÉTEL 16

Egy irreducibilis MC-re a következők ekvivalensek:

(i) Van pozitív-rekurrens állapot.
(ii) Létezik egy stacionárius eloszlás.
(iii) Minden állapot pozitív-rekurrens.

$\exists\pi \iff$ MC pozitív-rekurrens (cont.)

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $x \in S$-et. Legyen $\mu_x(\cdot)$ a (26) formulában bevezetett mérték. Ekkor

$$\boxed{\sum_y \mu_x(y)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_y \mathbb{P}_x (X_n = y, n < T_x) \qquad (41)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x (n < T_x) = \boxed{\mathbb{E}_x [T_x]}.$$

Ha (i) igaz, akkor $\mathbb{E}_x [T_x] < \infty$ és így a fenti levezetésből, $\sum_y \mu_x(y) < \infty$ vagyis megkapjuk

$$\pi(z) := \frac{\mu_x(z)}{\sum_y \mu_x(y)}. \qquad (42)$$

$\exists\pi \iff$ MC pozitív-rekurrens (cont.)

Ha (ii) teljesül, vagyis, ha létezik a π, akkor az irreducibiltásból kapjuk, hogy

$$\boxed{\forall z \in S\text{-re} \quad \pi(z) > 0.} \qquad (43)$$

Használva, hogy $\pi(y) = 1/\mathbb{E}_y [T_y]$ adódik (iii). ■

Ergod tétel

TÉTEL 17

Adott egy irreducibilis MC, amelyen létezik stacionárius eloszlás π. (Ekkor mint láttuk, $\pi(y) = (\mathbb{E}_y [T_y])^{-1}$). Legyen $f : S \to \mathbb{R}$, olyan hogy $\boxed{\sum_x |f(x)| \pi(x) < \infty}$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k) = \sum_x f(x)\pi(x) = \int_S f(x) d\pi(x). \qquad (44)$$

A 17. Tétel bizonyításának vázlata

Elindítjuk a láncot x-ből és röviden $T_k := T_x^k$ az x-be való k-adik visszatérés ideje, $T_0 := 0$. Az erős Markov tulajdonság miatt az

$$Y_k := \sum_{m=T_{k-1}+1}^{T_k} f(X_m)$$

i.i.d. r.v. . A 11. Tétel bizonyításában alkalmazott cycle trick segítségével a (27) formulából belátható azonnal adódik, hogy

$$\boxed{\mathbb{E}[Y_k] = \sum_y \mu_x(y) f(y)}.$$

A 17. Tétel bizonyításának vázlata (cont.)

Innen és a SLLN-ból:

$$\frac{1}{L} \sum_{m=1}^{T_L} f(X_m) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{L} Y_k \to \sum_y \mu_x(y) f(y).$$

Mivel ez csak egy bizonyítás vázlat, itt megfeleldkezünk az utolsó nem teljes ciklus bizonyos elemeiről, és így:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k) \approx \underbrace{\frac{N_n(x)}{n}}_{\downarrow\ \boxed{\frac{1}{\mathbb{E}_x[T_x]}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{N_n(x)} \sum_{\ell=1}^{N_n(x)} Y_\ell}_{\downarrow\ \boxed{\sum_y \mu_x(y) f(y)}}. \qquad (45)$$

A 17. Tétel bizonyításának vázlata (cont.)

Használva a (42) és a (41) formulákat kapjuk, hogy

$$\pi(y) = \frac{\mu_x(y)}{\sum_z \mu_x(z)} = \frac{\mu_x(y)}{\mathbb{E}_x[T_x]}.$$

Ezt összetéve a (45) formulával kapjuk a 17. Tétel bizonyítását (legalábbis bizonyítás vázlatát.)

Összefoglalás

TÉTEL 18

Tegyük fel, hogy egy MC:
- irreducibilis
- aperiodikus
- létezik stacionárius eloszlás π.

Ekkor
- (a) A MC pozitív rekurrens,
- (b) $\lim\limits_{n\to\infty} p^n(i,j) = \pi(j)$, $\forall i,j$
- (c) $\forall j$, $\pi(j) > 0$.
- (d) A stacionárius eloszlás egyértelmű.

Példa: Bolyongás gráfokon

Legyen $G=(V,E)$ egyszerű gráf (nincsenek sem hurkok sem többszörös élek) V a csúcsok, E az élek halmaza. Azt mondjuk, hogy $x,y \in V$ szomszédok, ha él köti őket össze, továbbá, $\deg(x)$ jelöli az $x \in V$ csúcs fokát vagyis a szomszédainak számát. Az egyszerű véletlen bolyongás a gráfon a következő: amikor a lánc $x \in V$-ben van véletlenszerűen (egyenletes eloszlás szerint) kiválaszt egy szomszédot és oda ugrik.

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(x)}, & x,y \text{ szomszédok;} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{46}$$

Példa: Bolyongás gráfokon (cont.)

Nyilván

$$\sum_x \deg(x)p(x,y) = \sum_{y \text{ szomszédja } x\text{-nek}} \frac{\deg(x)}{\deg(x)} = \deg(y). \tag{47}$$

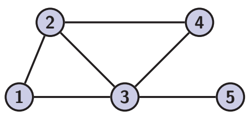
Normalizálás után kapjuk, hogy

$$\pi(y) = \frac{\deg(y)}{2\#E}. \tag{48}$$

stacionárius eloszlást definiál. A fenti esetben ez: $\pi = \left(\frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \frac{2}{12}, \frac{1}{12}.\right)$

Példa: Bolyongás gráfokon (cont.)

PÉLDA 19



	1	2	3	4	5
1	0	1/2	1/2	0	0
2	1/3	0	1/3	1/3	0
3	1/4	1/4	0	1/4	1/4
4	0	1/2	1/2	0	0
5	0	0	1	0	0

Egyszerű gráf és a hozzá tartozó egyszerű véleletlen bolyongás átmenetvalószínűség mátrixa.

DEFINÍCIÓ 20

Egy MC duplán sztochasztikus, ha a valószínűségi átmenet mátrix minden oszlopának összege egyenlő 1-el. $\sum_j p(i,j) = 1$, $\forall j$.

TÉTEL 21

Egy véges állapotterű MC duplán sztochasztikus akkor és csak akkor, ha a stacionárius eloszlás az egyenletes eloszlás.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\#S = N$, akkor

$$\sum_x \pi(x)p(x,y) = \frac{1}{N}\sum_x p(x,y) = \frac{1}{N} = \pi(x).$$

■

Példák

PÉLDA 22 (Bolyongás periodikus peremfeltételekkel)

Tekintsük az A file 32. slide-ján bemutatott bolyongás periodikus peremfeltételekkel példát. Ez nyilván duplán sztochasztikus.

Példák II

Példa: (Köralakú pályán modulo 6 ugrások)
Egy körre felcsavarjuk a $0, 1, 2, \dots, 5$ véges számsorozatot, úgy hogy az 5 és a 0 szomszédok. Egy olyan szabályos dobókockát használunk, melynek

- három oldalán 1-es,
- két oldalán 2-es,
- egy oldalán 3-as van.

Példák II (cont.)

Annyit lépünk előre amennyit dobunk (modulo 6). Az átmenet valószínűség mátrix

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	1/2	1/3	1/6	0	0
1	0	0	1/2	1/3	1/6	0
2	0	0	0	1/2	1/3	1/6
3	1/6	0	0	0	1/2	1/3
4	1/3	1/6	0	0	0	1/2
5	1/2	1/3	1/6	0	0	0

Azonnal látható, hogy az átmenetvalószínűség mátrix harmadik hatványa $\mathbf{P}^3$ minden eleme pozitív. Innen

Példák II (cont.)

következik, hogy a lánc irreducibilis és aperiodikus, vagyis a 18. Tétel feltételei teljesülnek. (Nyilván $\pi(i) = 1/6$, $\forall i$-re.)

Detailed balance condition

Azt mondjuk, hogy π teljesíti a detailed balance condition -t, ha $\forall x, y$-ra

$$\pi(x)p(x,y) = \pi(y)p(y,x) \tag{49}$$

Ha mind két oldalt összegezzük y-ra, kapjuk, hogy

$$\boxed{\sum_y \pi(y)p(y,x)} = \pi(x)\underbrace{\sum_y p(x,y)}_{=1} = \boxed{\pi(x)}.$$

Tehát ha egy valószínűségi mérték eleget tesz a (49) formulának, akkor az stacionárius eloszlás. Van olyan

Detailed balance condition (cont.)

stacionárius eloszlás ami nem teljesíti a (49) formulát. Például: tekintsük azt a MC-t aminek átmenetvalószínűség mátrixa:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Felhasználva, hogy $p(1,3) = 0$, könnyű látni, hogy $\pi(3) = 0$ következne. Innen és a (49) formulából $\pi(2) = \pi(1) = 0$ jönne ami lehetetlen. Másrészt, $\mathbf{P}$ egy duplán sztochasztikus mátrix amire létezik stacionárius eloszlás, nevezetesen az egyenletes eloszlás: $\pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Detailed balance condition (cont.)

Tehát lehet, hogy van stacionárius eloszlás, de nincs a (49) formulának eleget tevő stacionárius eloszlás. Ennek ellenére sokszor ha megsejtjük, hogy mi lesz a stacionárius eloszlás, a legegyszerűbben ezt úgy ellenőrizhetjük, ha ellenőrizzük, hogy a (49) teljesül-e.

Reversible MC

Most a [4, 1.6 fejezetet] használjuk. **Jelölés**: Az (X_n) MC esetén bevezetjük az

$$X_0^n := (X_0, \dots, X_n) \tag{50}$$

Tehát $\mathbf{x} := (x_0, \dots, x_n)$-re

$$\{X_0^n = \mathbf{x}\} = \{X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\} \tag{51}$$

továbbá egy $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)$-re legyen

$$\overleftarrow{\mathbf{x}} := (x_n, x_{n-1}, \dots x_1, x_0).$$

Reversible MC (cont.)

A (49) formulából azonnal következik (házi feladat belátni, hogy):

$$\pi(x_0)p(x_0,x_1)\cdots p(x_{n-1},x_n)=\pi(x_n)p(x_n,x_{n-1})\cdots p(x_1,x_0). \tag{52}$$

Ezt másképpen írva az $\mathbf{x}=(x_0,\dots,x_n)$ jelöléssel:

$$\mathbb{P}_\pi\left(X_0^n=\mathbf{x}\right)=\mathbb{P}_\pi\left(X_0^n=\overleftarrow{\mathbf{x}}\right). \tag{53}$$

Tehát ha az (X_n) Markov láncnak van stacionárius eloszlása, **és** erre teljesül a **detailed balance condition**, akkor az $(X_0,\dots,X_n)$ eloszlása ugyanaz mint az $(X_n,\dots,X_0)$ eloszlása.

Reversible MC (cont.)

DEFINÍCIÓ 23 (reversible MC)

Azt mondjuk, hogy az (X_n) MC reversible (megfordítható) ha létezik stacionárius eloszlása π, és π teljesíti a (49) formulát .

Reversible MC (cont.)

PÉLDA 24 (Egyszerű véletlen bolyongás gráfokon, 67. slide)

Tekintsünk egy egyszerű véletlen bolyongást egy $G=(V,E)$ gráfon. Használva a (67) slide jelöléseit, ekkor a stacionárius eloszlás: $\pi(y)=\deg(y)/2\#E$. Azonnal látszik (házi feladat), hogy ez teljesíti a detailed balance condition-t:

$$\pi(x)p(x,y)=\pi(y)p(y,x), \quad \forall x,y\in S.$$

Reversible MC (cont.)

PÉLDA 25 (Bolyongás periodikus peremfeltételekkel (A file 32. slide))

Emlékeztető: véges állapottér (számossága N) a körre felcsavarva. Az óramutató járásával egyező irányba p valószínűséggel, az ellentétes irányba $q=1-p$ valószínűséggel ugrunk 1-et. A lánc duplán sztochasztikus, így $\pi=(\frac{1}{N},\dots,\frac{1}{N})$. Azonban

$$\pi(k)p(k,k+1)=\frac{p}{N} \text{ és } \frac{q}{N}=\pi(k+1)p(k+1,k)$$

ezek csak akkor egyenlőek ha $p=q$. Tehát más esetekben a detiled balance condition nem teljesül.

DEFINÍCIÓ 26 (Fordított idejű lánc)

Adott egy (X_n) irreducibilis MC, melynek átmenetvalószínűség mátrixa $\mathbf{P}$ és stacionárius eloszlása π. Definiáljuk a $\widehat{\mathbf{P}}$ mátrixot:

$$\widehat{\mathbf{p}}(x,y):=\frac{\pi(y)p(y,x)}{\pi(x)}. \tag{54}$$

Ekkor $\widehat{\mathbf{P}}$ egy sztochasztikus mátrix (minden elem nem-negatív, minden sor összeg egyenlő 1-el.) Tehát $\widehat{\mathbf{P}}$ meghatároz egy $(\widehat{X}_n)$ MC-t, amit az (X_n) time reversal -ének hívunk.

Nyilván, ha (X_n) reversible, akkor $\mathbf{P}=\widehat{\mathbf{P}}$.

Time reversal

TÉTEL 27

Használva a 26. Definíció jelöléseit:

(a) π stacionárius eloszlás nem csak (X_n)-re de szintén $(\widehat{\mathbf{X}}_n)$-re is és

(b) minden $\mathbf{x}$-re:

$$\mathbf{P}_\pi\left(X_0^n=\mathbf{x}\right)=\mathbf{P}_\pi\left(X_0^n=\overleftarrow{\mathbf{x}}\right) \tag{55}$$

Time reversal (cont.)

Bizonyítás. Először belátjuk az (a) -részt:

$$\sum_y \pi(y)\widehat{p}(y,x)=\sum_y \pi(y)\frac{\pi(x)p(x,y)}{\pi(y)}=\pi(x).$$

Most igazoljuk a (b) részt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\pi\left(X_0^n=\mathbf{x}\right) &= \pi(x_0)p(x_0,x_1)p(x_1,x_2)\cdots p(x_{n-1},x_n)\\ &= \pi(x_n)\widehat{p}(x_n,x_{n-1})\cdots\widehat{p}(x_2,x_1)\widehat{p}(x_1,x_0)\\ &= \mathbb{P}_\pi\left(\widehat{X}_0^n=\overleftarrow{\mathbf{x}}\right).\end{aligned}$$

■

Születési és halálozási folyamatok

Születési és halálozási folyamat oknak hívjuk az olyan MC-t, amelynek állapottere

$$S:=\{k,k+1,\dots,n\}.$$

és soha nem ugorhat 1-nél többet. Vagyis a lehetséges ugrások: $-1,0,1$. Az átmenetvalószínűség mátrix:

$$p(x,y)=0 \text{ ha } |x-y|>1:$$

Születési és halálozási folyamatok (cont.)

A **P** átmenetvalószínűség mátrix tehát

$$p(x,x+1) = p_x \text{ ha } x < n$$
$$p(x,x-1) = q_x \text{ ha } x > k$$
$$p(x,x) = 1 - p_x - q_x \text{ ha } k \le x \le n.$$

és minden más $p(x,y) = 0$. Vigyázat itt $p + q \neq 1$ lehetséges!

Születési és halálozási folyamatok (cont.)

TÉTEL 28

Minden születési és halálozási folyamat reversible ha $\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{p_k}{q_k} < \infty$, ahol $\Pi_{k=1}^{0} := 1$.

Bizonyítás. Azt kell belátni, hogy található olyan π valószínűségi mérték S-en amely kielégíti a (49) formulát. Eszerint $x < n$-re teljesülni kell annak, hogy:

$$\pi(x+1)\underbrace{p(x+1,x)}_{q_{x+1}} = \pi(x)\underbrace{p(x,x+1)}_{p_x}$$

Születési és halálozási folyamatok (cont.)

Vagyis ahhoz, hogy (49) teljesüljön szükséges, hogy

$$\pi(x+1) = \frac{p_x}{q_{x+1}}\pi(x). \tag{56}$$

Ezt iterálva minden $1 \le i \le n-k$-ra

$$\pi(k+i) = \pi(k) \cdot \underbrace{\frac{p_{k+i-1} \cdot p_{k+i-2} \cdots p_{k+1} \cdot p_k}{q_{k+i} \cdot q_{k+i-1} \cdots q_{k+2} \cdot q_{k+1}}}_{r_i} \tag{57}$$

Könnyű látni, hogy ha $\pi(k)$-t úgy választjuk, hogy

$$\pi(k) \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{n-k} r_i\right) = 1, \tag{58}$$

Születési és halálozási folyamatok (cont.)

teljesüljön, akkor π egy stacionárius eloszlás, amely teljesíti a detailed balance condition-t vagyis a lánc reversible.

∎ Az Ehrenfset láncra (I. A file 8. slide) már kiszámoltuk a stacionárius eloszlást (I. A file 114. slide). Azt kaptuk, hogy $\pi(k) = 2^{-N}\binom{N}{k}$, de ehhez egy kellemetlen generátor függvényes levezetés kellett. Most ezt az eredményt könnyen megkaphatjuk az (57) formulából hiszen az Ehrenfest lánc nyilvánvalóan születési és halálozási folyamat.

Születési és halálozási folyamatok (cont.)

PÉLDA 29 (π az Ehrenfest láncra (lásd A file 8. slide))

Itt $S = \{0,1,\dots,N\}$. Az (57) formulába való behelyettesítés után azonnal kapjuk, hogy

$$r_i = \binom{N}{i} \text{ ha } 1 \le i \le N.$$

Mivel $1 + \sum_{i=1}^{N} r_i = 2^N$ ezért $\pi(i) = 2^{-N}\binom{N}{i}$, $i = 0,\dots,N$.

Egy másik javítási lánc

Tegyük fel, hogy egy hivatalban három gép működik. Minden nap minden működő gépre, 0.1 a valószínűsége annak, hogy elromlik. Ha azonban legalább egy hibás, akkor a technikus 0.5 valószínűséggel meg tudja javítani valamelyik rossz gépet másnapra. Ignoráljuk annak az esélyét, hogy egy nap legalább két gép tönkre megy. Legyen X_n a működő gépek száma az n-edik nap

Egy másik javítási lánc (cont.)

reggelén. Ekkor (X_n) Markov folyamat, melynek átmenetvalószínűség mátrixa:

	0	**1**	**2**	**3**
0	0.5	0.5	0	0
1	0.05	0.5	0.45	0
2	0	0.1	0.5	0.4
3	0	0	0.3	0.7

Magyarázat: $p(1,0) = 0.1 \cdot 0.5$, $p(1,2) = 0.5 \cdot 0.9$, $p(2,1) = 0.2 \cdot 0.5$ és $p(2,3) = 0.5 \cdot 0.8$. Az első és

Egy másik javítási lánc (cont.)

harmadik sor még triviálisabb. **Feladat:** határozzuk meg a stacionárius eloszlást!

Megoldás: Mivel ez egy születési és halálozási folyamat, a stacionárius eloszlás eleget tesz a detailed balance condition-nek. Tehát π-t meghatározhatjuk az (56)

Egy másik javítási lánc (cont.)

formula segítségével:

$$\pi(1) = \pi(0) \cdot \frac{p_0}{q_1} = c \cdot \frac{0.5}{0.05} = 10c$$
$$\pi(2) = \pi(1) \cdot \frac{p_1}{q_2} = 10c \cdot \frac{0.45}{0.1} = 45c$$
$$\pi(3) = \pi(2) \cdot \frac{p_2}{q_3} = 45c \cdot \frac{0.4}{0.3} = 60c$$

Tehát $1 = \pi(0) + \cdots + \pi(3) = c\,(1 + 10 + 45 + 60)$.
Innen $c = 1/116$. Vagyis

$$\pi(0) = \frac{1}{116},\ \pi(1) = \frac{10}{116}, \pi(2) = \frac{45}{116},\ \pi(3) = \frac{60}{116}.$$

Motiváló példa

Képzeljünk el egy két éves iskolát.

- **Az első évesek:** 60%-a másodéves lesz, 25%-a vissza bukik elsőbe, 15% kilép (K) vagyis otthagyja az iskolát.
- **Az másodévesek évesek:** 70%-a sikerrel elvégzi az iskolát (S), 20% vissza bukik másod évesnek, 10%-a kilép.

Motiváló példa (cont.)

Ekkor ha $S = \{1, 2, S, K\}$ vagyis (elsős, másodikas, sikeresen végez, kilép), és X_n mutatja, hogy egy diák n év múlva melyik állapotban van, akkor (X_n) egy MC, melynek állapottere S és átmenetvalószínűség mátrixa:

	1	2	S	K
1	0.25	0.6	0	0.15
2	0	0.2	0.7	0.1
S	0	0	1	0
K	0	0	0	1

Motiváló példa (cont.)

Legyen $h(x)$, $x \in S$ annak valószínűsége, hogy a jelenleg x állapotban lévő hallgató valahány év múlva sikeresen végez. Ekkor

$$h(1) = 0.25h(1) + 0.6h(2)$$
$$h(2) = 0.2h(2) + 0.7.$$

Innen $h(2) = 7/8$ és $h(1) = 0.7$.

TÉTEL 30

Adott egy MC, melynek S állapottere véges. Legyen $a, b \in S$ és $C := S \setminus \{a, b\}$. Tegyük fel, hogy

(a) $h(a) = 1$,
(b) $h(b) = 0$,
(c) $\forall x \in C$:

$$h(x) = \sum_{y \in S} p(x, y) h(y). \tag{59}$$

Legyen $V_y = \min\{n \geq 0 : X_n = y\}$. Tegyük fel, hogy $\forall x \in C$: $\mathbb{P}_x(V_a \wedge V_b < \infty) > 0$. Ekkor $h(x) = \mathbb{P}_x(V_a < V_b)$.

Bizonyítás

Legyen $T := V_a \wedge V_b$. Az A file 6. Lemma következtében

$$\forall x \in C,\ \mathbb{P}_x(T < \infty) = 1.$$

Az (59) formulából következik, hogy $\forall x \neq a, b$-re $h(x) = \mathbb{E}_x h(X_1)$. Továbbá $n > 1$-re

$$h(x) = \mathbb{E}_x h(X_{T \wedge n}). \tag{60}$$

(Ezt belátjuk a köv. slide-on.) Innen

$$h(x) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}_x \left[h(X_{T \wedge n})\right] = \mathbb{E}_x h(X_T) = \mathbb{P}(V_a < V_b).$$

Bizonyítás (cont.)

Most igazoljuk a (60) formulát. Rögzítsünk egy $n > 1$-et és egy $x \in C$-t. Legyen

$$u_1(x, a) := \mathbb{P}_x(X_1 = a) = p(x, a)$$

és $k \geq 2$-re

$$\begin{aligned} u_k &= \mathbb{P}_x(X_k = a, T = k) \cdot \underbrace{h(a)}_{1} \\ &= \sum_{x_1, \dots, x_{k-1} \in C} p(x, x_1) p(x_1, x_2) \cdots p(x_{k-1}, a). \end{aligned}$$

Bizonyítás (cont.)

Végül legyen

$$S_k := \sum_{x_1,\dots,x_k \in C} p(x,x_1)p(x_1,x_2)\cdots p(x_{k-1},x_k)h(x_k).$$

Nyilvánvalóan

$$\mathbb{E}_x[h(T_{X\wedge n})] = \mathbb{E}_x[h(T_{X\wedge n}); T>n] + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_x\left[h(T_{X\wedge n}), T=k\right]$$
$$= S_n + \sum_{k=1}^{n} u_k. \tag{61}$$

Bizonyítás (cont.)

Az (59) formulából adódik, hogy

$$S_k = S_{k-1} - u_k,$$

ha $k \geq 1$ és $S_0 = h(x)$. Így a (61) formulából:

$$\mathbb{E}_x\left[h(X_{T\wedge n})\right] = h(x).\blacksquare$$

Wright-Fisher model I. A file 23. slide

Az állapottér $S = \{0,1,\dots,2N\}$. Az elnyelő állapotok, 0 és $2N$.Kérdés milyen valószínűséggel kötünk ki a $2N$-be vagyis a modell nyelvén, milyen valószínűséggel lesz egyszer csak minden gén A?
Az átmenetvalószínűség mátrix:

$$p(x,y) = \underbrace{\binom{2N}{y}\left(\frac{x}{2N}\right)^{y}\left(1-\frac{x}{2N}\right)^{N-y}}_{\mathrm{binomial}(2N,x/2N)}.$$

Wright-Fisher model I. A file 23. slide (cont.)

Tudjuk, hogy a $\mathrm{binomial}(2N,x/2N)$ v.v. várható értéke x. Ezért, ha $h(y) = y/2N$, akkor

$$h(x) = \sum_{y=0}^{2N} p(x,y)h(y).$$

Legyen $a = 2N$ és $b = 0$. Ekkor $h(a) = 1$ és $h(b) = 0$. Nyilvánvalóan:

$$\mathbb{P}_x\left(V_a \wedge V_b < \infty\right) > 0, \quad \forall 0 < x < N.$$

Wright-Fisher model I. A file 23. slide (cont.)

Tehát alkalmazhatjuk a 30. Tételt, amiből:

$$\mathbb{P}_x\left(V_N < V_0\right) = h(x) = \frac{x}{N}. \tag{62}$$

Példa: Gambler's ruin

Itt használjuk az A file 4. slide jelöléseit, ahol a Gambler's ruin példa bevezetésre került. Legyen

$$h(x) = \mathbb{P}_x\left(V_N < V_0\right).$$

Nyilván $h(N) = 1$ és $h(0) = 0$. Mint általában, legyen $q := 1-p$. Legyen $0 < x < N$. Egy lépés után $X_{n+1} = x+1$ lesz p valószínűséggel, és $X_{n+1} = x-1$ lesz q valószínűséggel. Vagyis $0 < x < N$ esetén:

$$h(x) = ph(x+1) + qh(x-1). \tag{63}$$

Példa: Gambler's ruin (cont.)

Vagyis $p\left(h(x+1)-h(x)\right) = q\left(h(x)-h(x-1)\right)$. Innen

$$h(x+1)-h(x) = \frac{q}{p}\left(h(x)-h(x-1)\right) \tag{64}$$

Legyen $c := h(1)-h(0)$. Tehát a (64) formulából $x \geq 1$-ra

$$h(x)-h(x-1) = c\left(\frac{q}{p}\right)^{x-1}.$$

Innen

$$1 = h(N)-h(0) = \sum_{x=1}^{N} h(x)-h(x-1) = c\sum_{x=1}^{N}\left(\frac{q}{p}\right)^{x-1}.$$

Példa: Gambler's ruin (cont.)

Vagyis, ha $\theta = q/p$, akkor $c = (1-\theta)/(1-\theta^N)$. Tehát

$$h(x) = h(x)-h(0) = c\sum_{i=0}^{x-1}\theta^i = \frac{1-\theta^x}{1-\theta^N}.$$

Tenisz 3 — 3-nál

A Probléma: Teniszben egy game győztese az aki először eléri a 4 pontot, kivéve, ha ez 4 — 3 aránnyal történik. Ebben az esetben addig játszanak amíg valamelyik játékos két pontos előnyt nem szerez. Tegyük fel, hogy a szerváló nyeri a pontot 0.6 valószínűséggel és az egyes pontok nyerési esélye független egymástól. Mi a valószínűsége annak, hogy a szerváló játékos nyeri a game-t, ha az állás most (a szerváló játékos szempontjából) 3 — 2, 3 — 3 vagy 2 — 3?
Megoldás: A játékot a Markov láncok nyelvén fogalmazzuk meg. Legyen az állapottér

Tenisz 3 — 3-nál (cont.)

$S := \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ és X_n a pont különbség a játékosok között, a szerváló játékos szempontjából. A 2 állapot és a -2 állapot elnyelő, mert ebben az esetben vége a játéknak. (2 esetén a szerváló, -2-nél az ellenfele nyert.) Ekkor az átmenetvalószínűség mátrix:

	2	1	0	-1	-2
2	1	0	0	0	0
1	0.6	0	0.4	0	0
0	0	0.6	0	0.4	0
-1	0	0	0.6	0	0.4
-2	0	0	0	0	1

Tenisz 3 — 3-nál (cont.)

Legyen $h(x)$ annak a valószínűsége, hogy $X_0 = x$-ből indulva a szerváló győz. Nyilván,

$$h(2) = 1 \text{ és } h(-2) = 0.$$

Az egylépéses okoskodásból:

$$h(x) = \sum_y p(x, y) h(y). \tag{65}$$

Tudjuk, hogy $h(2) = 1$ és $h(-2) = 0$. Legyen $C = S \setminus \{-2, 2\}$ vagyis a nem elnyelő állapotok. Ezekre:

Tenisz 3 — 3-nál (cont.)

$$\begin{aligned} h(1) &= 0.6 + 0.4h(0) \\ h(0) &= 0.6h(1) + 0.4h(-1) \\ h(-1) &= 0.6h(0). \end{aligned} \tag{66}$$

Nincs 0.4-es összeadandó az utolsó sorban mivel $h(-2) = 0$. Legyen az $\mathbf{R} = (r(x, y))_{x,y \in C}$ a $\mathbf{P}$ mátrix megszorítása a C-beli oszlopok és sorokra, továbbá $\widehat{\mathbf{h}}$ az

Tenisz 3 — 3-nál (cont.)

a vektor, amit úgy kapunk, hogy a $\mathbf{h}$ vektornak a C-n kívüli koordinátáit eldobjuk. Ekkor: a (66) formula:

$$\widehat{\mathbf{h}} - \mathbf{R} \cdot \widehat{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{67}$$

Ami tehát

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -0.4 & 0 \\ -0.6 & 1 & -0.4 \\ 0 & -0.6 & 0 \end{bmatrix}}_{I_R} \cdot \begin{bmatrix} h(1) \\ h(0) \\ h(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tenisz 3 — 3-nál (cont.)

Tehát

$$\begin{bmatrix} h(1) \\ h(0) \\ h(-1) \end{bmatrix} = (I - R)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8769 \\ 0.6923 \\ 0.4154 \end{bmatrix}$$

Motiváló példa

A 99. slide-on bevezetett motiváló példát tekintjük megint. Ott az volt a kérdés, hogy egy $k = 1, 2$-éves hallgató mekkora valószínűséggel végez. Itt most ugyanerre a példára azt kérdezzük, hogy
KÉRDÉS: Átlagosan mennyi idő alatt végez egy diák?
Legyen $g(x)$ a várható értéke az x-edikes diák végzéséhez szükséges évek számának. $g(K) = g(S) = 0$. Megint csak azt nézzük mi történik egy lépés múlva:

$$g(1) = 1 + 0.25g(1) + 0.6g(2)$$
$$g(2) = 1 + 0.2g(2).$$

Motiváló példa (cont.)

Innen azonnal kapjuk, hogy $g(2) = 1.25$ és $g(1) = 2.333$.

Exit time

TÉTEL 31

Tekintsük a véges S állapotterű (X_n) Markov láncot. Legyen $A \subset S$ és $C := S \setminus A$, továbbá $V_A := \min\{n \geq 0 : X_n \in A\}$. Feltesszük, hogy:

(a) $\mathbb{P}_x(V_A < \infty) > 0$, $\forall x \in C$,

(b) $g(a) = 0$, $\forall a \in A$,

(c) $\forall x \in C$-re $g(x) = 1 + \sum_y p(x,y)g(y)$.

Ekkor,

$$g(x) = \mathbb{E}_x[V_A]. \tag{68}$$

A 31. Tétel néhány alkalmazása

Bizonyítás. A bizonyítás hasonlóan megy mint a 30. Tétel bizonyítása, ezért ez Házi Feladat. ■

PÉLDA 32

Szabályos érmét dobunk addig amíg kétszer egymás után írás nem lesz az eredmény. Kérdés mi ezen dobások várható száma?

Megoldás: I-t írunk, ha a dobás eredménye írás és F-et, ha fej. Legyen T_{II} azon dobások (véletlen) száma amíg először megkapjuk az egymás utáni két írást vagyis az II-t. Ehhez asszociálunk egy (X_n) Markov láncot

A 31. Tétel néhány alkalmazása (cont.)

$S := \{0, 1, 2\}$, állapottérrel, ahol X_n az egymás utáni írások száma az n-edik dobás után. Tehát ha az n-edik dobás eredménye fej, akkor $X_n = 0$, ha írás, akkor $X_n = 1$ vagy $X_n = 2$ attól függően, hogy X_{n-1} fej volt vagy írás. A 2 állapotot elnyelőnek állíthatjuk be mert úgyis csak addig dobunk amíg ez be nem következik. Tehát az átmenetvalószínűség mátrix:

	0	**1**	**2**
0	1/2	1/2	0
1	1/2	0	1/2
2	0	0	1

A 31. Tétel néhány alkalmazása (cont.)

Legyen

$$V_2 := \min\{n \geq 0 : X_n = 2\} \text{ és } g(x) := \mathbb{E}_x[V_2].$$

Ekkor az egy-lépéses okoskodásból:

$$\begin{aligned} g(0) &= 1 + 0.5g(0) + 0.5g(1) \\ g(1) &= 1 + 0.5g(0). \end{aligned} \tag{69}$$

Legyen $\mathbf{1}$ az a vektor $\mathbb{R}^2$-ben, aminek mind a két komponense 1. Ekkor $g(0) = 0$ és a (69) formula:

$$(I - R) \cdot \hat{\mathbf{g}} = \mathbf{1},$$

A 31. Tétel néhány alkalmazása (cont.)

ahol mint korábban R, az a mátrix, amit $\mathbf{P}$-ből úgy kapunk, hogy eldobjuk az elnyelő állapotokat (jelen esetben a 2-őt), továbbá $\hat{\mathbf{g}}$ az a vektor, amit úgy kapunk a $\mathbf{g}$ vektorból, ha eldobjuk az elnyelő állapotoknak megfelelő komponenseket. Innen

$$\hat{\mathbf{g}} = (I - R)^{-1} \cdot \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vagyis $\mathbb{E}_0[V_2] = 6$.

Tenisz 3 — 3-nál

A 113. slide-on bevezetett tenisz problémát tekintjük újra. **Kérdés:** Várhatóan meddig tart a játék, ha az állás most (a szerváló játékos szemszögéből) $2-3$, $3-3$ illetve $3-2$?

Megoldás: Legyen $g(x)$ a játék várható időtartama feltéve, hogy az $x \in \{1, 0, -1\}$ állapotból indulunk. Az előző feladat jelöléseivel analóg jelöléseket használva:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

Tenisz 3 — 3-nál (cont.)

és innen

$$I - R = \begin{bmatrix} 1 & -0.4 & 0 \\ -0.6 & 1 & -0.4 \\ 0 & -0.6 & 1 \end{bmatrix}$$

Vagyis az előző feladathoz hasonlóan:

$$\hat{\mathbf{g}} = (I - R)^{-1} \cdot \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 19/13 & 10/13 & 4/13 \\ 15/13 & 25/13 & 10/13 \\ 9/13 & 15/13 & 19/13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát $3-3$ esetén a várható időtartam:

$$g(0) = \frac{15 + 25 + 10}{13} = 3.846.$$

Példa: Amatőr énekesek I

Ez a feladat a Resnik könyvből van: [5, 106. oldal].

Egy étteremben amatőr énekesek lépnek fel. Ezek a barátaikkal együtt jönnek fellépni, akik többnyire hasonló képességűek énekesek ezért az egymás utáni fellépők képességei nem függetlenek egymástól, hanem a következő slidon adott P átmenetvalószínűség mátrix által meghatározottak. Az énekeseket 1-5 osztályba sorolják. (Az első osztály a legjobb.) Az ötödik osztályú énekesek az esetek 0.3 részében lázadást váltanak ki. Ennek helyreállítása után folytatódik az énekesek fellépése. Az első énekes mindig egy másodosztályú énekes.

Példa: Amatőr énekesek II

$$P = \left(\begin{array}{c|cccc||c} 0.05 & 0.15 & 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0 \\ \hline 0.05 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.05 & 0 \\ 0.05 & 0.2 & 0.3 & 0.35 & 0.1 & 0 \\ 0.05 & 0.2 & 0.3 & 0.35 & 0.1 & 0 \\ 0.01 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.39 & 0.3 \\ \hline\hline 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{array}\right)$$

Kérdések:

(A) Mi a valószínűsége, hogy legalább egy elsőosztályú énekest látunk az első lázadás előtt?

(B) Várhatóan hány énekest látunk az első lázadás előtt?

Megoldás: Amatőr énekesek I (A)

Használva a 30. Tétel jelöléseit: $A := \{1\}$, $B := \{6\}$ és $C := \{1, 2, 3, 4\}$. Továbbá: legyen

$$R := \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.05 \\ 0.2 & 0.3 & 0.35 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.35 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.39 \end{pmatrix}, \mathbf{Y} := \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.05 \\ 0.05 \\ 0.01 \end{pmatrix}$$

Legyen

$$\hat{\mathbf{h}} := (I - R)^{-1} \cdot \mathbf{Y},$$

ahol I a 4×4 egység mátrix (diagonális mátrix, melynek minden diagonális eleme egyenlő 1-el.) Az általunk keresett érték $\hat{h}(1) = 0.557$.

Megoldás: Amatőr énekesek I (B)

Itt az elnyelő állapot $A = \{6\}$. Tehát itt csak a 6. sort és a 6. oszlopot dobjuk ki, hogy az R mátrixot megkapjuk (különbözik az (A) rész R mátrixától.)

$$R := \begin{pmatrix} 0.05 & 0.15 & 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.05 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.05 \\ 0.05 & .2 & .3 & 0.35 & 0.1 \\ 0.05 & .2 & .3 & 0.35 & 0.1 \\ 0.01 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.39 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Amatőr énekesek II (B)

Legyen

$$\hat{\mathbf{g}} := (I - R)^{-1} \cdot \mathbf{1},$$

ahol $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^5$ az a vektor aminek mind az 5 komponense egyenlő 1-el.

$$(I - R)^{-1} = \begin{pmatrix} 2.068 & 4.854 & 6.541 & 7.229 & 3.333 \\ 1.152 & 6.389 & 7.046 & 7.788 & 3.333 \\ 1.123 & 5.149 & 7.869 & 7.644 & 3.333 \\ 1.122 & 5.149 & 6.869 & 8.644 & 3.333 \\ 0.591 & 2.815 & 3.678 & 4.066 & 3.333 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Amatőr énekesek III (B)

$$\hat{\mathbf{g}} := (I - R)^{-1} \cdot \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 24.026 \\ 25.710 \\ 25.119 \\ 25.119 \\ 14.484 \end{pmatrix}.$$

Mivel másodosztályú énekessel kezdünk ezért amit keresünk az $\hat{g}(2) = 25.710$. Vagyis másodolytályú énekessel kezdve várhatóan 25.710 dalt hallunk a lázadás előtt.

Hivatkozások

[1] R. Durrett
Essentials of Stochastic Processes, Second edition
Springer, 2012. A majdnem kész változatért kattintson ide.

[2] R. Durrett
Probability Theory with examples, Second edition
Duxbury Press, 1996 . második kiadás.

[3] S. Karlin, H.M. Taylor
Sztochasztikus Folyamatok
Gondolat, Budapest, 1985

Hivatkozások (cont.)

[4] D.A. Levin, Y. Peres,E.L. Wilmer
Markov chains and mixing times
American Mathematical Society, 2009.

[5] R.I. Resnik
Adventures in Stochastic Processes
Birkhäuser 2002.

[6] Tóth Bálint *Sztochasztikus folyamatok jegyzet*
Tóth Bálint Jegyzetért kattintson ide

Index