Sztochasztikus folyamatok

Simon Károly
Ez az előadás
Rick Durrett Essentials of Stochastic processes
könyvére épül

Department of Stochastics
Institute of Mathematics
Technical University of Budapest
www.math.bme.hu/~simonk

A file 2015-02-24

Gambler's ruin Képzeljünk el egy olyan szerencse játékot, amelynek minden fordulójában:
- $p = 0.4$ valószínűséggel nyerünk \$1-et
- $1 - p = 0.6$ valószínűséggel veszítünk \$1-et.

A megáll ha elérünk egy előre adott $N = 4$ dollár értéket, illetve, ha a pénzünk elfogy.

Az n-edik játék után X_n dollárunk van. Ekkor X_n "Markov tulajdonságú" . Vagyis :
ha ismerjük az X_n értékét, akkor bármilyen más további információ arra vonatkozólag, hogy az első $n-1$ játék után mennyi pénzünk volt, semmit nem segít abban, hogy a lehető legjobb becslést adjuk az X_{n+1} értékére.
Vagyis:

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = i+1 \middle| X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i\right) = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = i+1 \middle| X_n = i\right), \quad (1)$$

amely valószínűség egyenlő 0.4-el feltételünk szerint.

Homogén diszkrét idejű Markov lánc

DEFINÍCIÓ 1
Azt mondjuk, hogy X_n egy homogén diszkrét idejű Markov lánc, a $\mathbf{P} = p(i,j)$ átmenetvalószínűség mátrix-al, ha minden n, re és minden $i, j, i_{n-1}, \ldots, i_0$-ra:

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = j \middle| X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i\right) = p(i,j) \quad (2)$$

A $\mathbf{P}$ mátrixot Markov-mátrixnak is hívják.

A $\mathbb{P}$ mátrix írja le a játékszabályokat. A Gambler's ruin példában:

A Gambler's ruin példában ha $N = 4$, $\mathbf{P}$ az alábbi 5×5-ös mátrix:

	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	0.6	0	0.4	0	0
2	0	0.6	0	0.4	0
3	0	0	0.6	0	0.4
4	0	0	0	0	1

Ehrenfest lánc

Adott két urna, amelyekben összesen N golyó van. Az egyik urnát jobboldali a másikat baloldali urnának hívjuk. Véletlenszerűen kiválasztjuk valamelyik golyót és áthelyezzük a másik urnába. Legyen X_n a baloldali urnában lévő golyók száma az n-dik áthelyezés után. Ekkor X_n homogén Markov lánc hiszen

$$p(i, i+1) = \frac{N-i}{N}, \quad p(i, i-1) = \frac{i}{N} \text{ ha } 0 \leq i \leq N$$

és $p(i,j) = 0$ egyébként.

Ehrenfest lánc (cont.)

Az átmenetvalószínűség mátrix:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	0	0	0
1	1/4	0	3/4	0	0
2	0	2/4	0	2/4	0
3	0	0	3/4	0	1/4
4	0	0	0	1	0

Időjárási lánc

Legyen X_n értéke egy bizonyos sziget időjárási állapota által meghatározott. Nevezetesen $X_n = 1$ ha az $n$edik napon esős az idő és $X_n = 2$ ha napos. Tegyük fel, hogy annak valószínűsége, hogy esős időt esős követ 0.6 és hogy napos idő követ 0.4. Továbbá a valószínűsége, hogy napos időt esős követ 0.2 és napos követ 0.8 valószínűséggel. Ekkor a Markov-mátrix:

	1	**2**
1	0.6	0.4
2	0.2	0.8

Kérdés: Hosszú távon mi a napsütéses napok aránya?

Szociális mobilitási lánc

Legyen X_n egy család szociális osztálya az n-edik generációban, ha
alsó osztály:1 közép osztály:2 felső osztály:3
Tegyük fel, hogy a valószínűsége a szociális osztály változásnak a következő Markov mátrix által adott:

	1	**2**	**3**
1	0.7	0.2	0.1
2	0.3	0.5	0.2
3	0.2	0.4	0.4

Kérdés: Az egyes osztályokba tartozó emberek aránya stabilizálódik-e?

Diszkrét sorbanállási lánc

Egy kiszolgálási rendszerbe minden nap egyetlen igényt tudnak kielégíteni (ha van igény egyáltalán). Az n-edik nap beérkező igények száma egy valószínűségi változó (v.v.) ξ_n melynek eloszlása

$$\mathbb{P}(\xi_n = k) = a_k, \text{ ahol } k = 0, 1, 2 \ldots$$

azonos minden n-re és ξ_n v.v.-k függetlenek. Legyen X_n az n-edik nap reggelén kiszolgálásra váró igények száma. Ha ma reggel $i \geq 1$ igény vár kiszolgálásra, akkor holnap reggel $i - 1 + \xi$ igény várakozik, míg ha ma nem

Diszkrét sorbanállási lánc (cont.)

várakozik egy igény sem, akkor holnap reggel ξ igény fog várakozni. Vagyis

$$X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + \xi_n.$$

Innen adódik, hogy

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Készletezési lánc

s, S **raktározási stratégia**:Ha a nap végén a boltban egy adott áruból több mint s darab van, akkor másnap reggelre nem hozatnak ebből az áruból egyet sem. Azonban, ha a nap végén ezen áruból s vagy annál kevesebb van, akkor annyit hozatnak, hogy másnap reggelre S darab legyen ebből az áruból. Legyen X_n ezen áruk száma az n-edik nap végén és D_{n+1} jelöli, hogy ezen áruból milyen nagy a kerslet az $n+1$-edik napon. Használva a $x^+ := \max\{x, 0\}$ jelölést:

$$X_{n+1} = \begin{cases} (X_n - D_{n+1})^+, & \text{ha } X_n > s; \\ (S - D_{n+1})^+, & \text{ha } X_n \leq s. \end{cases}$$

Készletezési lánc (cont.)

Egy konkrét példa: Legyen $s = 1, S = 5$ és
$\mathbb{P}(D_{n+1} = 0) = 0.3,\ \mathbb{P}(D_{n+1} = 1) = 0.4$
$\mathbb{P}(D_{n+1} = 2) = 0.2,\ \mathbb{P}(D_{n+1} = 3) = 0.1$

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	0	0.1	0.2	0.4	0.3
1	0	0	0.1	0.2	0.4	0.3
2	0.3	0.4	0.3	0	0	0
3	0.1	0.2	0.4	0.3	0	0
4	0	0.1	0.2	0.4	0.3	0
5	0	0	0.1	0.2	0.4	0.3

Készletezési lánc (cont.)

Feltéve, hogy minden eladott árun 12$-t nyerünk, de 2$ba kerül az áru egynapi raktározása
Kérdés:

- Mi lesz a hosszú távú nyereség ezen az árun?
- Hogyan kell választani s, S értékét, hogy a haszon maximális legyen.

Javítási lánc

Egy gépben három olyan alkatrész van, amelyek tönkre mehetnek, de a gép működik amíg legalább az egyik ezek közül az alkatrészek közül működő képes. Amint elromlik legalább kettő ezen alkatrészek közül, azokat kicserélik rögtön és a gép másnap reggeltől újra működik. Feltesszük, hogy semelyik két alkatrész nem hibásodik meg ugyanazon a napon, továbbá annak valószínűsége, hogy az 1-es a 2-es és a 3-as alkatrész meghibásodik rendre: 0.01, 0.02 és 0.04.
Ha Markov láncokkal szeretnénk ezt a folyamatot modellezni, célszerű az állapot térnek a

Javítási lánc (cont.)

$\{0, 1, 2, 3, 12, 13, 23\}$ halmazt választani aszerint, hogy éppen melyik alkatrészek hibásak. Az átmenet valószínűség mátrix:

	0	1	2	3	12	13	23
0	0.93	0.01	0.02	0.04	0	0	0
1	0	0.94	0	0	0.02	0.04	0
2	0	0	0.95	0	0.01	0	0.04
3	0	0	0	0.97	0	0.01	0.02
12	1	0	0	0	0	0	0
13	1	0	0	0	0	0	0
13	1	0	0	0	0	0	0

Javítási lánc (cont.)

Kérdés: 1800 nap alatt kb hány alkatrészet használunk el az 1-es,2-es és a 3-as típusok közül?

Elágazó folyamatok vizsgálatának története

Francis Galton 1873-ban az Educational Times-ben kérdezte: mi a valószínűsége annak, hogy kihal egy család férfi ágon vagyis "kihal a név"? Reverend Henry William Watson megválaszolta a kérdést és ketten együtt 1874-ben írtak egy cikket On the probability of extinction of families címmel. Ezért a megfelelő Markov láncot Galton-Watson folyamatnak hívjuk. Tehát itt csak a fiú gyerekek különböző generációkba tartozó számát követjük mert ők viszik tovább a nevet.

Elágazó folyamatok

(Branching processes) Tekintsünk egy populációt, amelyben a 0- adik generáció egy személyből áll és az n-edik generációban mindenki egymástól függetlenül p_k valószínűséggel ad életet k gyereknek, akik az $n+1$-edik generációba tartoznak. Itt $k = 0, 1, 2, \ldots$ Legyen X_n az n-edik generációba tartozó egyedek száma. Az állapot tér tehát $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Ha $Y_1, Y_2, \ldots$ független valószínűségi változók, melyekre $\mathbb{P}(Y_m = k) = p_k$, akkor az átmenetvalószínűség mátrix: $p(0, 0)$ és

$$p(i, j) := \mathbb{P}(Y_1 + \cdots + Y_i = j) \text{ ha } i > 0 \text{ és } j \geq 0,$$

Elágazó folyamatok (cont.)

Speciális eset: Az utódok száma geometriai eloszlású:

$$p_\ell := \mathbf{P}(\text{ utódok száma } = \ell) = q^\ell p.$$

Ekkor az átmenetvalószínűség mátrix (k, ℓ)-edik eleme:

$$p(k, \ell) = \binom{k + \ell - 1}{\ell} p^n q^k.$$

(Házi feladat ellenőrizni.)

Wright-Fisher model

Egy rögzített nagyságú populáció minden lépésben $2N$ génből áll melyek egy része a a többi pedig A típusú. Ha a szülő populációban $j \in \{0, \ldots, 2N\}$, a típusú gén van, akkor a következő generáció felépítését $2N$ darab független binomiális kísérlet határozza meg a

$$p_j = \frac{j}{2N}, \quad q_j = 1 - \frac{j}{2N}$$

valószínűséggel. Vagyis ha X_n az $n$edik generációban az a-típusú gének száma, akkor a megfelelő Markov-mátrix:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = j) = p(j, k) = \binom{2N}{k} p_j^k q_j^{2N-k}. \quad (3)$$

Wright-Fisher model (cont.)

Ebben a modellben az $x = 0$ és az $x = 2N$ **elnyelő állapotok**. Ez azt jelenti, hogyha a folyamat ezen állapotokba jut, akkor örökre ott is ragad.

Mutációs Wright-Fisher modell

Az új generáció létrehozása előtt mindegyik gén mutálódhat. Egy *a* génből *A* lesz α_1 valószínűséggel még egy fordított irányú mutálódás valószínűsége α_2. Így az átmenet mátrixot továbbra is a (3) formula határozza meg de most már a mutáció miatt módosított valószínűségekkel:

$$p_j = \frac{j}{2N}(1-\alpha_1) + \left(1 - \frac{j}{2N}\right)\alpha_2,$$

és

$$q_j = \frac{j}{2N}\alpha_1 + \left(1 - \frac{j}{2N}\right)(1-\alpha_2).$$

Itt nincsenek elnyelő állapotok.

Két-lépcsős Markov Láncok (two stage Markov chains)

A következő példában
X_{n+1} függ az (X_{n-1}, X_n) értékétől .
Kosárlabda lánc
Képzeljük el, hogy egy kosárlabda játékos a következő valószínűségekkel dobja be a büntetőt:
1/2 ha mind a két korábbi büntetőt amit dobott kihagyta
2/3 ha a két korábbi büntető egyikét kihagyta
3/4 ha mind a két korábbi büntetőt bedobta.
Legyen tehát $X_n = S$ a sikeres büntető esetén és $X_n = K$ a kudarc esetén.

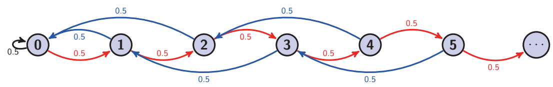
Két-lépcsős Markov Láncok (two stage Markov chains) (cont.)

Ekkor az állapot tér: $\{SS, SK, KS, KK\}$ és az átmenetvalószínűség mátrix:

	SS	**SK**	**KS**	**KK**
SS	3/4	1/4	0	0
SK	0	0	2/3	1/3
KS	2/3	1/3	0	0
KK	0	0	1/2	1/2

Magyarázat: Ha $(X_{n-1}, X_n) = (S, K)$, akkor annak valószínűsége, hogy $(X_n, X_{n+1}) = (K, S)$ egyenlő $2/3$-al.

Kettőt hátra egyet előre lánc



	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\cdots$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\cdots$
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\cdots$
2	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\cdots$
3	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\cdots$
4	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Bolyongások $\mathbb{Z}^d$-n.

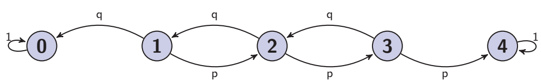
Egyszerű szimmetrikus bolyongás $S = \mathbb{Z}^d$-n:

$$p(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{2d}, & \text{ha } \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \qquad (4)$$

Általános bolyongás $S = \mathbb{Z}^d$-n:
$\mathfrak{p} : \mathbb{Z}^d \to [0,1]$; $\sum\limits_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d} \mathfrak{p}(\mathbf{x}) = 1$, és az átmenetvalószínűség mátrix $\mathbf{P} = (p(x,y))$:

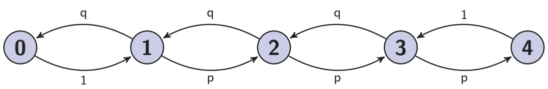
$$p(x,y) := \mathfrak{p}(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Elnyelő peremfeltételek:



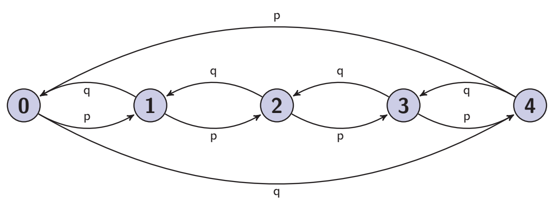
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	1	0	0	0	0
1	q	0	p	0	0
2	0	q	0	p	0
3	0	0	q	0	p
4	0	0	0	0	1

Visszaverő peremek



	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	0	0	0
1	q	0	p	0	0
2	0	q	0	p	0
3	0	0	q	0	p
4	0	0	0	1	0

Periodikus peremfeltételek



	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	p	0	0	q
1	q	0	p	0	0
2	0	q	0	p	0
3	0	0	q	0	p
4	p	0	0	q	0

Többlépéses átmenetvalószínűség mátrixok

Jelöljük $p^m(i,j)$-vel a annak valószínűségét, hogy a $\mathbf{P} = p(i,j)$ átmenetvalószínűség mátrixú Markov lánc az i-ből m lépésben a j állapotba jut.
Célunk az m lépéses átmenet mátrix felírása a $\mathbf{P}$ mátrix segítségével. Nézzünk ezt a szociális mobilitás lánc esetén keresztül:

	1	**2**	**3**
1	0.7	0.2	0.1
2	0.3	0.5	0.2
3	0.2	0.4	0.4

Többlépéses átmenetvalószínűség mátrixok (cont.)

Kérdés: Tegyük fel, hogy valakinek a szülei a közép osztályba tartoztak (2). Mi a valószínűsége, hogy ő maga a felső osztálybeli (3) és a gyerekei az alsó osztályba tartoznak (1)?

$$\mathbb{P}\left(X_2 = 1, X_1 = 3 | X_0 = 2\right) =$$
$$= \underbrace{\mathbb{P}\left(X_2 = 1 | X_1 = 3, X_0 = 2\right)}_{p(3,1)} \cdot \underbrace{\mathbb{P}\left(X_1 = 3 | X_0 = 2\right)}_{p(2,3)} =$$
$$= p(2,3) \cdot p(3,1).$$

Többlépéses átmenetvalószínűség mátrixok (cont.)

A valódi kérdés a kétlépéses átmenet szempontjából: Feltéve, hogy valakinek a szülei középosztálybeliek voltak mi a valószínűsége, hogy az illető gyerekei alsó osztálybeliek lesznek?

$$\mathbb{P}(X_2 = 1 | X_0 = 2) = \sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}\left(X_2 = 1, X_1 = k | X_0 = 2\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{3} p(2,k) p(k,1) = 0.21.$$

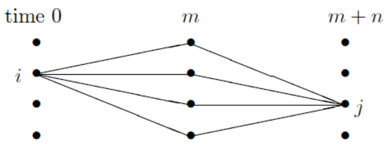
Többlépéses átmenetvalószínűség mátrixok (cont.)

Vegyük észre, hogy ez a $\mathbf{P}^2$ mátrixnak a $(2,1)$-es eleme. Hasonlóan látható, hogy a két-lépéses átmenet mátrix a $\mathbf{P}^2$ mátrix és általában az m-lépéses átmenet mátrix a $\mathbf{P}^m$ mátrix. Ennek igazolása azon múlik, hogy tetszőleges n, m-re $\mathbf{P}^{n+m} = \mathbf{P}^n \cdot \mathbf{P}^m$, aminek (i,j) edik elemére tehát

$$p^{m+n}(i,j) = \sum_k p^m(i,k) \cdot p^n(k,j). \tag{5}$$

Ezt nevezzük Chapman-Kolmogorov egyenlőségnek.

Többlépéses átmenetvalószínűség mátrixok (cont.)



Bizonyítása az ábrából nyilvánvaló: Indukciós feltétel szerint annak valószínűsége, hogy i-ből m lépésben k-ban leszünk $p^m(i,k)$. Indukciós feltétel szerint annak valószínűsége, hogy k-ból n lépésben j-ban leszünk

Többlépéses átmenetvalószínűség mátrixok (cont.)

$p^n(k,j)$. Ez a két esemény a Markov tulajdonság miatt függetlenek. Tehát annak valószínűsége, hogy iből $n+m$ lépésben j-be jutunk úgy hogy n lépés után k-ban voltunk: $p^m(i,k) \cdot p^n(k,j)$. mivel k tetszőleges a Chapman-Kolmogorov egyenlőséget bebizonyítottuk. Később be fogjuk látni, hogy a szociális mobilitási lánc esetén $\mathbf{P}^n$ tart egy olyan mátrixhoz aminek minden sora $(22/47, 16/47, 9/47)$. Ez azt jelenti, hogy bármilyen hátérrel is rendelkeztek a nagyon régi ősök, a

Többlépéses átmenetvalószínűség mátrixok (cont.)

leszármazottak aránya a fenti komponensek szerint oszlik meg.
A gambler's ruin példában, ahol az átmenetvalószínűség mátrix:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	1	0	0	0	0
1	0.6	0	0.4	0	0
2	0	0.6	0	0.4	0
3	0	0	0.6	0	0.4
4	0	0	0	0	1

Többlépéses átmenetvalószínűség mátrixok (cont.)

A határérték $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$ szintén létezik és látni fogjuk, hogy a következő mátrix:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	1	0	0	0	0
1	$\frac{57}{65}$	0	0	0	$\frac{8}{65}$
2	$\frac{45}{65}$	0	0	0	$\frac{20}{65}$
3	$\frac{27}{65}$	0	0	0	$\frac{38}{65}$
4	0	0	0	0	1

Jelölések, fogalmak

$$\mathbb{P}_x(A) := \mathbb{P}(A|X_0 = x).$$

$\mathbb{E}_x$ jelöli a várható értéket a $\mathbb{P}_x$ valószínűségre.
Az első visszatérés ideje y-ba:

$$T_y := \min\{n \geq 1 : X_n = y\}$$

Annak valószínűsége, hogy y-ból indulva valaha is visszatérünk y-ba:

$$\rho_{yy} := \mathbb{P}_y(T_y < \infty)$$

Jelölések, fogalmak (cont.)

Intuitíven: annak valószínűsége, hogy y-ból indulva legalább kétszer vissza térünk y-ba egyenlő ρ_{yy}^2-el, hiszen az, hogy mi történik az első visszatérés után érezzük, hogy független kell attól, hogy mi történt előtte. Ahhoz hogy a fenti érzésünket igazoljuk, bevezetjük a **megállási idő** (vagy **Markov-időpont**) fogalmát.

DEFINÍCIÓ 2 (Megállási idő (stopping time))

Azt mondjuk, hogy T megállási idő, ha a $\{T = n\}$ esemény (megállunk n-ben) bekövetkezését vagy be nem következését el tudjuk dönteni az $X_0, \dots, X_n$ értékeinek ismeretében.

Megállási idő

Nyilvánvalóan T_y egy megállás idő mivel:

$$\{T_y = n\} = \{X_1 \neq y, \dots, X_{n-1} \neq y, X_n = y\}.$$

PÉLDA 3

- $T \equiv k$ konstans időpont megállási idő nyilván.
- Az első időpont amikor az X_n belelép egy előre adott halmazba. $T(A) := \min\{n : X_n \in A\}$.
- Bármely rögzített k-ra, az első időpont amikor a folyamat k-adik alkalommal lép egy előre adott A halmazba. (Ezt be fogjuk látni később.)

Megállási idő (cont.)

Ellenben: Az utolsó időpont amikor a folyamat egy adott halmazba eljut nem megállási idő mert ahhoz, hogy ezt leellenőrizzük a folyamat egész jövőjét kellene ismerni.

LEMMA 4

Két megállási idő

- összege
- maximuma
- minimuma

is megállási idő.

A bizonyítás triviális.

Erős Markov tulajdonság

TÉTEL 5

Legyen X_n egy Markov lánc $\mathbf{P} = (p(i,j))$ átmenetvalószínűség mátrix-al és T egy megállási idő. Feltéve, hogy $T = n$ és $X_T = y$, minden más az $X_0, \dots, X_T$-re vonatkozó információ irreleváns a jövőt illetően (vagyis X_{T+k} értékeinek becslése szempontjából) és $k \geq 0$-ra, X_{T+k} úgy viselkedik mint egy Markov lánc, melyet az y-ból indítottunk.

A $T \equiv k$ esetben kapjuk a Markov tulajdonságot ebből. Miért igaz ez?

Erős Markov tulajdonság (cont.)

Csak annyit bizonyítunk most be, hogy

$$\mathbb{P}(X_{T+1} = z | X_T = y, T = n) = p(y,z). \tag{6}$$

Egy tetszőleges $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)$ sorozatra, ahol x_i az állapot tér valamely eleme, Legyen $X_0^n(\mathbf{x})$ az az esemény, hogy $X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n$. Legyen V_n azon $\mathbf{x}$-ek halmaza, melyekre az $X_0^n(\mathbf{x})$ esemény maga után vonja, hogy:

$$T = n \text{ és } X_T = y.$$

Erős Markov tulajdonság (cont.)

Vagyis V_n azon $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)$ halmaza melyekre

$$X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n \Longrightarrow T = n \text{ és } X_T = y$$

Erős Markov tulajdonság (cont.)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{T+1} = z, X_T = y, T = n) &= \\
&= \sum_{\mathbf{x} \in V_n} \mathbb{P}(X_{n+1} = z, X_0^n(\mathbf{x})) = \\
&= \sum_{\mathbf{x} \in V_n} \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} = z | X_0^n(\mathbf{x}))}_{p(y,z)} \cdot \mathbb{P}(X_0^n(\mathbf{x})) = \\
&= p(y,z) \sum_{\mathbf{x} \in V_n} \mathbb{P}(X_0^n(\mathbf{x})) = \\
&= p(y,z) \cdot \mathbb{P}(T = n, X_T = y).
\end{aligned}$$

Erős Markov tulajdonság (cont.)

Ha elosztjuk mind két oldalt $\mathbb{P}(T = n, X_T = y)$-al kapjuk, hogy (6) teljesül.

Rekurrens, tranziens állapotok

Legyen $T_y^1 := T_y$ és

$$T_y^k := \min\left\{n > T_y^{k-1} : X_n = y\right\}$$

az y-ba való k-adik visszatérés ideje. Az erős Markov tulajdonság miatt

$$\mathbb{P}_y\left(T_y^k < \infty\right) = \rho_{yy}^k$$

Rekurrens, tranziens állapotok (cont.)

- If $\rho_{yy} < 1$, akkor annak valószínűsége, hogy k-szor visszatér a folyamat y-ba $\rho_{yy}^k \to 0$. Ezért a folyamat egyszer csak nem talál vissza y-ba. Ebben az esetben az y állapotot transiensnek nevezzük.
- If $\rho_{yy} = 1$. Ekkor minden k-ra: $\rho_{yy}^k = 1$. Ezért a folyamat végtelen sokszor visszatér y-ba. Az y állapotot ekkor rekurrensnek nevezzük.

Nézzük ezt a

Rekurrens, tranziens állapotok (cont.)

- **Gambler's ruin példán**: Ekkor a 0 és a 4 állapotok elnyelőek, tehát rekurensek. Az 1,2,3 állapotokból pozitív valószínűséggel mehetünk az elnyelő állapotokba, ahonnan nincs visszatérés. Tehát az $y = 1, 2, 3$ esetén $\rho_{yy} < 1$ vagyis ezen állapotok tranziensek.
- **Szociális mobilitási példa esetén:** Bármely állapotból bármelyikbe léphetünk legalább 0.1 valószínűséggel. Tehát minden $y = 1, 2, 3$-ra az y-ból indulva y-ba véges időn belül visszatérünk. Vagyis $\rho_{yy} = 1$. Tehát minden állapot rekurens.

Rekurrens, tranziens állapotok (cont.)

A fenti példában nyilvánvaló, hogy $y = 3$-ból indulva annak valószínűsége, hogy 3-ba legelőször n-nél több lépésben érünk vissza:

$$\mathbb{P}_3\left(T_3 > n\right) \leq 0.9^n.$$

Általánosan:

LEMMA 6

Ha $\mathbb{P}_x\left(T_y \leq k\right) \geq \alpha > 0$ minden $x \in S$ esetén, akkor

$$\mathbb{P}_x\left(T_y > nk\right) \leq (1 - \alpha)^n.$$

Rekurrens, tranziens állapotok (cont.)

DEFINÍCIÓ 7

Azt mondjuk, hogy az x **kommunikál az y-al** (jelben $x \rightsquigarrow y$) ha x-ből indulva pozitív annak a valószínűsége, hogy valamikor (nem feltétlen egy lépésben) eljutunk y-ba. Vagyis

$$x \rightsquigarrow y \text{ ha } \rho_{xy} := \mathbb{P}_x\left(T_y < \infty\right) > 0.$$

A Markov tulajdonságból adódik, hogy

$$\text{Ha } x \rightsquigarrow y \text{ és } y \rightsquigarrow z \text{ akkor } x \rightsquigarrow z. \qquad (7)$$

Rekurrens, tranziens állapotok (cont.)

LEMMA 8

Ha $\rho_{xy} > 0$ és $\rho_{yx} < 1$, akkor x egy tranziens állapot.

Ez nyilvánvaló, hiszen pozitív valószínűséggel teljesül, hogy x-ből indulva véges sok lépésben y-ba jutok, ahonnan viszont pozitív valószínűséggel nem jutok vissza x-be. A Markov tulajdonság miatt így x-ből indulva, pozitív valószínűséggel nem jutok vissza x-be, vagyis x egy tranziens állapot.

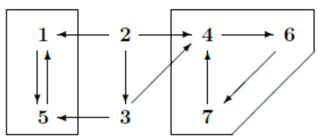
Zárt és irreducibilis osztályok

Tekintsük a következő 7 allapotú láncot:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0.7	0	0	0	0.3	0	0
2	0.1	0.2	0.3	0.4	0	0	0
3	0	0	0.5	0.3	0.2	0	0
4	0	0	0	0.5	0	0.5	0
5	0.6	0	0	0	0.4	0	0
6	0	0	0	0	0	0.2	0.8
7	0	0	0	1	0	0	0

Zárt és irreducibilis osztályok (cont.)

Az állapot tér $S = \{1, \dots, 7\}$ elemeiből mint csúcsokból gráfot készítünk olymódon, hogy az (i, j) irányított élet behúzzuk, ha $p(i, j) > 0$.



Zárt és irreducibilis osztályok (cont.)

Egy $A \subset S$ halmaz **zárt** ha nem lehet belőle kijutni. Vagyis

$$i \in A \text{ és } j \notin A \text{ akkor } p(i, j) = 0.$$

A fenti példán: $\{1, 5\}$ és $\{4, 6, 7\}$ halmazok zártak, ezek úniója is zárt, sőt $\{1, 5, 4, 6, 7, 3\}$ és maga S is zárt.
Egy $B \subset S$ halmaz **irreducibilis** ha bármely két eleme kommunikál egymással:

$$\forall i, j \in B, \quad i \rightsquigarrow j.$$

Vagyis a fenti gráfban a B bármely eleméből bármelyikbe eljuthatunk irányított élek mentén. A fenti példában az

Zárt és irreducibilis osztályok (cont.)

irreducibilis és zárt halmazok: $\{1, 5\}$ és $\{4, 6, 7\}$. A következő tétel mutatja ezen fogalmak fontosságát:

TÉTEL 9

Ha $C \subset S$ véges, zárt és irreducibilis, akkor $\forall x \in C$ rekurrens.

Ennek következtében a fenti 7 állapotú Markov lánc $1, 5, 4, 6, 7$ állapotai rekurrensek. A 9. tétel bizonyítását későbbre halasztjuk. Először, ezen tétel felhasználásával belátjuk, hogy

Zárt és irreducibilis osztályok (cont.)

TÉTEL 10

Tegyük fel, hogy az S állapot tér véges. Ekkor léteznek diszjunkt $T, R_1, \dots, R_k \subset S$ halmazok, hogy

(a) $S = T \cup R_1 \cup \dots \cup R_k$,
(b) T a tranziens állapotok halmaza,
(c) $\forall i = 1, \dots, k$-ra R_i zárt és irreducibilis halmaz. (Az R_i elemei tehát rekurrensek.)

Bizonyítás. Legyen

$$T := \{x \in S : \exists y \in S, \ x \rightsquigarrow y \text{ és } y \not\rightsquigarrow x\}$$

Zárt és irreducibilis osztályok (cont.)

Ekkor nyilvánvalóan $\forall x \in T$ tranziens (8. Lemma). Belátjuk, hogy $S \setminus T$ miden eleme rekurrens. Választunk egy $x \in S \setminus T$ elemet és jelöljük:

$$C_x := \{y : x \rightsquigarrow y\}.$$

Ekkor $\forall y \in C_x$-re $y \rightsquigarrow x$. Ekkor

- C_x zárt: Ez következik (7)-ből.
- C_x irreducibilis: Legyen $y, z \in C_x$. Ekkor mint fent láttuk $y \rightsquigarrow x$ és definíció miatt $x \rightsquigarrow z$, tehát megint csak (7) miatt $y \rightsquigarrow z$.

Zárt és irreducibilis osztályok (cont.)

Mivel C_x zárt és irreducibilis, minden C_x-beli állapot rekurrens. Legyen $R_1 := C_x$ Ha $S \setminus (C_x \cup T) \neq \emptyset$, akkor ezt az eljárást folytatva kapunk véges sok (S véges) diszjunkt $R_2, \dots, R_k$ rekurrens halmazokat. ■

A 9. tétel bizonyítása

Emlékeztető:

$T_y^k = \min\left\{n > T_y^{k-1} : X_n = y\right\}$ és $\rho_{xy} = \mathbb{P}_x\left(T_y < \infty\right)$.

Az erős Markov tulajdonságból adódóan:

$$\mathbb{P}_x\left(T_y^k < \infty\right) = \rho_{xy} \cdot \rho_{yy}^{k-1} \tag{8}$$

Legyen

$$N(y) := \#\left\{n \geq 1 : X_n = y\right\}.$$

Ekkor nyilván

$$\left\{N(y) \geq k\right\} = \left\{T_y^k < \infty\right\}. \tag{9}$$

A 9. tétel bizonyítása (cont.)

Ezt használva, ha $\rho_{yy} < 1$, akkor

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x N(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x\left(N(y) \geq k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x\left\{T_y^k < \infty\right\} \\ &= \rho_{xy} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{yy}^{k-1} = \frac{\rho_{xy}}{1-\rho_{yy}}\end{aligned}$$

Vagyis, beláttuk, hogy

$$\text{ha } \rho_{yy} < 1, \text{ akkor } \mathbb{E}_x N(y) = \frac{\rho_{xy}}{1-\rho_{yy}}. \tag{10}$$

Innen következik, hogy $\mathbb{E}_y N(y) < \infty$ akkor és csak akkor ha $\rho_{yy} < 1$. Másrészt:

A 9. tétel bizonyítása (cont.)

LEMMA 11

$$\mathbb{E}_x N(y) = \sum_{n=1}^{\infty} p^n(x,y),$$

ahol $p^n(x,y)$ a $\mathbf{P}$ átmenetvalószínűség mátrix n-edik hatványának az (x,y) indexű eleme.

A 9. tétel bizonyítása (cont.)

Proof.

$N(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{X_n = y}$. Várható értéket véve:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x N(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}_x\left(X_n = y\right)}_{p^n(x,y)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} p^n(x,y).\end{aligned}$$

□

Lemma 11 és (10) következménye:

A 9. tétel bizonyítása (cont.)

TÉTEL 12

Egy $y \in S$ rekurrens akkor és csak akkor, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^n(y,y) = \mathbb{E}_y(N(y)) = \infty.$$

Ennek alkalmazásaként belátjuk:

LEMMA 13

Ha x rekurrens és $x \rightsquigarrow y$, akkor y is rekurrens.

A 9. tétel bizonyítása (cont.)

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy x rekurrens és $x \rightsquigarrow y$ vagyis $\rho_{xy} > 0$. Tudjuk (Lemma 8), hogy ekkor $\rho_{yx} = 1$. Vagyis létezik, j, ℓ, hogy

$$p^j(y,x) > 0 \text{ és } p^\ell(x,y) > 0.$$

Ekkor minden k-ra
$p^{j+k+\ell}(y,y) \geq p^j(y,x) \cdot p^k(x,x) \cdot p^\ell(x,y)$. Tehát

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^{j+k+\ell}(y,y) \geq p^j(y,x) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} p^k(x,x)\right) \cdot p^\ell(x,y).$$

A 9. tétel bizonyítása (cont.)

Ha x rekurrens, akkor a jobb oldal divergens, tehát a baloldal is. Vagyis $\sum_{m=0}^{\infty} p^m(y,y) = \infty$ vagyis y is rekurrens. ■

Még egy lemmára van szükségünk:

LEMMA 14

Ha $A \subset S$ véges és zárt, akkor A-ban van legalább egy rekurrens állapot.

A 9. tétel bizonyítása (cont.)

Bizonyítás. Ha minden A-beli állapot tranziens, akkor (10) formulából adódóan $\forall x, y \in A$-ra $\mathbb{E}_x N(y) < \infty$. Használva, a 11. Lemmát és hogy A véges kapjuk:

$$\begin{aligned}\infty &> \sum_{y \in A} \mathbb{E}_x N(y) = \sum_{y \in A} \sum_{n=1}^{\infty} p^n(x,y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{y \in A} p^n(x,y)}_{1} \overset{A \text{ zárt}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 1 \\ &= \infty.\end{aligned}$$

Ez az ellentmondás igazolja a lemmát. ■

A 9. tétel bizonyítása (cont.)

A 9 tétel bizonyítása a 13. és a 14. Lemmákból azonnal adódik.

Állapotok periódusa

DEFINÍCIÓ 15

Egy x állapot **periódusa** a $I_x := \{n \geq 1 : p^n(x,x) > 0\}$ halmaz elemeinek legnagyobb közös osztója.

LEMMA 16

Ha $i, j \in I_x$, akkor $i + j \in I_x$. Vagyis I_x zárt az összeadásra.

Ez a Markov tulajdonságból teljesen nyilvánvaló.

Állapotok periódusa (cont.)

LEMMA 17

Ha az x állapot periódusa 1, akkor $\exists n_0$, hogy $\forall n \geq n_0$-ra, $n \in I_x$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az x periódusa 1. Az előbbi lemma miatt elég belátni, hogy I_x tartalmaz két egymás utáni számot. Ehhez felhasználjuk azt a számelméleti tételt, hogy ha az I_x elemeinek legnagyobb közös osztója 1, akkor található olyan $i_1, \dots, i_m \in I_x$, és $c_1, \dots, c_m \in \mathbf{Z}$, hogy

$$\sum_{k=1}^{m} c_k i_k = 1. \qquad (11)$$

Állapotok periódusa (cont.)

Legyen

$$a_k := \begin{cases} c_k, & \text{ha } c_k > 0; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \quad \text{és } b_k := \begin{cases} -c_k, & \text{ha } c_k < 0; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

legyen $L = \sum_{k=1}^{m} a_k i_k$ és $R := \sum_{k=1}^{m} b_k i_k$ Ekkor (11) egyenlőséget használva: $L = R + 1$ vagyis egymás utáni számok és a 16. Lemma miatt $L, R \in I_x$ hiszen az a_k, b_k számok pozitív egészek. ■

Állapotok periódusa (cont.)

DEFINÍCIÓ 18

Azt mondjuk, hogy egy Markov lánc **aperiodikus**, ha minden állapot periódusa egyenlő 1-el.

LEMMA 19

Ha $p(x,x) > 0$, akkor az x periódusa 1.

Ez nyilvánvaló, hiszen ha $p(x,x) > 0$, akkor $1 \in I_x$. Ebből azonnal adódik, hogy az időjárási lánc, a szociális mobilitási lánc aperiodikus. Azon láncok vizsgálatára,

Állapotok periódusa (cont.)

amelyek esetén a diagonálisban vannak nullák használhatjuk:

LEMMA 20

Ha $\rho_{xy} > 0$ és $\rho_{yx} > 0$ (vagyis $x \rightsquigarrow y$ és $y \rightsquigarrow x$), akkor x-nek és y-nak a periódusa azonos.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy valamely x, y állapotokra létezik k, m, hogy

$$p^k(x,y) > 0 \text{ és } p^m(y,x) > 0,$$

Állapotok periódusa (cont.)

de

$$c := \text{periódus}(x) > \text{periódus}(y) =: d.$$

Tudjuk, hogy $p^{k+m}(x,x) \geq p^k(x,y) \cdot p^m(y,x) > 0$, ezért $k + m \in I_x$. Mivel $c = \text{periódus}(x)$, c osztója kell legyen $k + m$-nek. Hasonlóan, ha ℓ olyan hogy $p^\ell(y,y) > 0$, akkor $p^{k+\ell+m}(x,x) > 0$, tehát $k + \ell + m$-nek is osztója c, vagyis ℓ-nek is osztója c. Mivel $\ell \in I_y$ tetszőleges, ezért c osztója az I_y minden elemének vagyis $c \leq d$. Ez ellentmond a feltételnek. ■

A lemmából adódik, hogyha egy lánc irreducibilis, akkor minden állapotnak ugyanaz a periódusa.

Állapotok periódusa (cont.)

- A készletezési lánc (14. slide) példára ez jól alkalmazható. Nevezetesen, a $x \in \{2,3,4,5\}$ esetben $p(x,x) > 0$, tehát ezen állapotok aperiodikusak. A lánc irreducibilis (hiszen P^2 minden eleme pozitív), tehát a 20. Lemma miatt a 0 és 1 állapotok periódusa is 1 lesz.
- Kosárlabda lánc (26. slide) példában SS és KK állapotok periódusa 1. A lánc irreducibilis ezért minden állapot periódusa 1 vagyis a lánc aperiodikus.

Állapotok periódusa (cont.)

Továbbiakban három példát nézzünk az állapotok periódusával kapcsolatban:

Ehrenfest lánc (8. slide) $N = 3$ golyóval:

PÉLDA 21

P	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	1	0	0
1	1/3	0	2/3	0
2	0	2/3	0	1/3
3	0	0	1	0

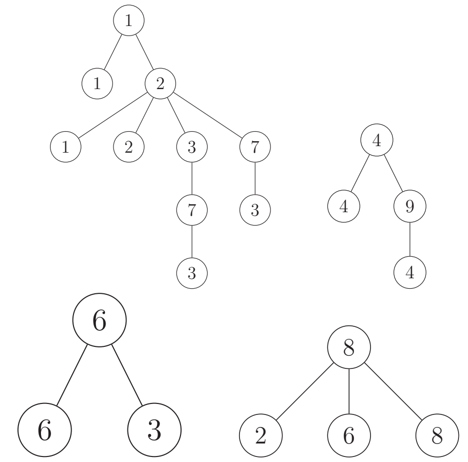
$\mathbf{P}^2$	**0**	**1**	**2**	**3**
0	1/3	0	2/3	0
1	0	7/9	0	2/9
2	2/9	0	7/9	0
3	0	2/3	0	1/3

A konstrukcióról adódik, hogy minden páratlan n-re $p^n(x,x) = 0$ (paritás minden lépésben változik). Másrészt $p^n(x,x) > 0$ ha n páros így minden elem periódusa kettő.

Tekintsük a következő 9×9-es $0 - 1$ mátrixot:

$A :=$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0
6	0	0	1	0	0	1	0	0	0
7	0	0	1	0	0	0	0	0	0
8	0	1	0	0	0	1	0	1	0
9	0	0	0	1	0	0	0	0	1



Az előző slide diagramjainak elemzése

- $\{1,2\}$ **tranziens** és $\{3,7\}$ rekurens irreducibilis osztály,
- $\{4,9\}$ rekurens irreducibilis osztály,
- $\{5\}$ rekurens irreducibilis osztály,
- 3 megjelenik az 1. ábrán tehát $\{6\}$ **tranziens**,
- megjelenik: 2 az első ábrán, 6 a harmadik ábrán tehát $\{8\}$ **tranziens**.

Permutáljuk a koordinátákat úgy hogy:

(a) A rekurrens osztályoknak megfelelő koordinátákat előre hozzuk,

(b) kisebb pzición lévő tranziens osztályból nem ugorhatunk nagyobb sorszámúra.

Az A mátrixból a koordináták fent leírt permutálásával kapjuk:

$\tilde{A} :=$

	5	**4**	**9**	**3**	**7**	**1**	**2**	**6**	**8**
5	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	1	0	0	0	0	0	0
9	0	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
2	0	0	0	1	1	1	1	0	0
6	0	0	0	1	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	1	1	1

A matrixok kanonikus alakja

Ha A egy nem negatív elemű mátrix, akkor a fenti módszerrel, vagyis a koordináták megfelelő permutációjával ugy nevezett kanonikus alakra hozhatjuk:

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|c} A_1 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_z & & 0 \\ \hline & & R & & & Q \end{array}\right), \quad Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & Q_2 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & 0 \\ * & * & * & Q_w \end{pmatrix} \tag{12}$$

ahol: $A_1, \cdots, A_z, Q_1, \cdots Q_w$ négyzetes mátrixok és a $*$ helyén bármilyen mátrix lehet.

Ekkor persze

$$A^k = \left(\begin{array}{cccc|c} A_1^k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_2^k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_z^k & 0 \\ \hline & & R_k & & Q^k \end{array}\right), \quad Q^k = \begin{pmatrix} Q_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ * & Q_2^k & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & 0 \\ * & * & * & Q_w^k \end{pmatrix} \tag{13}$$

Innen kapjuk, hogy

Lemma 2.1

*Egy mártix **nem irreducibilis** (vagyis reducibilis) pontosan akkor, ha a koordináták permutációjával a következő alakra hozható:*

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & C \end{array} \right), \tag{14}$$

ahol A és C négyzetes mátrixok.

Emlékezzünk: Egy $n \times n$-es nem-negatív A mátrix irreducibilis, ha minden $1 \leq i, j \leq n$-re létezik olyan $m = m(i,j)$, hogy $A^m_{i,j} > 0$. Ahhoz, hogy megértsük az irreducibilis mátrixok struktúráját szükség van néhány a lineáris algebra körébe tartozó könnyű állításra. Ezek bizonyítására ezen tárgyban időnk nincs. Az érdeklődő hallgató a bizonyításokat megtalálja a Senata könyvben (standard referencia könyv a nem-negatív mátrixok elméletében, itt ezt a könyvet követjük). [9, Section 1.3]

Adott tehát egy $n \times n$-es nem negatív A mátrix. Az A^k elemeit $a^{(k)}_{i,j}$-val jelölöm. Ennek periódusát d-vel jelölöm.

Lemma 2.2

Legyen A egy $n \times n$-es nem negatív irreducibilis mátrix Minden $i \leq n$-re létezik egy $N_0 = N_0(i)$, hogy minden $k \geq N_0$-ra:

$$a^{(kd)}_{ii} > 0.$$

TÉTEL 22

Rögzítsünk egy $i \in \{1, \dots, n\}$ indexet. Ekkor minden $j \in \{1, \dots, n\}$-re létezik egyetlen $r_j \in \{1, \dots, d\}$, hogy

(a) Ha $a^{(s)}_{ij} > 0$, akkor $s \equiv r_j \pmod d$,

(b) $a^{(kd+r_j)}_{ij} > 0$ minden $k \geq N(j)$, ahol $N(j)$ valamely pozitív egész.

Egy $0 \leq r < d$ definiáljuk

$$C_r := \{ j \in \{1, \dots, n\} \,|\, r_j = r \} \tag{15}$$

Nyilvánvalóan:

$$\{C_0, \dots, C_{d-1}\} \tag{16}$$

az $\{1, \dots, n\}$ halmaz egy partícióját adja.

TÉTEL 23

Az (16)-ben szereplő partíció nem függ az $i \in \{1, \dots, n\}$ választásától.

KÖVETKEZMÉNY 24

Tegyük fel, hogy a nem-negatív irreducibilis A mátrix periódusa $d > 1$. A koordináták permutálásával az A mátrix következő alakra hozható:

$$\hat{A} := \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Q_{0,1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Q_{1,2}} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Q_{d-3,2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Q_{d-2,d-1}} \\ \mathbf{Q_{d-1,0}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

A fenti piros színű mátrixok általában nem négyzetes mátrixok.

Legyen

$$B_i := Q_{i,i+1} \cdots Q_{i+d-1,i+d},$$

ahol az indexben az összeadás $\bmod d$ értendő. Ekkor

$$\hat{A}^d = \begin{pmatrix} B_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{d-1} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

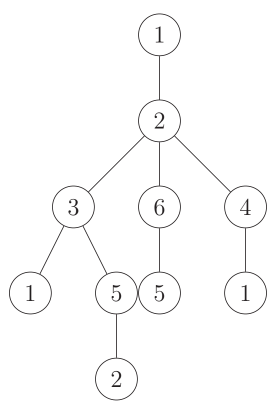
ahol a 23. Tételből adódóan: $B_0, \dots, B_{d-1}$ négyzetes primitív mátrixok. (Nem-negatív mátrixot primitívnek hívunk, ha valamelyik hatványa csupa pozitív elemekből áll.)

PÉLDA 25

Találjuk meg a fenti felbontást a következő mátrixra:

$A :=$ (19)

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	0	0
2	0	0	1	1	0	1
3	1	0	0	0	1	0
4	1	0	0	0	0	0
5	0	1	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0



Emlékezzünk: C_k azokból áll akiket $\bmod k$ lépésben érünk el egy adott pontból ami jelen esetben az 1 lesz.

$1 \in C_0$, $2 \in C_1$, $\{3,4,6\} \subset C_2$, $\{1,5\} \subset C_3$ and $2 \in C_4$. Tehát $C_0 = C_3$ és $C_1 = C_4$. Vagyis:

$C_0 = \{1,5\}$, $C_1 = \{2\}$, $C_2 = \{3,4,6\}$. Tehát a kanonikus alak:

$$\hat{A} = \begin{array}{c|cc|c|ccc} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \hline \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{5} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{6} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Felújítási lánc

PÉLDA 26

Legyen $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ egy tetszőleges eloszlás a pozitív egészeken. Azt a láncot tekintjük, amelyben az állapot tér $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ és

$$P = \begin{bmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

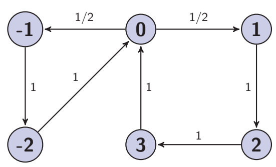
Felújítási lánc (cont.)

Vagyis, minden $i > 0$-ból biztosan $i - 1$-re ugrunk, amíg a 0-ba vissza nem jutunk. A nullából f_k valószínűséggel ugrunk minden $k \geq 1$-re. Abban a speciális esetben amikor:

$$f_k = \begin{cases} 0.5, & \text{ha } k = 5 \text{ vagy } k = 15; \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

az $x = 0$ periódusa 5 lesz.

PÉLDA 27



P	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
-2	0	0	1	0	0	0
-1	1	0	0	0	0	0
0	0	0.5	0	0.5	0	0
1	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0	0

Nyilvánvaló, hogy $3, 4 \in I_0$. Ezért (Lemma 16) $I_0 = \{3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$. Tehát 1 a 0-periódusa.

Stacionárius állapot definíciója

Képzeljük el, hogy az állapot tér minden elemében van egy elég nagy edény. Egy liter vizet szétosztunk ezek között úgy hogy az i-edik edénybe $q(i)$ litter víz kerül. Mikor teszünk egy lépést a Markov lánccal, az i-edik edény tartalmának $p(i, j)$-ed része átkerül a j-edik edénybe. Tehát ezen lépés után a j-edik edényben összesen $\sum_i q(i)p(i, j)$ liter víz lesz. Ez éppen a j-edik komponense a $\mathbf{q} \cdot \mathbf{P}$ vektornak, ahol $\mathbf{q}$ az a vektor aminek i-edik komponense $q(i)$. Vagyis ha ezen lépés után minden edényben ugyanannyi víz ($q(i)$ litter) marad mint amennyi eredetileg is volt, akkor akárhány

Stacionárius állapot definíciója (cont.)

lépést is teszünk a Markov lánccal mindig az eredeti $q(i)$ mennyiségű víz marad az egyes edényekben. Ezt a $\mathbf{q} = (q(i))_i$ vektort nevezzük stacionáris eloszlásnak (stationary=mozdulatlan). Mivel a stacionárius eloszlásnak nagyon fontos szerepe van ezért egy speciális nevet kap π-nek fogjuk hívni. A π tehát az a valószínűségi vektor amelyre,

$$\pi^T \cdot \mathbf{P} = \pi^T. \tag{20}$$

Jelölés: Nekem minden vektor oszlop vektor. Ha sor vektort akarok kiteszem a T-t a felső indexbe.

Stacionárius állapot: Példa A

Az időjárás lánc esetén $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$ Keressük azt a $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2)$ valószínűségi vektort, amelyre

$$(\pi_1, \pi_2) \cdot \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = (\pi_1, \pi_2).$$

Az eredmény: $\boldsymbol{\pi} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Stacionárius állapot: Példa B

LEMMA 28

Egy két állapotú Markov lánc átmenetvalószínűség mátrixa felírható a következő alakban:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

Ekkor a stacionáris eloszlás: $\boldsymbol{\pi} = \left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}\right)$.

Szociális mobilitási lánc esetén

A szociális mobilitási lánc esetén $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$

a $\boldsymbol{\pi}^T \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}^T$ egyenlet:

$$\begin{aligned} 0.7\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.2\pi_3 &= \pi_1 \\ 0.2\pi_1 + 0.5\pi_2 + 0.4\pi_3 &= \pi_2 \\ 0.1\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.4\pi_3 &= \pi_3 \end{aligned}$$

A harmadik egyenlet semmi információt nem ad az első kettő után ezért az elhagyható. Helyette beírjuk, hogy a $\boldsymbol{\pi}$ komponenseinek összege 1-el egyenlő:

Szociális mobilitási lánc esetén (cont.)

$$\begin{aligned} 0.7\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.2\pi_3 &= \pi_1 \\ 0.2\pi_1 + 0.5\pi_2 + 0.4\pi_3 &= \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned} \tag{21}$$

Innen:

$$\begin{aligned} -0.3\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.2\pi_3 &= 0 \\ 0.2\pi_1 + -0.5\pi_2 + 0.4\pi_3 &= 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\boldsymbol{\pi}^T \cdot \mathbf{A} = (0, 0, 1),$$

Szociális mobilitási lánc esetén (cont.)

ahol

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 & 1 \\ 0.3 & -0.5 & 1 \\ 0.2 & 0.4 & 1 \end{bmatrix}$$

Vagyis

$$\boldsymbol{\pi}^T = (0, 0, 1) \cdot A^{-1} \tag{23}$$

A $\boldsymbol{\pi}$ vektor meghatározásának menete: Kiindulunk a $\mathbf{P}$ átmenetvalószínűség mátrixból. $\mathbf{P}$ főátlójának minden eleméből egyet levonok, majd az utolsó oszlopot csupa 1-re cserélem. Így kapom az A mátrixot. Ekkor (23)

Szociális mobilitási lánc esetén (cont.)

formulából: Az A^{-1} mátrix utolsó sora éppen $\boldsymbol{\pi}$. Ez jelen esetben:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{90}{47} & \frac{20}{47} & \frac{70}{47} \\ -\frac{10}{47} & -\frac{50}{47} & \frac{60}{47} \\ \frac{22}{47} & \frac{16}{47} & \frac{9}{47} \end{pmatrix}.$$

Innen $\boldsymbol{\pi}^T = \left(\frac{22}{47}, \frac{16}{47}, \frac{9}{47}\right)$.

Kosárlabda lánc (26. slide) Példa C

Követve a fent leírt módszert, a $\boldsymbol{\pi}$ stacionárius eloszlás meghatározása céljából a $\mathbf{P}$ mátrix főátlójának minden eleméből egyet levonunk, majd az utolsó oszlopot egyesekkel helyettesítjük. Kapjuk

$$A = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2/3 & 1 \\ 2/3 & 1/3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Kosárlabda lánc (26. slide) Példa C (cont.)

Ekkor $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{6} & -\frac{5}{16} & \frac{11}{16} & \frac{43}{24} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{17}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{31}{24} \\ -1 & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$. Ennek utolsó sora $\boldsymbol{\pi}$. Vagyis

$$\boldsymbol{\pi} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8}\right).$$

Kosárlabda lánc (26. slide) Példa C (cont.)

Emlékeztetek, hogy a komponensek sorrendje: (SS,SK,KS,KK). (S: siker, K: kudarc.) Tehát hosszú távon a sikeres kosár dobások aránya:

$$\pi_{SS} + \pi_{KS} = \pi_1 + \pi_3 = \frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}.$$

Stacionárius állapot: Példa D

PÉLDA 29

Tekintsük Ehrenfest láncot, vagyis azt a Markov láncot, melynek állapot tere $S := \{0, 1, 2, \dots, n\}$ és

1. Egy valószínűséggel ugrik a 0-ból 1-be és n-ből $n-1$-be.
2. Bármely $0 < i < n$-re, i-ből i/n valószínűséggel ugrik $i-1$-be és $1 - \frac{i}{n}$ valószínűséggel ugrik $i+1$-be.

Stacionárius állapot: Példa D (cont.)

Határozzuk meg a stacionárius állapotot erre a láncra. Először is felírjuk az átmenet valószínűség mátrixot:

$$\mathbf{P} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{n} & 0 & \frac{n-1}{n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2}{n} & 0 & \frac{n-2}{n} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n-1}{n} & 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stacionárius állapot: Példa D (cont.)

Mivel $\boldsymbol{\pi}^T \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}^T$, ezért bevezetve a $\pi_{-1} := \pi_{n+1} := 0$ jelöléseket:

$$\pi_{k-1}\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \pi_{k+1}\frac{k+1}{n} = \pi_k, \; k = 0, 1, \dots, n.$$

Vezessük be a $g(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \pi_k$ generátor függvényt, majd beszorzunk, n-el és x^k majd összegezzük k-ra:

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)x^k\pi_{k-1} + \sum_{k=0}^{n-1}\pi_{k+1}(k+1)x^k = n\underbrace{\sum_{k=0}^{n} x^k\pi_k}_{g(x)}.$$

Stacionárius állapot: Példa D (cont.)

Innen triviális átalakítások után adódik, hogy

$$(1+x)g'(x) = ng(x).$$

Vagyis

$$g(x) = C(1+x)^n.$$

Mivel $g(1) = 1$, ezért $C = 2^{-n}$. Tehát a binomiális tételből: $\pi_k = 2^{-n}\binom{n}{k}$.

$\boldsymbol{\pi}$ a kettőt hátra egyet előre láncra:

A 28. slideon vezettük be. A $\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$ egyenletből:
$\pi_0 = \frac{1}{2}(\pi_0 + \pi_1 + \pi_2)$ és
$\forall k \geq 1$-re $: \pi_k = \frac{1}{2}(\pi_{k-1} + \pi_{k+2})$. Ezen két egyenletből teljes indukcióval azonnal adódik, hogy

$$\forall k \geq 0\text{-ra} \; : \pi_k = \pi_{k+1} + \pi_{k+2}. \qquad (24)$$

Ennek nyilvánvalóan eleget tesz a $\pi_k = (1-\rho)\rho^k$, $k \geq 0$, ahol ρ az aranymetszés aránya: $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Házi feladat: más stacionárius eloszlás nincs. Tehát a folyamat az idő több mint 99%-át a $\{0, 1, \dots, 9\}$ halmazban tölti.

Irreducibiltás $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\pi}$ egyértelmű

TÉTEL 30

- Ha az állapot tér véges és
- $\mathbf{P}$ irreducibilis, akkor
  - (a) $\boldsymbol{\pi}$ létezik,
  - (b) $\boldsymbol{\pi}$ egyértelmű és
  - (c) $\boldsymbol{\pi}$ minden komponense pozitív.
  - (d) $\pi(y) = \dfrac{1}{\mathbb{E}_y[T_y]}$ teljesül $\forall y \in S$-re.

Irreducibiltás $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\pi}$ egyértelmű (cont.)

Bizonyítás. Legyen $k := \#S$, vagyis $\mathbf{P}$ egy $k \times k$-as sztochasztikus mátrix. Legyen I a $k \times k$ -as egység mátrix. Mivel a $P - I$ mátrixban minden sor vektor komponenseinek összege nulla. Ugyanez képletben:

$$(\mathbf{P} - I) \cdot \mathbb{1} = \mathbf{0},$$

ahol $\mathbb{1}$ az a k komponensű vektor , melynek minden komponense egyenlő 1-el. Ezért $\det(\mathbf{P} - I) = 0$. Vagyis 1 sajátértéke $\mathbf{P}$-nek. (Amit eddig mondtunk az minden sztochasztikus mátrixra igaz.) Tehát van olyan $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^k$

Irreducibiltás $\Rightarrow \pi$ egyértelmű (cont.)

vektor, ami a $\mathbf{P}$ mátrixnak az 1 sajátértékhez tartozó baloldali saját vektora:

$$\boldsymbol{\nu}^T \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\nu}^T.$$

Vezessük be a **lusta láncot**: Ennek valószínűség átmenet mátrixa

$$\mathbf{Q} := (I + \mathbf{P})/2.$$

A lusta lánc szerint mozgó személy, amely most éppen az $i \in S$ állapotban van, feldob egy szabályos érmét. Ha ennek eredménye fej akkor a személy egy helyben marad

Irreducibiltás $\Rightarrow \pi$ egyértelmű (cont.)

ha írás akkor ugrik még pedig a j állapotba $p(i,j)$ valószínűséggel. Tehát 1/2 valószínűséggel helyben marad 1/2 valószínűséggel úgy viselkedik, ahogy a $\mathbf{P}$ mátrix diktálja. Legyen $\mathbf{R} := Q^{k-1}$. Nyilván:

$$\boldsymbol{\nu}^T\mathbf{Q} = \boldsymbol{\nu}^T \text{ és } \boldsymbol{\nu}^T\mathbf{R} = \boldsymbol{\nu}^T$$

Az $\mathbf{Q}$-hoz tartozó gráf abban különbözik a $\mathbf{P}$-hez tartozó gráftól, hogy minden a $\mathbf{P}$-hez tartozó gráfban menő él megmarad, csak fele akkora súllyal és minden csúcshoz hozzáadunk egy további hurok élet 1/2 súllyal. Tudjuk, hogy $\mathbf{P}$ irreducibilis. Ez azt jelenti, hogy bármely

Irreducibiltás $\Rightarrow \pi$ egyértelmű (cont.)

$x, y \in S$ esetén $x \rightsquigarrow y$. Mivel a legrövidebb út amelyen eljutunk x-ből y-ba a Markov lánchoz tartozó gráfban, nem megy át x-en keresztül ezért x-ből y-ba mindig eljuthatunk egy legfeljebb $k-1$ hosszú úton. Ha ez az út rövidebb mint $k-1$, akkor egy helyben maradunk annyi ideig, hogy $k-1$ lépés kijöjjön. Ezért $r(x,y) > 0$ minden x, y-ra (ugyanez nem igaz $\mathbf{P}$-re).

Most belátjuk, hogy ν minden komponense azonos előjelű:

Irreducibiltás $\Rightarrow \pi$ egyértelmű (cont.)

Ha ez nem így lenne, akkor felhasználva, hogy $\forall x, y$-ra $r(x,y) > 0$, kapjuk, hogy $\forall y$-ra:

$$|\nu_y| = \left|\sum_x \nu_x r(x,y)\right| < \sum_x |\nu_x| r(x,y).$$

Innen használva, hogy $\mathbf{R}$ egy sztochasztikus mátrix:

$$\sum_y |\nu_y| < \sum_x |\nu_x|.$$

ami ellentmondás. Ezzel a Tétel (a) részét beláttuk hiszen (π egyenlő: a ν normalizálva.)

Irreducibiltás $\Rightarrow \pi$ egyértelmű (cont.)

Feltehetjük, hogy $\forall x,\ \nu_x \geq 0$. Mivel

$$\nu_y = \sum_x \nu_x r(x,y),$$

kapjuk, hogy $\nu_y > 0$ minden $y - ra$ (hiszen $\boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$).
Ezzel a tétel (c) részét beláttuk.
Most belátjuk az unicitást vagyis a tétel (b) részét:
Ha a $\mathbf{P} - I$ mátrix rangja $k-2$ vagy annál kisebb, akkor van $\boldsymbol{\nu} \perp \mathbf{w}$, amelyekre

$$\boldsymbol{\nu}^T\mathbf{P} = \boldsymbol{\nu}^T \text{ és } \mathbf{w}^T\mathbf{P} = \mathbf{w}^\mathbf{T}.$$

Irreducibiltás $\Rightarrow \pi$ egyértelmű (cont.)

Fentiek miatt feltehető, hogy $\forall x$-re: $\nu_x > 0$ és $w_x > 0$. Ekkor viszont $\mathbf{w}$ és $\boldsymbol{\nu}$ nem lehetnének merőlegesek. Ez ellentmondás.
(d) bizonyítása: Egy álatlánosabb tételből (File B 15. Tétel) azonnal következik. ■

PÉLDA 31

Szabályos érmével dobunk. Legyen T_{FI} az első időpont amikor a dobás sorozatban a FI megjelenik. Kérdés: **(a)** $\mathbb{E}[T_{FI}] = ?$, **(b)** $\mathbb{E}[T_{FF}] = ?$

Megoldás

Tekintsük a kétlépéses láncot. Ennek átmenet valószínűség mátrixa:

$P =$

	FF	FI	IF	II
FF	1/2	1/2	0	0
FI	0	0	1/2	1/2
IF	1/2	1/2	0	0
II	0	0	1/2	1/2

Megoldás (Folyt.)

Ahogyan azt a 109. slidon explicitté tettük a P-hez tartozó stacionárius eloszlás meghatározásához először elkészítjük az A mátrixot, úgy hogy a P főátlójának minden eleméből levonunk 1-et, majd at utolsó oszlopot a csupa 1-ből álló sorra cseréljük:

$$A := \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás (Folyt.)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1.5 & -0.5 & 0.5 & 1.5 \\ 0. & -1. & 0. & 1. \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 & 1.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

A 110. slideon leírtak szerint π az A^{-1} utolsó sora Ez a 30. Tétel (d) pontja szerint azt jelenti, hogy bármelyik elemből az önmagába való visszatérés várható ideje egyenlő 4-el.

$$\mathbb{E}_{FF}[T_{FF}] = \mathbb{E}_{FI}[T_{FI}] = \mathbb{E}_{FI}[T_{IF}] = \mathbb{E}_{II}[T_{II}] = 4. \quad (25)$$

Most megválaszoljuk a kérdéseket:

Megoldás (Folyt.)

(a) Képzeljük el, hogy a -1-edik pozíción F és a 0-adik pozíción az I van. Ezután dobunk az érmével és az n-edik dobás eredménye Y_n, $n \geq 1$. Definíció szerint $Y_{-1} = F$ és $Y_0 = I$.

Most jön a lényeg: Az $Y_{-1}, Y_0, Y_1, Y_2, \dots$ sorozatban az első $n \geq 1$ amire egy FI éppen bekövetkezett egyenlő T_{FI}-vel. Vagyis az, hogy FI-vel kezdünk nem segít mert két egymás utánni FI blokk DISZJUNKT kell legyen.

Ezért alkalmazva (25)-öt:

$$\mathbb{E}[T_{FI}] = \mathbb{E}_{FI}[T_{FI}] = 4.$$

Megoldás (Folyt.)

(b) Hasonlóan: Képzeljük el, hogy a -1-edik pozíción F és a 0-adik pozíción is az F van. Ezután dobunk az érmével és az n-edik dobás eredménye Z_n, $n \geq 1$. Definíció szerint legyen $Z_{-1} = F$ és $Z_0 = F$. Két lehetőség van. Legyen $N \geq 1$ az első lépés amikor az FF megjelenik.

- Ha $Z_1 = F$, akkor $N = 1$.
- Ha $Z_1 = I$, akkor $N = 1 + T_{FF}$. Tehát, alkalmazva a (25) formulát:

$$4 = \mathbb{E}_{FF}[T_{FF}] = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(1 + \mathbb{E}[T_{FF}]).$$

Innen $\mathbb{E}[T_{FF}] = 6$.

Hivatkozások

[1] R. Durrett
Essentials of Stochastic Processes, Second edition
Springer, 2012. A majdnem kész változatért kattintson ide.

[2] S. Karlin, H.M. Taylor
Sztochasztikus Folyamatok
Gondolat, Budapest, 1985

[3] G. Lawler
Intoduction to Stochastic Processes
Chapmann & Hall 1995.

Hivatkozások (cont.)

[4] D.A. Levin, Y. Peres,E.L. Wilmer
Markov chains and mixing times
American Mathematical Society, 2009.

[5] Major Péter
Folytonos idejű Markov láncok
`http://www.renyi.hu/~major/debrecen/debrecen2008a/markov3.html`

[6] Rényi Alfréd
Valószínűségszámítás, (negyedik kiadás)
Tankönyvkiadó Budapest, 1981.

Hivatkozások (cont.)

[7] S.I. Resnik
A Probability Path
Birkhäuser, 2005

[8] S. Ross
A First Course in Probability, 6th ed.
Prentice Hall, 2002

[9] E. Senata
Non-negative Matrices and Markov Chains
Springer, 1981 (második kiadás).

Hivatkozások (cont.)

[10] Tóth Bálint *Sztochasztikus folyamatok jegyzet*
Tóth Bálint Jegyzetért kattintson ide

Index

Index (cont.)