B3 jegyzet építőmérnök és környezet mérnök hallgatóknak
2002.12.22. változat

Simon Károly

2002.12.22

Lektorálta: Dr. Sándor Csaba egyetemi adjunktus

Előszó

Ez a jegyzet Dr. Simon Károlynak a BME Építőmérnök és Környezet mérnök hallgatóinak tartott előadásai anyagát tartalmazza. A jegyzetnek ez az **első** változata, ami biztos, hogy még némi javításra szorul. Kérem, hogy észrevételeiket küldjék el az email címemre (simonk@math.bme.hu).

Köszönetnyilvánítás: A szerző köszönetét fejezi ki Prof. Caspar R. Curjelnek (Univ. of Washington), akinek sokéves vektoranalízis tanítási tapasztalatából a szerző sokat merített. A jegyzet 4. fejezete (vektoranalízis) lényegében Prof. Curjel jegyzetének [2, 3] szellemében íródott.

Köszönet illeti Dr. Simonné Bakos Erzsébetet a jegyzet nagy részének gépeléséért és Csordás Helga építőmérnök hallgatót, aki mint demonstrátor sok hasznos észrevétellel és tanáccsal segített a jegyzet készítésében. Továbbá köszönetet mondunk Hernáth Szabolcsnak az első három fejezet ábráinak elkészítéséért. Köszönet illeti Gerényi Attila kollégámat és Németh Balázs környezet mérnök hallgatót, akik a jegyzet legelső változatában található gépelési hibák közül sokra felhívták a figyelmem.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Közönséges differenciálegyenletek

1.1. Bevezetés, definíciók

A differenciálegyenletek olyan egyenletek, melyekben az ismeretlen egy függvény és az egyenletben az ismeretlen függvény deriváltja is előfordul. Például ha $y = y(x)$ az ismeretlen függvény, akkor

$$y' = y \tag{1.1}$$

$$y'' = -y \tag{1.2}$$

$$y'' = y \tag{1.3}$$

$$y = \frac{y}{x} + x \tag{1.4}$$

függvényegyenletek közül az első három differenciálegyenlet, de a negyedik már nem, mert ott az ismeretlen $y = y(x)$ függvény semelyik deriváltja nem szerepel. A differenciálegyenletek tanulmányozása azért fontos, mert amint Newton mondta: "a természet törvényeit differenciálegyenletek írják le". Az $y' = y$ differenciálegyenletet megoldani annyit jelent, mint megtalálni az összes olyan függvényt, amely egyenlő az ő derivált függvényével. Könnyű látni, hogy minden $c \in \mathbf{R}$-re az $y = ce^x$ alakú függvényekre igaz, hogy az ő deriváltjaik saját magukkal megegyeznek, tehát az összes $y = ce^x$ alakú függvény a (1.1) differenciálegyenlet megoldása. (Azt, hogy ennek az egyenletnek minden megoldása $y = ce^x$ alakú, majd később látjuk be.)

A (1.2) egyenletet illetően, középiskolás tanulmányainkra visszagondolva láthatjuk, hogy mind a $y(x) = \cos(x)$, mind pedig az $y(x) = \sin(x)$ függvényekre igaz, hogy az ő második deriváltjuk saját maguk negatívjával egyezik meg, vagyis, hogy a $\cos(x)$ és $\sin(x)$ függvények a (1.2) egyenlet megoldását képezik. Azt nagyon könnyű látni, hogy ezek tetszőleges lineáris kombinációja szintén megoldást ad. Tehát tetszőlegesen választott $a, b \in \mathbf{R}$ számokra: az $y(x) = a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$ a (1.2) diff.egyenlet megoldását adja. Szintén később fogjuk belátni, hogy a (1.2) egyenlet minden megoldása ilyen alakú. Hasonlóan kapjuk, hogy a (1.3) egyenlet minden megoldása $y = a \cdot ch(x) + b \cdot sh(x)$. Az nyilvánvaló, hogy a fenti három differenciálegyenlet a legegyszerűbb alakú nem-triviális differenciálegyenlet. Később látni fogjuk, hogy ezek mindegyike rendkívül fontos is, mert a legfontosabb fizikai alkalmazásokban ezek fordulnak elő.

Az első féléves analízis tanulmányok után már nyilvánvaló, hogy nem lehet remélni sem azt, hogy minden differenciálegyenlet megoldását valamilyen képlettel leírható függvények segítségével megadhatjuk. Ugyanis, az $f(x) = \frac{e^x}{x}$ függvénynek nincs képlettel megadható primitív függvénye. Ez éppen azt jelenti, hogy az $y' = \frac{e^x}{x}$ differenciálegyenletnek nincs képlettel megadható megoldása.

A továbbiakban az lesz az első célunk, hogy összegyűjtsünk néhány olyan a differenciálegyenlet-típust, amelyeket integrálással megoldhatunk. Ehhez először is a differenciálegyenleteket osztályoznunk kell.

1.1.1. Differenciálegyenletek osztályozása

Néhány példa differenciálegyenletekre, melyek javarészt a Scharnitzky Viktor: Differenciálegyenletek című feladatgyűjteményből vettük át. Ezt a feladatgyűjteményt a továbbiakban Sch-val jelöljük

1. Az ismeretlen függvény $y = y(x)$ alakú

   (a) $y'y^2 = 1$

   (b) $y\prime + 2xy = 0$ Sch 123.l.

   (c) $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$ Sch 129.l.

   (d) $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2) = 0$, ahol p egy tetszőleges valós szám $p \in \mathbb{R}$(Bessel-féle d.e.)

(e) $y'' - 3y' + 2y = 0$ Sch 238.l.

(f) $y'' - 3y' + 2y = e^x + 2e^{3x}$ Sch 238.l.

(g) $(4x^3y^3 - 2xy)\,dx + (3x^4y^2 - x^2)\,dy = 0$ Sch 102.l.

2. Az ismeretlen függvény $z = z(x, y)$ alakú.

   (a) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

   (b) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

   (c) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

   (d) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

A fenti első csoportba tartozó differenciál egyenleteket *közönséges differenciálegyenleteknek hívjuk* , mert az ismeretlen függvény egyváltozós függvény (tehát csak közönséges deriváltjai fordulhatnak elő) . A második csoportba tartozó differenciálegyenletek a *parciális diffrenciálegyenletek*, hiszen itt az ismeretlen függvény többváltozós, így az egyenletben a parciális deriváltjai fordulnak elő.

Differenciálegyenlet rendje: Az előforduló legmagasabb rendű derivált (parciális derivált) rendje. Tehát

elsőrendű: 1.(a), 1.(b), 1.(c), 1.(g), 2.(d)

másodrendű: 1.(d), 1.(e), 1.(f), 2.(a), 2.(b), 2.(c)

Differenciálegyenlet lineáris: Ha a differenciálegyenlet az ismeretlen függvényre és annak deriváltjaira nézve lineáris. (Tehát, ha az ismeretlen függvény y, akkor nem lehet a differenciálegyenletben pl. $\sin(y)$, $y'y$, $(y')^2$, y^3.)

lineáris: 1.(b), 1.(c), 1.(d), 1.(e), 1.(f), 2.(a), 2.(b), 2.(c), 2.(d)

nem lineáris: 1.(a), 1.(g).

Differenciálegyenlet állandó-együtthatós: Ha az ismeretlen függvényt és deriváltjait tartalmazó tagok állandó-együtthatósak (tehát pl. nem lehet benne $y\sin(x)$, ha y az ismeretlen függvény)

állandó-együtthatósak: 1.(a), 1.(e), 1.(f), 2.(a), 2.(b), 2.(c), 2.(d)

függvényegyütthatósak: 1.(b), 1.(c), 1.(d), 1.(g).

Ebben a fejezetben a közönséges, a következő fejezetben a parciális differenciálegyenleteket tárgyaljuk.

1.1.2. Partikuláris és általános megoldás

1. DEFINÍCIÓ: Egy N-ed rendű differenciálegyenlet *általános megoldása* egy olyan megoldás, ami N darab konstanst tartalmaz. Például az $y'' = -y$ másodrendű diff.egyenlet általános megoldása, mint fent említettük: $y = a\cos x + b\sin x$.

2. DEFINÍCIÓ: A differenciálegyenlet olyan megoldását, ami már nem tartalmaz konstanst, *partikuláris megoldásnak* hívjuk. Például az $y'' = -y$ diff.egyenlet egy partikuláris megoldása $y = -5\cos x + 6\sin x$.

Kezdetiérték feladat (Cauchy probléma): Az $N-$ed rendű differenciálegyenlet megoldását keressük azzal a feltétellel, hogy egy adott pontban az ismeretlen függvény és annak első $N-1$ deriváltja elő van írva.

1. PÉLDA: $y'' = -y$ és $\left\{ \begin{array}{c} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{array} \right\}$ (itt $N = 2$). Mint említettük az általános megoldás $y = a\cos x + b\sin x$. Tehát, $y' = -a\sin x + b\cos x$. Ekkor $x = 0$-át írva: $\left\{ \begin{array}{c} a\cos 0 + b\sin 0 = 1 \\ -a\sin 0 + b\cos 0 = 0 \end{array} \right.$, amiből: $a = 1$ és $b = 0$ adódik. Tehát a Cauchy feladat megoldása: $y = \cos x$.

1.1.3. Egzisztencia, unicitás, stabilitás

Differenciálegyenletek megoldásaival kapcsolatban érdekelnek bennünket a következő problémák:

(a) *unicitás*: azt mondjuk, hogy az unicitás teljesül, ha a Cauchy feladatnak egyetlen megoldása van.

(b) *egzisztencia*: akkor teljesül, ha van megoldása a differenciálegyenletnek.

(c) *stabilitás*: durván szólva azt jelenti, hogy ha a Cauchy feladatban a kezdeti értéket kicsit változtatjuk meg, akkor ennek hatása hosszú idő múlva is alig észrevehető lesz. (A pontos definíció később).

1.2. Elsőrendű közönséges diff.egyenletek

1.2.1. Szétválasztható diff.egyenletek

Legyen $f(x)$ egy folytonos függvény valamely I_1 és $g(y)$ egy folytonos függvény valamely I_2 intervallumon, továbbá $g(y) \neq 0$ ha $y \in I_2$. Ekkor az

$$y' = f(x)\, g(y) \tag{1.5}$$

alakú elsőrendű közönséges differenciálegyenleteket *szétválasztható változójú* differenciálegyenleteknek hívjuk. Legyen $h(y) = \frac{1}{g(y)}$. Tehát (1.5) szerint: $h(y)\, y' = f(x)$. Ekkor a helyettesítéses integrálás szabálya szerint és $\frac{dy}{dx} = y'$ alapján:

$$\underbrace{\int h(y)\, dy}_{\substack{\text{Ez csak} \\ y\text{-tól függ}}} = \underbrace{\int f(x)\, dx}_{\substack{\text{Ez csak} \\ x\text{-től függ}}} + C.$$

A szétválasztható változójú diff.egyenletek megoldását a következő példán mutatjuk be:

2. PÉLDA: 1. $y'y^2 = 1$. Ez a diff.egyenlet szétválasztható változójú, mivel a fenti $f(x) = 1$ és $g(y) = \frac{1}{y^2}$ választással $y' = f(x)\, g(y)$. Az $y' = \frac{dy}{dx}$-et írva és a dx-el formálisan átszorozva kapjuk, hogy:

$$y^2 dy = dx.$$

Mindkét oldalt integrálva: $\int y^2 dy = \int dx$. Amiből $\frac{y^3}{3} = x + C$ adódik. Innen $y = \sqrt[3]{3x + C}$ (mivel C tetszőleges konstans, nem kell 3-al megszorozni, mert $3C$ ugyanúgy mindentől független konstans, mint C).

2. $y' = \frac{2xy \ln y}{x^2 - 1}$. ez a diff.egyenlet is szétválasztható változójú, ugyanis ha $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$-et és $g(y) = y \ln y$-t írunk akkor a diff.egyenlet $y' = f(x)\, g(y)$ alakú lesz. A diff.egyenlet megoldása most is úgy történik, hogy $y' = \frac{dy}{dx}$-et írva:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy \ln y}{x^2 - 1}.$$

Most az y-os és x-es tagokat más-más oldalra rendezve:

$$\frac{dy}{y\ln y}=\frac{2x}{x^2-1}dx.$$

(Ha $y\ln y\neq 0$.) Mindkét oldalon integrálva:

$$\int\frac{\frac{1}{y}dy}{\ln y}=\int\frac{2x}{x^2-1}dx$$

-ből adódik, hogy $\ln|\ln y|=\ln|x^2-1|+\ln C$. (Itt a konstanst eleve $\ln C$ alakba írtuk, amit megtehetünk, mert az $\ln x$ függvény értékkészlete az $\mathbf{R}$.) Ahonnan: $y=e^{C\left(x^2-1\right)}$. Az $\ln y=0$-nak az $y\equiv 1$ felel meg.

3. *A normális növekedés egyenlete:* legyen $k\in\mathbf{R}\setminus\{\emptyset\}$ és $a\in\mathbf{R}$

$$y'=ky \text{ és } y(0)=a. \tag{1.6}$$

ez nagyon fontos egyenlet, mert sokszor előfordul a gyakorlatban ezért a megoldását fejből kell tudni. Nyilvánvalóan szétválasztható változójú diff.egyenlet. Szokásunk szerint $y'=\frac{dy}{dx}$-et írva: $\frac{dy}{dx}=ky$. Az y-os és x-es tagokat külön oldalra rendezve: $\frac{1}{k}\frac{dy}{y}=dx$. Mindkét oldalt integrálva: $\ln|y|=kx+C$, amiből az $y'=ky$ általános megoldása $y=e^ce^{kx}$. Használva , hogy $a=y(0)=Ce^0$, ebből a (1.6) Cauchy feladat megoldása:

$$y=ae^{kx}.$$

1.2.2. Változókban homogén diff.egyenlet

Az $y'=\varphi(x,y)$ alakú diff.egyenlet változóiban homogén, ha $\forall t\neq 0$-ra $\varphi(tx,ty)=\varphi(x,y)$. Ekkor bevezetve a $f(u)=\varphi(1,u)$ jelölést látható, hogy $\varphi(x,y)=\varphi\left(1,\frac{y}{x}\right)=f\left(\frac{y}{x}\right)$, amiből következőleg a változóiban homogén diff.egyenlet az $u=\frac{y}{x}$ helyettesítés után szétválasztható változójú diff.egyenletbe megy át. Ennek megoldását a következő példán keresztül tanulhatjuk meg:

3. PÉLDA: $x\sin\frac{y}{x}-y\cos\frac{y}{x}+xy'\cos\frac{y}{x}=0$. Először is x-el leosztva kapjuk

$$\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}+y'\cos\frac{y}{x}=0 \tag{1.7}$$

Ez tehát egy változóiban homogén diff. egyenlet, hiszen minden x helyébe tx-et és minden y helyébe ty-t írva ugyanazt az egyenletet kapjuk (mivel az y'-ön kívül nincs külön sem x sem y, csak $\frac{y}{x}$). Ekkor bevezetjük az $u = u(x) = \frac{y(x)}{x} = \frac{y}{x}$ új ismeretlen függvényt. Mivel $y(x) = x \cdot u(x)$, tehát az $y' = u + xu'$ összefüggést (1.7)-ba helyettesítve, kapjuk

$$\sin u - u \cos u + \underbrace{(u + xu')}_{\text{ez volt az } y'} \cos u = 0$$

amiből egyszerűsítés után kapjuk a

$$\frac{du}{dx} \cdot x \cdot \cos u = -\sin u$$

szétválasztható változójú diff.egyenletet. Ennek megoldása az előző fejezetben ismertetett módon: $\sin u = \frac{C}{x}$, amiből a (1.7) diff.egyenlet megoldása implicit alakban:

$$\sin \frac{y}{x} = \frac{c}{x}.$$

1.2.3. Elsőrendű lineáris diff.egyenletek

Az

$$y' + p(x)\, y = q(x) \tag{1.8}$$

alakú diff.egyenleteket *elsőrendű lineáris diff.egyenleteknek hívjuk.* Ezek megoldását a következő példán szemléltetjük:

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2. \tag{1.9}$$

(Itt $p(x) = -\frac{1}{x}$; $q(x) = x^2 + 3x - 2$.) A megoldás két lépésből áll. Először megoldjuk az

$$Y' - \frac{Y}{x} = 0 \tag{1.10}$$

homogén diff.egyenletet. Majd ennek az általános megoldásában előforduló C konstans helyére egy olyan $C(x)$ függvényt írunk, hogy ezzel a (1.9) megoldását kapjuk. Ily módon a (1.9) egy partikuláris megoldásához jutunk. A (1.9) általános megoldását úgy kapjuk, hogy

$$y_{i,ált} = Y_{h,ált} + y_{i,p} \tag{1.11}$$

vagyis a (1.9) inhomogén egyenlet általános megoldása $y_{i,ált}$ egyenlő az (1.10) általános megoldása $Y_{h,ált}$ plusz a (1.9) inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása $y_{i,p}$.

1. lépés: Az $Y' - \frac{Y}{x} = 0$ diff.egyenlet szétválasztható változójú megoldása: $Y_{h,ált} = C \cdot x$.

2.lépés: Meg szeretnénk határozni azt a $C(x)$ függvényt, amelyre

$$y = x \cdot C(x)$$

megoldása a (1.9) egyenletnek. Mivel $y' = C(x) + xC'(x)$, ezt behelyettesítve a (1.9) egyenletbe kapjuk, hogy

$$C(x) + xC'(x) - C(x) = x^2 + 3x - 2.$$

Innen: $C(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln|x|$ (itt nem kell feltüntetni az integrálból adódó konstanst, mert csak **egy** partikuláris megoldást keresünk). Tehát $y_{i,p} = x \cdot C(x) = \frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x\ln|x|$. Így az (1.9) egyenlet általános megoldása:

$$y_{i,ált} = Y_{h,ált} + y_{i,p} = \underbrace{c \cdot x}_{Y_{h,ált}} + \underbrace{\frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x\ln|x|}_{y_{i,p}}.$$

A megoldásnak ezt a módszerét **konstans variációs módszernek** nevezzük, mert az $y_{i,p}$-t úgy határoztuk meg, hogy az (1.10) homogén egyenlet általános megoldásában előforduló C konstanst helyettesítettük egy $C(x)$ függvénnyel.

1.3. Lineáris differenciálegyenletek

Ebben a fejezetben az n-ed rendű homogén lineáris

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0 \qquad (1.12)$$

és az n-ed rendű inhomogén lineáris

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = r(x) \qquad (1.13)$$

diff. egyenletekkel foglalkozunk. Vegyük észre, hogy a fenti két egyenlet eleve úgy van felírva, hogy a legmagasabb rendű tag együtthatója 1. (Ez nem jelent lényeges megszorítást, mert legtöbbször a legnagyobb rendű tag együtthatójával való visszaosztással erre az esetre juthatunk.) Nézzük mindezt egy példán keresztül:

4. PÉLDA: Határozzuk meg a

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 2x \tag{1.14}$$

másodrendű inhomogén lineáris diff.egyenlet megoldását.

Először is vegyük észre, hogy ez egy olyan típusú egyenlet, mint ami a (1.13)-ben jelenik meg általánosan. Az ottani $n = 2$, $a_1(x) = -\frac{2}{x}$ és az ottani $a_0(x) = \frac{2}{x^2}$ és $r(x) = 2x$. A most következő részekben azokat az eszközöket tanuljuk meg, amelyek ilyen jellegű feladatok megoldására szolgálnak.

Ezen az úton az első lépés a következő észrevétel, melynek bizonyítása nagyon egyszerű, de itt nem részletezzük:

1. TÉTEL: Az (1.13) inhomogén egyenlet általános megoldását $y_{i,ált}$ megkapjuk a (1.12) egyenlet általános megoldásának $Y_{h,ált}$ és az (1.13) inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának $y_{i,p}$ összegeként.

$$y_{i,ált} = Y_{h,ált} + y_{i,p}. \tag{1.15}$$

Ugyanezt, mint a (1.11) egyenletet, már láttuk az elsőrendű lineáris esetben. Most itt ebben a tételben az az új, hogy nemcsak az elsőrendű diff.egyenletre-re, hanem, tetszőleges n-ed rendű **lineáris** diff.egyenletre igaz, hogy az inhomogén egyenlet általános megoldása egyenlő a homogén egyenlet általános megoldása plusz az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásával.

Vigyázat: ez a séma CSAK a **lineáris** diff.egyenletek megoldása esetén működik.

A fenti tétel mutatja, hogy először azt kell megértenünk, hogyan találhatjuk meg az n-ed rendű homogén lineáris diff. egyenletek (1.12) *általános* megoldását (ezt a függvényegyütthatós esetben nem mindig tudjuk, hogyan lehet előállítani, de az állandó-együtthatós esetben van egy séma, ami mindig megadja a homogén lineáris diff.egyenlet általános megoldását). Második lépésként azt kell megértenünk, hogyan találhatjuk meg a (1.13) egyenletnek egy *partikuláris* megoldását. Erre két módszert is tanulunk majd.

1.3.1. Homogén lineáris diff.egyenletek

Ebben a fejezetben tehát a (1.12) alakú diff.egyenletek általános megoldásának meghatározásával foglalkozunk. Először azt az általános esetet tekintjük, mikor az együtthatók függvények.

Függvényegyütthatós eset:. Legyen I egy zárt intervallum vagy az egész számegyenes. Jelöljük $\mathcal{C}^n(I)$-vel az I-n értelmezett n-szer folytonosan differenciálható függvények halmazát, vagyis azon függvények halmazát, melyeknek létezik és folytonos az n-edik deriváltja. Erre azért van szükségünk, mert a (1.12) és az (1.13) diff.egyenletek megoldásait a $\mathcal{C}^n(I)$ halmazon belül keressük.

Ha tekintjük a függvények összeadását és számmal való szorzását, az pontosan azokkal a tulajdonságokkal bír, mint a vektorok összeadása és számmal való szorzása, ezért a $\mathcal{C}^n(I)$-t a függvények összeadására és számmal való szorzására nézve *vektortérnek* nevezzük. Azt mondjuk, hogy V egy lineáris altere $\mathcal{C}^n(I)$-nek, ha

$$\forall f, g \in V\text{-re és } \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}\text{-re: } \alpha f + \beta g \in V$$

teljesül, vagyis V lineáris altér, ha zárt a lineáris kombinációra nézve. A V lineáris altér bázisa a V elemeiből álló olyan lineárisan független halmaz, amely lineáris kombinációjaként a V minden eleme előáll. Vagyis $f_1, \dots, f_n \in V$ a V egy bázisa, ha

(a) Az $f_1, \dots, f_n$ lineárisan független (vagyis, ha $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n \equiv 0$, akkor $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ és

(b) $\forall g \in V$-re létezik $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$, amire $g = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$.

Mindez azért fontos itt, mert az n-edrendű homogén lineáris (1.12) egyenlet megoldásai a $\mathcal{C}^n(I)$ egy lineáris alterét adják, és ennek az altérnek egy bázisát (amit *alaprendszernek* hívunk) kell majd megtalálnunk. Ebben segít a következő tétel:

2. TÉTEL: A (1.12) egyenlet megoldásainak altere n-dimenziós, vagyis az alaprendszer n függvényből áll.

Mindezt lássuk a (1.14) esetén: A (1.14) példában szereplő inhomogén diff.egyenlet homogén része:

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0. \tag{1.16}$$

könnyű ellenőrizni, hogy az $y_1 = x$ és az $y_2 = x^2$ függvények megoldásai a (1.16) egyenletnek. (Azt ellenőrizni, hogy ezek megoldások, triviális, de rájönni arra, hogy miért pont ezek a megoldások, sokkal nehezebb és ilyen jellegű technikákat csak a kevésbé általános, állandó együtthatós esetben tanulunk majd.) Tehát az $\{x, x^2\}$ megoldásai (1.16)-nak. Azonnal látható, hogy az $y_1 = x$ és az $y_2 = x^2$ függvények lineárisan függetlenek, hiszen ha $ax + bx^2 \equiv 0$ akkor biztos, hogy $a = 0$ és $b = 0$. Használva a 2. tételt, a másodrendű egyenlet alaprendszere két függvényből áll. Tehát a (1.16)-nak az alaprendszere a $\{x, x^2\}$, vagyis a (1.16) általános megoldása:

$$y_{\acute{a}lt} = ax + bx^2.$$

Mint a példa is szemlélteti, az n-edrendű homogén lineáris egyenletek megoldásánál két dolgot kell tennünk: kell találni n megoldást és be kell látnunk, hogy ezek lineárisan függetlenek. Az n megoldás keresését, majd csak az állandó együtthatós esetben tanuljuk, a megoldások függetlenségének ellenőrzését azonban, most fogjuk megtanulni.

3. DEFINÍCIÓ: *Wronski-féle determináns:* Adottak a (1.12) homogén egyenlet $y_1, \ldots y_n$ megoldásai. Ekkor a

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \ldots & y_n''(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

determinánst *Wronski determinánsnak* hívjuk.

A Wronski determináns függvény, amelynek értelmezési tartománya az I intervallum, értékkészlete a valós számok halmaza. Be lehet bizonyítani, hogy ez a $W(x)$ függvény rendelkezik a következő szokatlan tulajdonsággal: függően az $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ függvényektől, csak a következő két eset lehetséges:

- a $W(x)$-nek egyáltalán nincs zérus helye vagy pedig
- a $W(x) \equiv 0$ az I intervallumon.

Vagyis vagy nincs a $W(x)$-nek egyetlen zérus helye sem vagy a $W(x)$ azonosan nulla. A Wronski determináns azért fontos nekünk, mert:

3. TÉTEL: Az $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ függvények akkor és csak akkor alkotják a (1.12) homogén egyenlet alaprendszerét, ha létezik $x \in I$, hogy $W(x) \neq 0$. (A fenti megjegyzés szerint ekkor ez minden x-ben teljesül.)

5. PÉLDA: Tekintsük a jól ismert $y'' + y = 0$ diff.egyenletet. Ez homogén lineáris, tehát a fenti tétel alkalmazható rá. Mint már említettük, középiskolás feladat ellenőrizni azt, hogy az $y_1 = \cos(x)$ és az $y_2 = \sin(x)$ függvények megoldásai a fenti egyenletnek. Tudjuk a 2. tételből, hogy a másodrendű homogén lineáris egyenlet alaprendszere két függvényből áll. Tehát csak az marad hátra, hogy ellenőrizzük, hogy a fenti $\cos x, \sin x$ függvények független rendszert alkotnak-e, amit mint a 3. tétel mutatja, úgy döntünk el, hogy megvizsgáljuk, hogy a $W(x)$ függvény nulla-e vagy sem. Azonnal látszik, hogy a $W(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix} = \cos^2(x) + \sin^2(x) \equiv 1 \neq 0$. Tehát a $\{\cos(x), \sin(x)\}$ egy alaprendszere az $y'' + y = 0$ diff.egyenletnek, vagyis ezen diff.egyenlet általános megoldása $y = a\cos x + b\sin x$.

6. PÉLDA: Hasonlóan, tekinthetjük az $y'' - y = 0$ másodrendű homogén lineáris diff.egyenletet. Azonnal látható, hogy az $y_1 = ch(x)$ és az $y_2 = sh(x)$ függvények megoldásai ennek az egyenletnek. Ahhoz, hogy ezek alaprendszert alkossanak, az kell, hogy a $W(x) = \det \begin{bmatrix} ch(x) & sh(x) \\ sh(x) & ch(x) \end{bmatrix} = ch^2(x) - sh^2(x) \equiv 1 \neq 0$. Tehát az egyenlet általános megoldása:

$$y = ach(x) + bsh(x).$$

7. PÉLDA: Tekintsük a

$$\left(1 + x^2\right) y'' + xy' - y = 0 \tag{1.18}$$

másodrendű homogén lineáris diff.egyenletet. A feladat az, hogy határozzuk meg ennek az általános megoldását! Az ember némi találgatás után rájön, hogy az $y_1 = x$ egy megoldása (1.18)-nak. Ilyenkor gyakran használ, ha egy másik partikuláris megoldást az $y_2 = c(x) \cdot y_1 = c(x) \cdot x$ alakban keresünk. Vagyis meg szeretnénk találni egy olyan $c(x) \neq 1$ függvényt, melyre $y_2 = c(x) \cdot x$ szintén megoldása a (1.18) egyenletnek. Ekkor $y_2' = c'x + c$ és $y_2'' = c''x + c' + c' = c''x + 2c'$. Ezt a (1.18) diff.egyenletbe helyettesítve:

$$\left(1 + x^2\right)\left(c''x + 2c'\right) + x\left(c'x + c\right) - xc = 0, \tag{1.19}$$

amiből a c kiesik. Tehát kapunk egy diff.egyenletet, amiben csak a c' és a c'' szerepel. Ha itt bevezetjük a $d = c'$ új ismeretlent, akkor egy elsőrendű diff.egyenletre jutunk, melyben az ismeretlen függvény a d. Ennek elég egyetlen megoldását meghatározni, majd ebből kapjuk, hogy a (1.19) diff.egyenlet egy megoldása: $c(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, vagyis $y_2 = \sqrt{1 + x^2}$. A kérdés tehát most már csak az, hogy az $\left\{x, \sqrt{1 + x^2}\right\}$ rendszer alaprendszer-e, vagyis mivel az egyenlet másodrendű, és így az alaprendszer 2 elemből áll, elég ellenőrizni, hogy a Wronski determináns nem nulla-e.

$$W(x) = \det\begin{bmatrix} x & \sqrt{1+x^2} \\ 1 & x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < 0$$

minden x-re, így a Wronski determináns nem 0, így $\left\{x, \sqrt{1 + x^2}\right\}$ egy alaprendszer. Ezért a (1.18) egyenlet általános megoldása: $y = ax + b\sqrt{1 + x^2}$.

Állandó együtthatójú homogén lineáris diff.egyenletek. Az állandó együtthatós eset a fent ismertetett függvényegyütthatós esetnek az a speciális esete, amikor az összes együttható függvény konstans, vagyis: $a_{n-1}(x) \equiv a_{n-1}, \dots, a_1(x) \equiv a_1, a_0(x) \equiv a_0$. Tehát a 5. és a 6 példa-beli egyenletek állandó együtthatósak, míg a 1.18. és 1.16. egyenletek függvényegyütthatósak. Vagyis most a

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{1.20}$$

egyenletet akarjuk megoldani, ahol $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ valós számok. Az általános megoldás meghatározásához egy alaprendszert kell találni. Ebben kulcsszerepe van az egyenlethez tartozó ún. **karakterisztikus polinomnak**:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0, \tag{1.21}$$

és a karakterisztikus polinom $r_1, \dots, r_n$ (nem feltétlenül különböző) gyökeinek. Például az 5. példabeli $y'' + y = 0$ egyenlet karakterisztikus polinomja $\lambda^2 + 1$ ennek gyökei: $r_1 = i$ és $r_2 = -i$. A 6. példabeli $y'' - y = 0$ egyenlet karakterisztikus polinomja: $\lambda^2 - 1$, ennek gyökei: $r_1 = 1, r_2 = -1$.

8. PÉLDA: Tekintsük a $y''' - 7y'' + 16y' - 12 = 0$ homogén lineáris állandó együtthatós diff.egyenletet. Ennek kerakterisztikus polinomja:

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 3).$$

A karakterisztikus polinom gyökei tehát: $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$.

Egy n-ed rendű egyenlet karakterisztikus polinomja mindig n-ed fokú polinom. Ennek (multiplicitással számolva) összesen n gyöke van, (melyek között komplex gyökök is szerepelhetnek). A karakterisztikus egyenlet minden gyökének megfelel egy függvény a diff.egyenlet alaprendszerében az alábbiakban ismertetett módon:

1. Ha r a karakterisztikus egyenletnek egyszeres valós gyöke, akkor ez behozza az alaprendszerbe az $y(x) = e^{rx}$ függvényt;

2. Ha r a karakterisztikus egyenlet s-szeres multiplicitású valós gyöke, akkor ez behozza az alaprendszerbe a következő s darab függvényt:
$$e^{rx}, xe^{rx}, x^2 e^{rx}, \ldots, x^{s-1} e^{rx}. \tag{1.22}$$

3. Ha $r = u + iv$ a karakterisztikus egyenlet egyszeres komplex gyöke, akkor r komplex konjugáltja, $\bar{r} = u - iv$ is gyöke a karakterisztikus egyenletnek, és ők ketten behozzák az alaprendszerbe a következő két függvényt:
$$e^{ux} \cos vx \text{ és } e^{ux} \sin vx$$

4. $r = u + iv$ a karakterisztikus egyenlet s-szeres komplex gyöke, akkor az r komplex konjugáltja $\bar{r} = u - iv$ is s-szeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek és ők behozzák az alaprendszerbe következő $2s$ darab függvényt:
$$\begin{gathered} e^{ux} \cos vx, xe^{ux} \cos vx, \ldots, x^{s-1} e^{ux} \cos vx \\ e^{ux} \sin vx, xe^{ux} \sin vx, \ldots, x^{s-1} e^{ux} \sin vx \end{gathered}$$

9. PÉLDA: Ha egy homogén lineáris állandó együtthatós diff.egyenletnek a karakterisztikus polinomja:

$$\begin{aligned} \lambda^8 - 22\lambda^7 + 232\lambda^6 - 1546\lambda^5 + 7066\lambda^4 - 22\,738\lambda^3 + 50\,752\lambda^2 \\ -72\,670\lambda + 54\,925 \\ = (\lambda - (2+3i))^3 (\lambda - (2-3i))^3 (\lambda - 5)^2 \end{aligned}$$

akkor ezen diff.egyenlet alaprendszere:

$$e^{2x}\cos 3x, xe^{2x}\cos 3x, x^2e^{2x}\cos 3x, e^{2x}\sin 3x, xe^{2x}\sin 3x, x^2e^{2x}\sin 3x$$
$$e^{5x}, xe^{5x}.$$

A felső sort a $(\lambda-(2+3i))^3(\lambda-(2-3i))^3$ az alsó sort pedig a $(\lambda-5)^2$ hozta be az alaprendszerbe.

10. PÉLDA: Határozzuk meg az $y''+3y'+2y=0$ állandó együtthatós, másodrendű homogén lineáris diff.egyenlet megoldását! Először is megtaláljuk a $\lambda^2+3\lambda+2$ karakterisztikus polinom $r_1=-2, r_2=-1$ gyökeit. Tehát az alaprendszer: $\{e^{-2x}, e^{-x}\}$, vagyis az általános megoldás: $y=ae^{-2x}+be^{-x}$.

A fenti módszer CSAK az állandó együtthatós lineáris homogén egyenletek esetében működik.

1.3.2. Inhomogén lineáris diff.egyenletek

Az 1. tétel értelmében az inhomogén lineáris (1.13) alakú diff.egyenletek általános megoldását úgy kapjuk meg, hogy a (1.12) homogén rész általános megoldásához hozzáadjuk az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását. Az előző fejezetben tárgyaltuk a homogén rész általános megoldásának megkeresésének módjait.

Ebben a fejezetben a (1.13) alakú diff.egyenletek egy *partikuláris* megoldására tanulunk két módszert. A *konstans variációs módszert* vesszük először. Ezt mindig lehet alkalmazni, de azokban a speciális esetekben, amikor a másodikként bevezetésre kerülő ún. *próbafüggvény módszerét* is lehet alkalmazni, a próbafüggvény módszere általában kényelmesebb. Mind a két módszer alkalmazása esetén először meg kell találni a (1.12) homogén rész egy alaprendszerét.

Fontos jelölés: A fejezet hátralévő részében az $y_1,\ldots,y_n$ függvények mindig a (1.12) homogén rész egy alaprendszerét fogják jelenteni.

Konstans variációs módszer. A konstans variációs módszer abban áll, hogy keresünk olyan $c_1(x),\ldots,c_n(x)$ függvényeket, amelyekkel képzett

$$y(x)=c_1(x)\,y_1(x)+\cdots+c_n(x)\,y_n(x) \tag{1.23}$$

a (1.13) inhomogén egyenlet megoldása lesz.

4. TÉTEL: Az $y^{(n)}+a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}+\cdots a_1(x)\,y'+a_0(x)\,y=r(x)$ inhomogén lineáris diff.egyenletnek egy partikuláris megoldását megkaphatjuk $y(x)=c_1(x)\,y_1(x)+\cdots+c_n(x)\,y_n(x)$ alakban, ha $y_1,\ldots,y_n$ a homogén rész egy alaprendszerét alkotják és $c_1(x),\ldots,c_n(x)$ függvények deriváltjai eleget tesznek a következő egyenletrendszernek:

$$\begin{array}{ccccccc} c_1'(x)\,y_1(x) & + & \cdots & + & c_n'(x)\,y_n(x) & = & 0 \\ c_1'(x)\,y_1'(x) & + & \cdots & + & c_n'(x)\,y_n'(x) & = & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\ c_1'(x)\,y_1^{(n-2)}(x) & + & \cdots & + & c_n'(x)\,y_n^{(n-2)}(x) & = & 0 \\ c_1'(x)\,y_1^{(n-1)}(x) & + & \cdots & + & c_n'(x)\,y_n^{(n-1)}(x) & = & r(x) \end{array} \tag{1.24}$$

11. PÉLDA: Határozzuk meg az $y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=2x$ másodrendű inhomogén lineáris diff.egyenlet általános megoldását! Ennek homogén része a (1.16) egyenlet, melyet már vizsgáltunk és megállapítottuk, hogy a homogén rész egy alaprendszere: $\{x,x^2\}$. Felírva a (1.24) egyenletrendszert (melyben tehát $y_1(x)=x^2, y_2(x)=x$):

$$\begin{array}{ccccc} c_1'(x)\,x^2 & + & c_2'(x)\,x & = & 0 \\ c_1'(x)\,2x & + & c_2'(x) & = & 2x \end{array}$$

innen $c_1'(x)=2$ és $c_2'(x)=-2x$. Ahonnan $c_1(x)=2x$, $c_2(x)=-x^2$. (Itt nem kellenek a határozatlan integrálásnál belépő konstansok, mert CSAK EGY $c_1(x),c_2(x)$-re van szükségünk, hiszen egyetlen partikuláris megoldást keresünk.) Tehát egy partikuláris megoldása az inhomogén egyenletnek: $y_{i,p}=2x\cdot x^2-x^2\cdot x=x^3$. Vagyis az inhomogén egyenlet általános megoldása: $y_{i,\acute{a}lt}=Y_{h,\acute{a}lt}+y_{i,p}=ax+bx^2+x^3$.

Próbafüggvény módszer. Ezt a módszert csak állandó-együtthatós lineáris inhomogén diff. egyenletek egy partikuláris megoldására, azaz

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots a_1y'+a_0y=r(x)\,, \tag{1.25}$$

($a_0,\ldots,a_{n-1}\in\mathbf{R}$) alakú diff.egyenletek megoldására alkalmazhatjuk, de **csak** akkor ha a jobb oldalon található $r(x)$ ún. zavaró függvény a következő alakú:

$$r(x)=e^{ux}\left[P_n(x)\cos(vx)+Q_m(x)\sin(vx)\right], \tag{1.26}$$

ahol $P_n(x)$ és $Q_m(x)$ tetszőleges n-ed illetve m-ed fokú polinomok. Tegyük fel, hogy $u+iv$ komplex szám s-szeres gyöke a homogén rész

$$p(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$

karakterisztikus polinomjának. Ekkor az (1.25) inhomogén lineáris diff.egyenlet egy partikuláris megoldását megtalálhatjuk

$$y_{i,p}=x^s e^{ux}\left[P_k^*\cos(vx)+Q_k^*\sin(vx)\right] \tag{1.27}$$

alakban, ahol $k=\max\{n,m\}$ és P_k^*,Q_k^* általános k-adfokú polinomok.

1. MEGJEGYZÉS: Ha $u+iv$ komplex szám nem gyöke a fenti karakterisztikus polinomnak, akkor $s=0$, vagyis ebben az esetben $x^s\equiv 1$, tehát ekkor a megoldást $y_{i,p}=e^{ux}\left[P_k^*\cos(vx)+Q_k^*\sin(vx)\right]$ alakban kereshetjük.

2. MEGJEGYZÉS: Azt, hogy P_k^*,Q_k^* általános k-adfokú polinomok, úgy kell érteni, hogy $P_k^*(x)=p_kx^k+p_{k-1}x^{k-1}+\cdots+p_1x+p_0$ és $Q_k^*(x)=q_kx^k+q_{k-1}x^{k-1}+\cdots+q_1x+q_0$, ahol $p_0,p_1,\ldots,p_k,q_0,q_1,\ldots q_k\in\mathbf{R}$

Most nézzünk néhány példát ennek alkalmazására. Először csak azt gyakoroljuk, hogy a partikuláris megoldást milyen alakban kell keresni, utána megoldunk diff.egyenleteket ezzel a módszerrel.

12. PÉLDA: Tegyük fel, hogy adott egy harmadrendű lineáris inhomogén állandó-együtthatós diff.egyenletünk, melynél a homogén rész karakterisztikus polinomjának gyökei

$$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=5.$$

Tegyük fel, hogy a zavarótag:

a.) $r(x)=\cos 2x$. Ekkor a (1.26)-beli $u=0,v=2,P_n\equiv 1,Q_m\equiv 0$ és $n=m=0$. Mivel $u+iv=2i$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, ezért $s=0$. Tehát ekkor a partikuláris megoldást

$$y_{i,p}=p\cos 2x+q\sin 2x$$

alakban keressük, hiszen a p,q konstansok jelentik az általános 0-ad fokú polinomokat.

b.) $r(x) = x^2 e^{5x}$. Ekkor a (1.26)-beli $u = 5, v = 0, P_n(x) = x^2, Q_m(x) \equiv 0$ és $n = 2, m = 0$ vagyis $k = \max\{n, m\} = 2$. Mivel az $u + iv = 5$ kétszeres gyöke a karakterisztikus polinomunknak ezért $s = 2$. Tehát a partikuláris megoldást $y_{i,p} = x^2 e^{5x}(p_2 x^2 + p_1 x + p_0)$ alakban kell keresnünk.

13. PÉLDA: Határozzuk meg az $y''' - 12y'' + 45y' - 50y = \cos 2x$ egyenlet általános megoldását. Ekkor a homogén rész karakterisztikus polinomja: $p(\lambda) = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 45\lambda - 50$. Ennek gyökei: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 5$. Vagyis ugyanaz a helyzet mint a fenti a.) példában. Mint ott láttuk, a partikuláris megoldást $y_{i,p} = p\cos 2x + q\sin 2x$ alakban kell keresni. Tehát csak az maradt hátra, hogy meghatározzuk a p és q számokat. Ehhez: $y'_{i,p} = -2p\sin 2x + 2q\cos 2x$, $y''_{i,p} = -4p\cos 2x - 4q\sin 2x$, $y'''_{i,p} = 8p\sin 2x - 8q\cos 2x$. Ezeket visszaírva a megoldandó $y''' - 12y'' + 45y' - 50y = \cos 2x$ egyenletbe és a baloldalon a cos-os és sin-os tagok szerint rendezve, a két oldali együtthatók egyezéséből adódóan:

$$\cos 2x\underbrace{(-8q + 48p + 90q - 50p)}_{1} + \sin 2x\underbrace{(8p + 48q - 90p - 50q)}_{0} = \cos 2x$$

vagyis

$$\begin{array}{rcrcrcl} -2 & p & + & 82 & q & = & 1 \\ -82 & p & + & -2 & q & = & 0 \end{array}$$

ennek megoldása tehát $p = -\frac{1}{3360}$ és $q = \frac{41}{3360}$. Vagyis $y_{i,p} = -\frac{1}{3360}\cos 2x + \frac{41}{3360}\sin 2x$. Továbbá az inhomogén egyenlet $y_{i,ált}$ általános megoldása:

$$y_{i,ált} = \underbrace{c_1 e^{2x} + c_2 e^{5x} + c_3 x e^{5x}}_{Y_{h,ált}} + \underbrace{-\frac{1}{3360}\cos 2x + \frac{41}{3360}\sin 2x}_{y_{i,p}}.$$

14. PÉLDA: Határozzuk meg az $y'' - 6y' + 13y = x + \sin 3x$ diff.egyenlet általános megoldását! A homogén rész karakterisztikus egyenlete: $\lambda^2 - 6\lambda + 13$. Ennek gyökei: $\lambda_1 = 3 + 2i$, $\lambda_2 = 3 - 2i$. Vegyük észre, hogy a zavarótag $r(x) = x + \sin(x)$ ha nem is olyan mint a (1.26) képletben megköveteltük, de két, a (1.26) képletnek eleget tevő függvény, vagyis az $r_1(x) = x$ és az $r_2(x) = \sin(x)$ függvények összege. Ezért tehát keresünk a fent leírt módszerrel egy $y_{i,p,1}$ partikuláris megoldását az

$$y'' - 6y' + 13y = x$$

diff.egyenletnek, majd egy $y_{i,p,2}$ partikuláris megoldását az

$$y'' - 6y' + 13y = \sin 3x$$

diff.egyenletnek és az eredeti $y'' - 6y' + 13y = x + \sin 3x$ egy partikuláris $y_{i,p}$ megoldását, mint $y_{i,p} = y_{i,p,1} + y_{i,p,2}$-öt kapjuk. A végeredmény:

$$y_{i,ált} = \underbrace{c_1 e^{3x} \cos 2x + c_2 e^{3x} \sin 2x}_{\text{homogén általános m.o.}} + \underbrace{\frac{1}{13}x + \frac{6}{13^2} + \frac{1}{85}\cos 3x + \frac{9}{170}\sin 3x}_{\text{inhomogén egy partikuláris m.o.}}$$

1.4. Hiányos másodrendű diff.egyenletek

Hiányosnak nevezünk egy másodrendű diff.egyenletet, ha az x, y, y', közül legalább az egyik hiányzik. Most osztályozzuk a hiányos másodrendű diff.egyenleteket aszerint, hogy az x, y, y' közül melyik hiányzik és mindegyik esetben megmondjuk, hogyan találhatjuk meg a megoldást.

1. *Ha y és y' hiányzik:* Ekkor $y'' = f(x)$. A feladatot $f(x)$ kétszeres integrálásával oldhatjuk meg.

   15. PÉLDA: $y'' = 5 + \sin 3x$. Ekkor $y' = \int (5 + \sin 3x)\, dx = 5x - \frac{\cos 3x}{3} + C_1$. Tehát $y = \int \left(5x - \frac{\cos 3x}{3} + C_1\right) dx = \frac{5}{2}x^2 - \frac{\sin 3x}{9} + C_1 x + c_2$.

2. *Ha y hiányzik.* Ez az $F(x, y', y'') = 0$ alak. A megoldás kulcsa az, hogy a

   $$p(x) = y'(x)$$

   helyettesítést kell alkalmazni, ekkor $y''(x) = p'(x)$.

   16. PÉLDA: Oldjuk meg az

   $$\frac{1}{2}\left(1 + x^2\right) y'' - xy' = 0, \left\{ \begin{array}{c} y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{array} \right\}$$

   Cauchy feladatot!

   Megoldás: Mivel $y' = p(x)$ ezért $y'' = p'(x)$. Ezzel a helyettesítéssel az egyenlet a

   $$\frac{1}{2}\left(1 + x^2\right) p' - xp = 0$$

szétválasztható változójú diff.egyenletbe megy át. Ennek megoldása: $p = c\left(1+x^2\right)$. Tehát $y' = c\left(1+x^2\right)$. Innen pedig az általános megoldás:

$$y_{ált} = c\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + K.$$

A Cauchy feladat megoldását úgy kapjuk, hogy behelyettesítünk $x = 0$-át mind az $y_{ált}$, mind az $y'_{ált}$ képletébe:

$$\begin{array}{c} y\left(0\right) = K = 0 \\ y'\left(0\right) = c = 3 \end{array}.$$

Tehát a Cauchy feladat megoldása: $y = 3x + x^3$.

3. *Ha x hiányzik.* Ekkor az egyenlet $F\left(y, y', y''\right)$ alakú. Ebben az esetben az

$$y' = p\left(y\right)$$

helyettesítést kell alkalmazni. Ekkor

$$y'' = \frac{dp\left(y\left(x\right)\right)}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}y' = \frac{dp}{dy}p.$$

17. PÉLDA: Oldjuk meg az $yy'' = 2\left(y'\right)^2 - 2y'$ egyenletet.

Megoldás: Az egyenletbe helyettesítjük az $y' = p$ és a $y'' = \frac{dp}{dy}p$ összefüggéseket. így kapjuk az

$$y\frac{dp}{dy}p = 2p^2 - 2p$$

szétválasztható változójú diff.egyenletet (itt y a változó és $p = p\left(y\right)$ az y függvénye). Ennek megoldása a $p \equiv 0$ és a $p = c^2y^2 + 1$. Felhasználva, hogy $y' = p$ kapjuk, hogy $y \equiv C$ és $y = \frac{1}{c}tg\left(cx + c_2\right)$.

1.5. Egzakt differenciálegyenletek

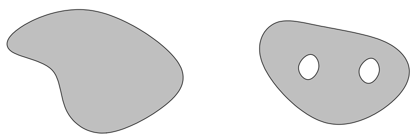
Az

$$M\left(x, y\right)dx + N\left(x, y\right)dy = 0$$

differenciálegyenlet egzakt, ha a

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$$

feltétel teljesül, és mind $M(x, y)$, mind $N(x, y)$ függvények parciális deriváltjai léteznek és folytonosak egy olyan tartományon, melyben nincsenek lyukak. Az ilyen tartományokat egyszeresen összefüggőnek hívjuk.



1.1. ábra. Egyszeresen (a) és nem egyszeresen (b) összefüggő tartományok

5. TÉTEL: Ha $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$ és mind $M(x, y)$ mind $N(x, y)$ függvények parciális deriváltjai léteznek és folytonosak egy egyszeresen összefüggő tartományon, akkor létezik olyan $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvény amelyre:

$$M = \frac{\partial F}{\partial x} \text{ és } N = \frac{\partial F}{\partial y}$$

vagyis $grad(F) = (M, N)$. Ekkor az $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ egzakt diff.egyenlet általános megoldását az $F(x, y) = C$ implicit alakban kaphatjuk meg.

18. PÉLDA: Oldjuk meg a

$$y'\left(3x^4y^2 - x^2\right) + \left(4x^3y^3 - 2xy\right) = 0$$

diff.egyenletet.

Megoldás: Használjuk fel, hogy $y' = \frac{dy}{dx}$ és formálisan szorozzuk meg az egyenlet mind két oldalát dx-el. Kapjuk, hogy

$$\underbrace{\left(4x^3y^3 - 2xy\right)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{\left(3x^4y^2 - x^2\right)}_{N(x,y)}dy = 0.$$

Ez az diff.egyenlet egzakt, mivel az M és az N függvények és minden parciális derivátjaik mindenütt értelmezettek és $\frac{\partial M}{\partial y} = 12x^3y^2 - 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$. Tehát a fenti tétel szerint létezik egy F, melyre $M = \frac{\partial F}{\partial x}$ és $N = \frac{\partial F}{\partial y}$. **Az F függvény meghatározása:** Mivel $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$, ezért

$$F(x, y) = \int M(x, y)\, dx = \int \left(4x^3y^3 - 2xy\right) dx = x^4y^3 - x^2y + f(y).$$

Ezután már csak az $f(y)$ függvényt kell meghatározni. Ezt abból kapjuk, hogy $N = \frac{\partial F}{\partial y}$. Ezt felírva: $(3x^4y^2 - x^2) = 3x^4y^2 - x^2 + f'(y)$. Innen $f'(y) \equiv 0$ vagyis $f(y) \equiv C$. Tehát $F(x, y) = x^4y^3 - x^2y + C$. A fenti tétel értelmében tahát a diff.egyenlet megoldását az $x^4y^3 - x^2y = C$ adja. Itt a megoldást implicit alakban kaptuk meg.

1.6. Differenciálegyenlet-rendszerek

Ebben a fejezetben a független változót t-vel jelöljük, az ismeretlen függvényeket pedig $x(t)$ és $y(t)$-vel. Használni fogjuk a D differenciálás operátorát. Vagyis $x'(t) = Dx(t)$ és $y'(t) = Dy(t)$. Ha azt írjuk például, hogy $(D - 5)x$ ez azzal egyenértékű, hogy $x'(t) - 5x(t)$. A differenciálegyenlet rendszerek közül csak a legegyszerűbbeket tekintjük, és ezeknek megoldását a következő példán mutatjuk be:

19. PÉLDA: Oldjuk meg a következő diff.egyenlet rendszert:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x' & + & y' & - & 4x & - & y & = & e^t \\ x' & & & + & 3x & + & y & = & 0 \end{array}$$

Megoldás: Az egyenlet rendszer a D operátorral:

$$\begin{array}{ccccc} 2(D-2)x & + & (D-1)y & = & e^t \\ (D+3)x & + & y & = & 0 \end{array}$$

A Cramer-szabály szerint egyértelmű megoldás azért van, mert a

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix} = -\left(D^2 + 1\right) \neq 0.$$

A megoldások adódnak a következő két egyenletből:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} e^t & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ és } \Delta y = \begin{vmatrix} 2(D-2) & e^t \\ D+3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ezeket kifejtve:

$$-\left(D^2+1\right)x=e^t \text{ és } -\left(D^2+1\right)y=-4e^t.$$

Ezek megoldásai: $x(t)=c_1\cos t+c_2\sin t-\frac{1}{2}e^t$ és $y(t)=c_3\cos t+c_4\sin t+2e^t$. Csak két szabad paraméter lehet, ezért c_3, c_4 kifejezhető c_1, c_2-vel. Az $x(t), y(t)$ fenti képleteit a az egyenletrendszer 2. egyenletébe helyettesítve:

$$\left(\underbrace{c_2+3c_1+c_3}_{0}\right)\cos t+\left(\underbrace{3c_2-c_1+c_4}_{0}\right)\sin t=0$$

ez adja a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcl} -3c_1 & - & c_2 & = & c_3 \\ c_1 & - & 3c_2 & = & c_4 \end{array}$$

Vagyis az egyenlet rendszer megoldása:

$$\begin{array}{r} x(t)=c_1\cos t+c_2\sin t-\frac{e^t}{2} \\ y(t)=-\left(3c_1+c_2\right)\cos t+\left(c_1-3c_2\right)\sin t+2e^t \end{array}.$$

20. PÉLDA: Oldjuk meg a következő Cauchy feladatot:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x' & - & y & + & 3x & = & 0 \\ y' & & & + & 2x & = & 0 \end{array}\right\} \quad x(0)=1, y(0)=3 \tag{1.28}$$

Megoldás: Felírjuk az egyenletrendszert a D operátor használatával:

$$\begin{array}{r} (D+3)x-y=0 \\ 2x+Dy=0 \end{array}$$

Kiszámítjuk a $\Delta=\begin{vmatrix} D+3 & -1 \\ 2 & D \end{vmatrix}=D^2+3D+2\neq 0$. Tehát a fenti módszer alkalmazható. Ezután a Cramer-szabályból:

$$\Delta x=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & D \end{vmatrix}=0 \text{ és } \Delta y=\begin{vmatrix} D+3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

Ezt kiírva:

$$x''+3x'+2x=0 \text{ és } y''+3y'+2y=0. \tag{1.29}$$

Ezeket megoldva kapjuk, hogy

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \text{ és } x(t) = c_3 e^{-t} + c_4 e^{-2t}.$$

Mivel csak két konstans lehet a négy helyett, mindezt vissza kell helyettesíteni az egyenletrendszer valamelyik, mondjuk a második egyenletébe. Ebből adódik, hogy:

$$\left(\underbrace{2c_1 - c_3}_{0}\right) e^{-t} + \left(\underbrace{2c_2 - 2c_4}_{0}\right) e^{-2t} \equiv 0.$$

Tehát $c_3 = 2c_1$, és $c_4 = c_2$. Ezt visszahelyettesítve a (1.29) megoldásaiba, kapjuk, hogy a diff. egyenletrendszer általános megoldása:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \\ y(t) &= 2c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}. \end{aligned} \tag{1.30}$$

A Cauchy-feladat megoldását úgy kapjuk, ha $t = 0$-át helyettesítünk mindkét oldalra és felhasználjuk az $y(0) = 3, x(0) = 1$ kezdeti feltételeket:

$$\begin{aligned} 1 &= x(0) = c_1 + c_2 \\ 3 &= y(0) = 2c_1 + c_2. \end{aligned}$$

Ezen egyenletrendszer megoldásaként kapjuk, hogy: $c_1 = 2$, $c_2 = -1$. Ezeket (1.30)-ba visszaírva kapjuk a Cauchy-feladat megoldását:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{-t} - e^{-2t} \\ y(t) &= 4e^{-t} - e^{-2t}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Az előbbiek egy alkalmazása: Tegyük fel, hogy a síkon mozog egy pontszerű bogárka a következő feltételek mellett: A bogárka a $t = 0$ időpontban a sík $A = (1, 3)$ pontjában található. A bogárka mozgása során bármely (x, y) pontba is jut, a pillanatnyi sebessége ebben a pontban az $(y - 3x, -2x)$ vektor által adott. Feladat: írjuk le a bogárka mozgását.

Megoldás: Mivel a bogárka az A pontból indul ki és a pillanatnyi sebessége $(x', y') = (y - 3x, -2x)$ ez azt jelenti, hogy a bogárka pályájának x és y koordinátájának időbeli függését leíró $x(t), y(t)$ függvények eleget tesznek a fenti (1.28) Cauchy feladatnak, vagyis a bogárka pályályát a 20 példa megoldásaként kapott

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{-t} - e^{-2t} \\ y(t) &= 4e^{-t} - e^{-2t}. \end{aligned} \tag{1.32}$$

függvények írják le.

1.7. Egzisztencia és unicitás tétel az $y' = f(x,y)$ egyenletekre

Ebben a fejezetben az $y = y(x)$ a keresett ismeretlen függvény és x a független változó. Legyen továbbá $T \subset \mathbf{R}^2$ egy korlátos nyílt halmaz és $f : T \to \mathbf{R}$ függvény.

Ebben a fejezetben az

$$y' = f(x,y) \tag{1.33}$$

alakú elsőrendű diff.egyenleteket vizsgáljuk. Arra a kérdésre keressük a választ, hogy az

$$y' = f(x,y) \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1.34}$$

Cauchy feladatnak ($(x_0, y_0) \in T$) milyen, az f függvényre tett feltétel mellett van megoldása (az egzisztencia kérdése) és ha van megoldás, hány megoldás van (unicitás kérdése). A válasz megfogalmazásához be kell vezetnünk a Lipschitz-feltételt:

4. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy az $f : T \to \mathbf{R}$ függvény az y változóra kielégíti a **Lipschitz-feltételt**, ha létezik, olyan L szám, hogy bármely a T tartományba tartozó (x, y_1) és (x, y_2) pontok esetén:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2| \tag{1.35}$$

teljesül. Az L-et Lipschitz kostansnak hívjuk.

A Lipschitz-feltételt kielégíti minden folytonosan diffrenciálható $f(x,y)$ függvény (hiszen T korlátos). Tehát, ha az $f(x,y)$ mindkét parciális deriváltja folytonos a T-n, akkor $f(x,y)$-ra teljesül a Lipschitz-feltétel. Azonban a Lipschitz-feltételt az y változóra olyan függvények is kielégíthetik, amelyeknek nem is létezik minden pontban mindkét parciális deriváltja. Például: az $f(x,y) = x + |y|$ függvény nem differenciálható az y-tengely egyetlen pontjában sem, de az y változóra kielégíti a Lipschitz-feltételt, hiszen $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |x + |y_1| - (x + |y_2|)| = ||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|$. Tehát az $f(x,y) = x+|y|$ függvény az y változóra kielégíti a Lipschitz-feltételt; mégpedig $L = 1$ Lipschitz konstanssal.

6. TÉTEL: (**Egzisztencia tétel**) Ha az $f(x,y)$ függvény folytonos, akkor létezik megoldása az $y' = f(x,y) \qquad y(x_0) = y_0$ Cauchy feladatnak ($(x_0, y_0) \in T$).

Azt azonban könnyen láthatjuk, hogy a folytonosságnál többet kell megkövetelni ahhoz, hogy a megoldás egyértelműségét, az unicitást is megkapjuk. Ugyanis, ha $f(x,y) = y^{\frac{2}{3}}$, akkor az f folytonos a síkon, de mégis az $y' = y^{\frac{2}{3}}$, $y(0) = 0$ Cauchy feladatnak megoldása mind az $y \equiv 0$ mind pedig az $y(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^3$ függvény.

7. TÉTEL: (**Unicitás tétel**) Ha az $f(x,y)$ függvény folytonos és az y változóra kielégíti a **Lipschitz-feltételt**, akkor létezik és egyértelmű a megoldása az $y' = f(x,y) \qquad y(x_0) = y_0$ Cauchy feladatnak $((x_0, y_0) \in T)$.

1.8. Numerikus módszerek az $y' = f(x,y)$ alakú egyenletekre.

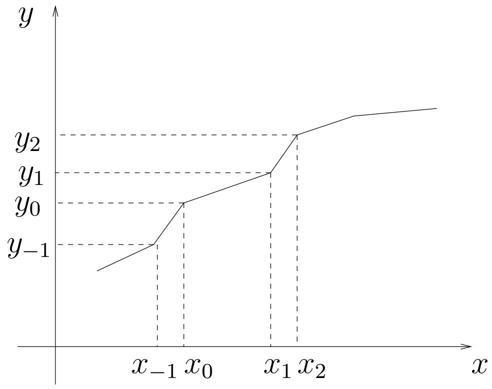
Az

$$y' = f(x,y) \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1.36}$$

Cauchy feladat, mint fent láttuk, mindig egyértelműen megoldható, ha az f folytonos és az y változóban eleget tesz a Lipschitz feltételnek. Az azonban előfordulhat, hogy a megoldás egy olyan függvény, amelyet semmilyen képlettel nem lehet előállítani, vagy csak olyan bonyolult képlet állítja elő, amelyből csak nagyon nehezen lehetne következtetni arra, hogy néz ki a Cauchy feladat megoldásának grafikonja. Ha a pontos megoldást nem is mindig tudjuk előállítani, közelítő megoldásokat találhatunk, amelyek tetszőleges előre adott pontossággal közelítik a Cauchy feladat megoldását. Ezek közül az Euler- és Runge Kutta módszereket tanuljuk:

Euler módszer: Az $y' = f(x,y)\,, \quad y(x_0) = y_0$ Cauchy feladat megoldására.

Legyen $x_n = x_0 + nh$. A Cauchy probléma ismeretlen $y = y(x)$ megoldását olyan egyenes szakaszokból álló törtvonalakkal közelítjük, melyek az (x_n, y_n) pontokat kötik össze, ahol $x_n = x_0 + nh$ és $y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)\,h$. A közelítés hibája lokálisan legfeljebb h^2 nagyságrendű. Itt lényegében kis (h hosszúságú) szakaszokon a keresett $y = y(x)$ függvényt az érintőjével helyettesítjük, hiszen $y' = f(x,y)$, és mi az (x_0, x_1) szakaszon az $y = y(x)$ helyett az érintőt, vagyis az $y = y_n + \underbrace{y'(x_0)}_{f(x_0,y_0)}(x - x_0) = y_n + f(x_0,y_0)(x - x_0)$ függvényt nevezzük.



Negyedrendű Runge-Kutta módszer:

$$y' = f(x, y) \text{ és } y(x_0) = y_0$$

Hasonló a fentiekhez, csak bonyolultabb, de ennek eredményeképpen a hiba lokálisan legfeljebb h^5 rendű.

Itt is egy olyan egyenes szakaszokból álló törött vonallal közelítjük az ismeretlen $y = y(x)$ függvényt, amely az (x_n, y_n) pontokat köti össze, ahol $x_n = x_0 + nh$, és $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, ahol

$$\begin{array}{lcl} k_1 & = & hf(x_n, y_n) \\ k_2 & = & hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 & = & hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 & = & hf(x_{n+1}, y_n + k_3) \end{array}.$$

1.9. Stabilitás

Ebben a fejezetben a független változó a $t \in \mathbf{R}$, és az ismeretlen függvény az $x = x(t)$. Ezekkel a jelölésekkel az előző fejezetben vizsgált (ott $y' = f(x, y)$), differenciálegyenlet az itteni jelöléssel $\dot{x} = f(x, t)$ alakú, ahol $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Ebben a fejezetben az $\dot{x} = f(x, t)$ diff. egyenlet speciális eseteként tekinthető, $\dot{x} = v(x)$ alakú differenciálegyenlettel foglalkozunk. Vagyis a jobb oldal csak az x-től függ, de expliciten **nem** függ a t-től (itt a t valójában az időt jelenti).

Az $\dot{x} = v(x)$ alakú egyenleteket *autonóm differenciálegyenleteknek* hívjuk. Azokat a pontokat, ahol a $v : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kétszer folytonosan differenciálható (ezt mindig feltesszük ebben a fejezetben v-ről) függvény zérus lesz, *egyensúlyi helyzeteknek* nevezzük.

21. PÉLDA: $\dot{x} = \underbrace{(a - bx)\,x}_{v(x)}$. Az egyensúlyi helyzetek az $x = 0$ és az $x = \frac{a}{b}$.
Azért nevezzük ezeket a pontokat egyensúlyi helyzetnek, mert ha az $\dot{x} = v\,(x)$ egy rendszer időbeli fejlődését írja le, és ha egy t_0 időpillanatban éppen egy olyan x_0 helyzetben van a rendszer, melyre $v\,(x_0) = 0$, akkor $\dot{x}\,(t_0) = v\,(x_0) = 0$. Tehát a változás sebessége egyenlő **nullával.** Vagyis a rendszer nem változik, tehát az x_0 helyzetben marad az idők végezetéig. Ez abból adódik, hogy az $x\,(t) \equiv x_0$ megoldása lesz az $\dot{x} = v\,(x)$, $x\,(t_0) = x_0$ Cauchy problémának, és mivel $v\,(x)$ elég sima, így az előző fejezet tétele szerint csak **egy** megoldás lehet (unicitás), tehát **nincs** más megoldás.

5. DEFINÍCIÓ: Az $x\,(t) \equiv x_0$ egyensúlyi helyzetet *Ljapunov- stabilnak* nevezzük, ha $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$, hogyha $\varphi\,(t)$ az $\dot{x} = v\,(x)$-nek egy olyan megoldása, melyre $|\varphi\,(0) - x_0| < \delta$, akkor $|\varphi\,(t) - x_0| < \varepsilon\ \forall t$-re.

Vagyis ha a kezdeti feltételt egy kicsit megváltoztatjuk, akkor az ehhez tartozó megoldás is csak egy kicsit tér el az egyensúlyi helyzettől akármilyen sok idő múlva is.

22. PÉLDA: Ebben a példában $\mathbf{x} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, tehát $\mathbf{x}\,(t)$ a sík egy pontja. Tehát $\mathbf{x}\,(t) = (x_1\,(t)\,, x_2\,(t))\,.$

$$\dot{\mathbf{x}}\,(t) = \underbrace{(-x_2\,(t)\,, x_1\,(t))}_{\mathbf{v}(\mathbf{x})=(-x_2,x_1)} \text{ és } \mathbf{x}\,(0) = (u, 0)\,,\ u \in \mathbb{R}$$

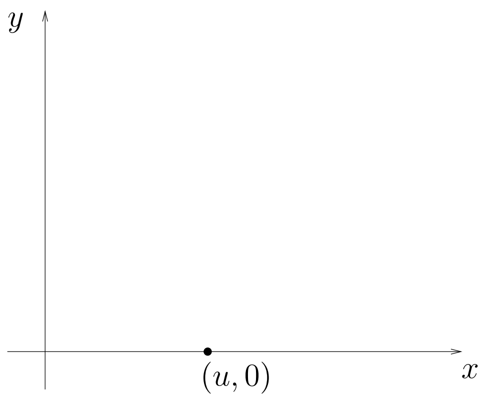
Vagyis, $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}\,(t)$ és $\mathbf{x}\,(t)$ merőlegesek egymásra és azonos hosszúak.

Ekkor az egyetlen hely ahol $\mathbf{v}\,(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (tehát az origó). Így az egyetlen egyensúlyi helyzet az $\mathbf{x}\,(t) \equiv \mathbf{0}$. A fenti Cauchy feladat megoldása:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & -x_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \ddot{x} = -x_1 \Rightarrow x_1 = a\cos t + b\sin t$$

$u = x_1\,(0) = a$, tehát $x_1 = u\cos t + b\sin t$, $-x_2 = \dot{x}_1 = -u\sin t + b\cos t$. $x_2\,(0) = u\sin 0 - b\cos 0 = 0$, így $b = 0$, vagyis $x_1 = u\cos t$. így $x_2 = -\dot{x}_1 = u\sin t$. Vagyis a Cauchy feladat megoldása:

$$\mathbf{x}\,(t) = (u\cos t, u\sin t)\,.$$



Ekkor viszont $|\mathbf{x}(t)| = u$, hiszen az $\mathbf{x}(t)$ pont mindig az origó középpontú u sugarú körön van.

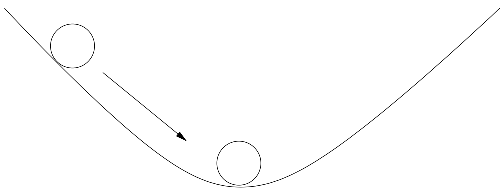
Innen adódik ,hogy az $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzet Ljapunov-stabil a definícióban szereplő δ-át választhatjuk $\delta = \varepsilon$-nak.

6. DEFINÍCIÓ: Az $x(t) \equiv x_0$ egyensúlyi helyzet *aszimptotikusan stabil, ha*

- Ljapunov-stabil **és**

- $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = x_0$ teljesül az $\dot{x} = v(x)$ minden olyan $\varphi(t)$ megoldására, melyre $\varphi(0)$ az x_0-hoz elég közel van.

23. PÉLDA: Legyen $x(t)$ egy golyó helyzete, amely az ábrán látható pohárba helyezve mozog (kicsi súrlódást feltételezünk).



Nyilván, ha a golyót a pohár legaljára tesszük, akkor az örökre ott marad, tehát ez az egyensúlyi helyzet. Ha viszont innen egy kicsit kimozdítjuk, akkor a súrlódás miatt az egyensúlyi helyzethez fog majd tartani, tehát az egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil.

24. PÉLDA: $\dot{x} = x$ itt $v(x) = x$,.

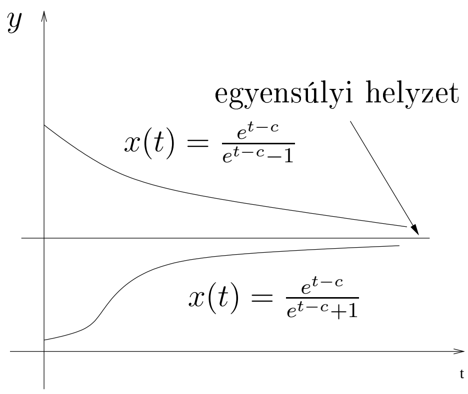
Tehát az egyetlen egyensúlyi állapot az $x \equiv 0$-ban van. A differenciálegyenlet általános megoldása: $x(t) = ce^t$. Tehát az $\dot{x} = x$, $x(0) = u$ Cauchy feladat megoldása $x(t) = ue^t$. Vagyis ha u akármilyen kicsi, de nem 0 szám, akkor amint $t \to \infty$ a $\lim\limits_{t\to\infty} ue^t = \infty$, vagyis az $x \equiv 0$ egyensúlyi helyzet Ljapunov-instabil (és így persze aszimptotikusan is instabil).

Általánosabban: az $\dot{x} = kx$ differenciálegyenlet (*normális növekedés differenciálegyenlete).* Erre is az igaz, hogy ha $k > 0$, akkor az egyetlen $x \equiv 0$ egyensúlyi állapot instabil. Az $\dot{x} = kx$ egyenlet azért is fontos, mert ha valamely faj növekedését semmi nem akadályozza (sem ragadozó, sem táplálékhiány, sem betegség), akkor ez a populáció t idő múlva ce^{kt} egyedet számlál, ami éppen a fenti differenciálegyenlet megoldása.

Ha viszont a populáció egyedeinek a *táplálékért versenyezni kell*, akkor az $\dot{x} = (a - bx)\,x$ egyenlet adja a populáció állapotát t idő múlva. A jobb oldalon az $a, b > 0$, így $(a - bx)$ szorzó az x egy csökkenő függvénye, és az egyenletben ez azt fejezi ki, hogy ha x nagyobb mint $\frac{a}{b}$, akkor túl sok egyed van az élelemhez képest, így az $\dot{x} < 0$ lesz, vagyis az egyedek száma csökken egy ideig.

Ha az $\dot{x} = (a - bx)\,x$ differenciálegyenletben az idő és az x mértékegységét átparaméterezzük, az $\dot{y} = (1 - y)\,y$ differenciálegyenlethez jutunk. Itt az egyensúlyi állapotok az $y \equiv 1$, $y \equiv 0$. Az $\dot{x} = (1 - x)\,x$ és $x(0) = u$ Cauchy feladat megoldása:

$x(t) = \frac{e^{t-c}}{e^{t-c}+1}$, ha $u < 1$ és $x(t) = \frac{e^{t-c}}{e^{t-c}-1}$, ha $u > 1$



így az ábráról látszik, hogy az $x \equiv 1$ asszimptotikusan stabil, és az $x \equiv 0$ instabil (mindkét értelemben).

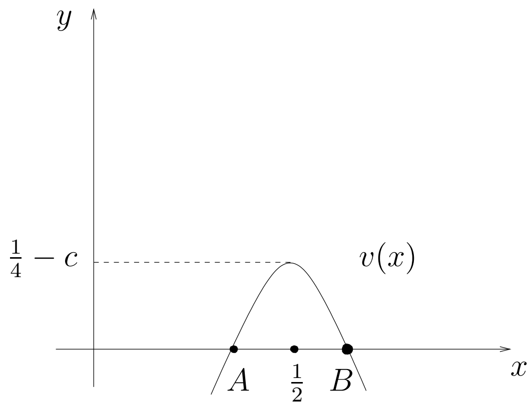
25. PÉLDA: A következő lépésben azt vizsgáljuk, hogyan alakul a populáció halak esetében egy halastóban, ha

(i) az egyedek versengenek az élelemért és

(ii) a halakat konstans c sebességgel halásszák.

$$\dot{x} = \underbrace{x(1-x)}_{\text{az élelemért folytatott versengés}} - \underbrace{c}_{\text{a halászat sebessége}}.$$

Először meg kell találni az egyensúlyi állapotokat, vagyis a $v(x) = x(1-x) - c$ függvény gyökeit. Mivel $v(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} - c$, ezért három esetet különböztetünk meg:



(a.) $c < \frac{1}{4}$ (ez van az ábrán), ekkor $v(x)$-nek két pozitív gyöke van, hiszen $c > 0$. Legyenek ezek A és B. Vagyis az A és a B az egyensúlyi állapotok.

Ha $x(0) < A$ vagy $x(0) > B$, akkor a megoldás:

$$x(t) = B + \frac{B-A}{Ke^{\sqrt{1-4c}t} - 1}, \text{ ahol } K = 1 + \frac{B-A}{x(0) - B}.$$

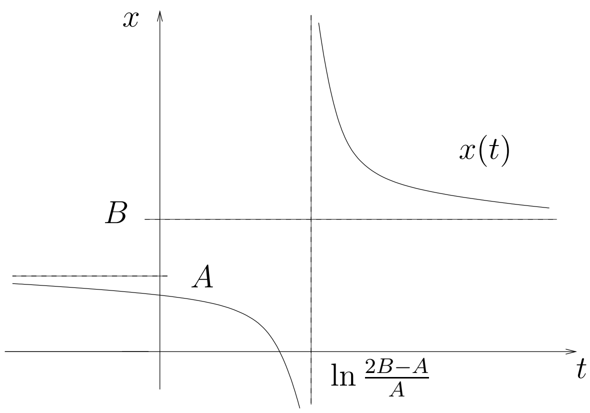
Ha $0 < x(0) < A$. Ha $B < x(0)$.

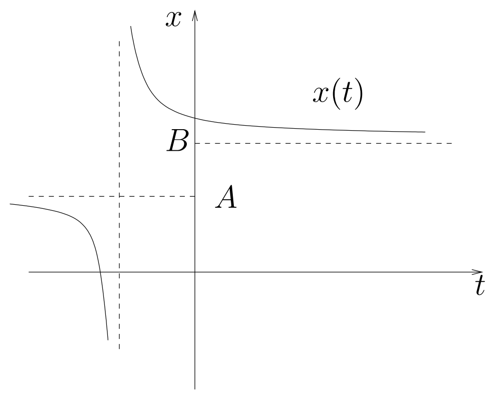
Tehát ha $x(0)$ akármilyen kicsit is kisebb mint A, akkor a populáció kihal.

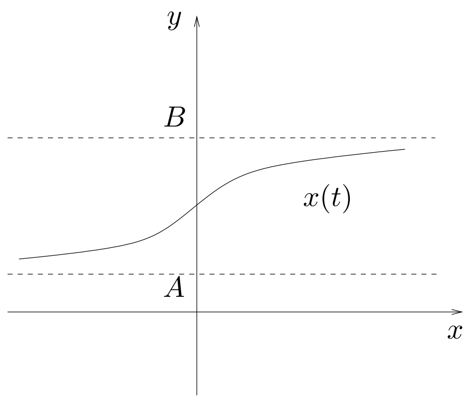
Ha $x(0) > B$, akkor $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = B$.

Ha $A < x(0) < B$, akkor $x(t) = B - \frac{B-A}{Ke^{\sqrt{1-4ct}}+1}$, ahol $K = \frac{x(0)-A}{B-x(0)}$. Vagyis:

A fenti három ábra mutatja, hogy az A instabil, a B pedig asszimptotikusan stabil.



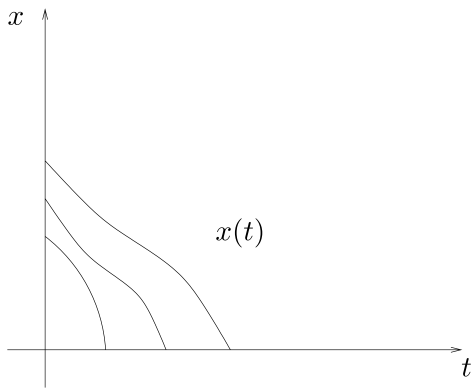




(b.) $c = \frac{1}{4}$, ekkor $A = B = \frac{1}{2}$. Ekkor a harmadik grafikon által szemléltetett eset meghal, egyébként pedig az, mint fent, vagyis az egyensúlyi állapot instabil.

(c.) $c > \frac{1}{4}$, ekkor nincs egyensúlyi állapot. A populáció véges időn belül kihal.

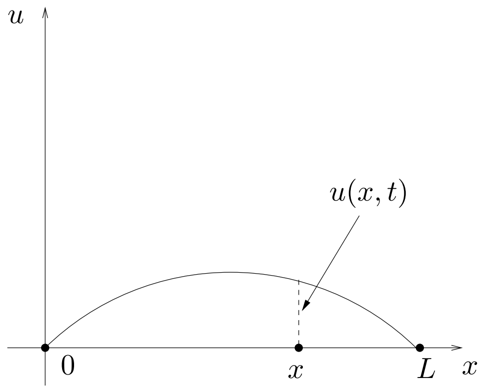
Az ábra ezt szemlélteti.



2. fejezet

Parciális differenciálegyenletek

2.1. Rezgő húr



Tekintsük az l hosszúságú tökéletesen rugalmas húrt. Helyezzük ezt a húrt az x-tengely $[0, l]$ szakaszára és mozdítsuk ki az $x-$tengelyre merőlegesen. A húr az x tengelyre merőlegesen az (x, u) síkban mozog. Azt, hogy a húr egy x abszcisszájú pontja hol van t idő múlva az $u\,(x, t)$ függvény adja meg. A rezgő húr mozgását tehát meghatároztuk, ha az $u\,(x, t)$ ismeretlen függvényt megtaláljuk.

Amint az a fizikai megfontolásokból adódik, a keresett $u\,(x, t)$ függvény kielégíti a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

másodrendű parciális differenciálegyenletet, ahol $c > 0$ egy konstans. A fenti (2.1) differenciálegyenletet a rezgő húr differenciálegyenletének hívjuk. Ahhoz, hogy ebből a húr helyzetét leíró $u(x,t)$-t megkapjuk, még tudnunk kell a húr alakját a $t = 0$ időpontban. (Fent feltettük, hogy ez az x-tengely $[0,l]$ intervalluma, de lehet helyette bármely $f(x)$ függvény is.) Továbbá szükséges még tudnunk, hogy a $t = 0$-ban a húr egyes pontjait milyen sebességgel mozdítottuk el az u tengely irányába. Vagyis a $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ differenciálegyenletnek adottak az

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{(x,0)} = g(x) \end{cases} \text{kezdeti feltételei.}$$

Egy kerületi feltétel: $u(0,t) = u(l,t) = 0$ $\forall t$-re. Fent használtuk a $\frac{\partial u}{\partial t}|_{(x,0)}$ jelölést.

7. DEFINÍCIÓ: Általában, ha F egy függvény és H az értelmezési tartományának egy (nem üres) részhalmaza, akkor $F|_H$ jelenti az F megszorítását H-ra. Vagyis $F|_H$ egy olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya H és az $F|_H$ függvény a H halmazon megegyezik az F függvénnyel. Ha például a H egy egyelemű halmaz, $H = \{P\}$, akkor az $F|_P = F(P)$.

Tehát meg kell oldani a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

differenciálegyenletet az

$$u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x) \text{ és } u(0,t) = u(l,t) = 0$$

feltételek mellett.

2.1.1. I. megoldás David Bernoullitól:

A megoldást kereshetjük $u(x,t) = X(x)T(t)$ alakban. Ekkor $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$ és $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t)$. Ezeket az egyenletbe visszaírva kapjuk, hogy $X(x)T''(t) = C^2 X''(x)T(t)$, vagyis:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha^2.$$

Ugyanis az egyenlet bal oldala csak t-től, jobb oldala csak x-től függ, amiből adódik, hogy ők ugyanazzal az állandóval egyenlők, amit fizikai okból negatívnak kell feltételeznünk. Így tehát **két** közönséges differenciálegyenletet kaptunk.

(1) $\frac{T''(t)}{T(t)} = -\alpha^2$; és (2) $c^2\frac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha^2$.

Vagyis:

(1′) $T''(t) + \alpha^2 T(t) = 0$, és (2′) $X''(x) + \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 X(x) = 0$,

$T(t) = A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t)$, és $X(x) = C\cos\left(\frac{\alpha}{C}x\right) + D\sin\left(\frac{\alpha}{C}x\right)$ az általános megoldások. Innen:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t) = \underbrace{(A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t))}_{T(t)}\underbrace{\left(C\cos\left(\frac{\alpha}{c}x\right) + D\sin\left(\frac{\alpha}{c}x\right)\right)}_{X(x)}$$

Tudjuk,hogy $u(0,t) = (A\cos\alpha t + B\sin\alpha t)\,C \equiv 0$. Innen $C = 0$, másrészt u$(l,t) \equiv 0 = (A\cos\alpha t + B\sin\alpha t)\,D\sin\left(\frac{\alpha}{c}l\right)$, így $\sin(\underbrace{\frac{\alpha}{c}l}_{k\pi}) = 0$, amiből

$$\alpha_k = \frac{kc\pi}{l}, \quad k = 1, 2, ...$$

Ebből látható, hogy

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\left[A_k\cdot\cos\left(\frac{kc\pi}{l}t\right) + B_k\cdot\sin\left(\frac{kc\pi}{l}t\right)\right]$$

Az $\{A_k\}_{k=1}$ és $\{B_k\}_{k=1}$ együtthatókat a kezdeti feltételekből, pontosabban az $f(x)$ és a $g(x)$ függvények tiszta szinuszos Fourier-sorának segítségével állíthatjuk elő. Mivel $u(x,0) = f(x)$ és $u(x,0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k\sin(\frac{k\pi}{l}x)$ így A_k az $f(x)$ függvény $[0,l]$ intervallumon vett tiszta szinuszos Fourier-sorának k-adik együtthatója. Másrészt,

$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(-A_k\alpha_k\sin\alpha_k t + B_k\alpha_k\cos\alpha_k t)\sin\left(\frac{\alpha_k}{c}x\right).$$

Helyettesítve $t = 0$-át és felhasználva, hogy $\sin(0) = 0; \cos(0) = 1$ kapjuk, hogy

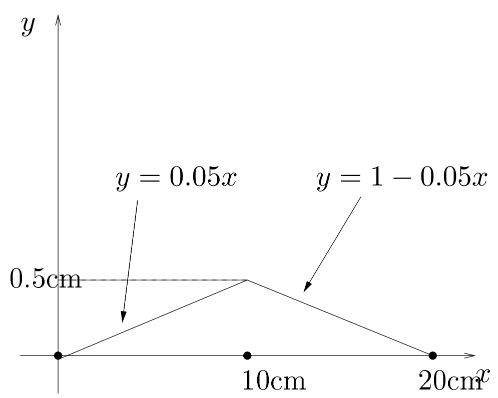
$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k B_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) = g(x).$$

Tehát meg kell határozni a $g(x)$ *függvény* tiszta szinuszos Fourier-sorát. A $[0,l]$ intervallumon legyen ez

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right).$$

A $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k B_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) = g(x)$ és a $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$ egyenletekből adódik, hogy $\alpha_k B_k = b_k$. Tehát $\mathrm{B}_k = \frac{b_k}{\alpha_k} = \frac{lb_k}{kc\pi}$.

26. PÉLDA: Legyen az $u_{tt} = c^2 u_{xx}$-ben szereplő $c = 1$. A 20 cm hosszú két végén rögzített húrt megfeszítjük úgy, ahogyan az ábra mutatja, és azután elengedjük. Határozzuk meg a húr mozgását leíró $u(x,t)$ függvényt!



Megoldás:

Mivel a húrt magára hagytuk (nem adtunk neki kezdeti sebességet), ezért a húr kezdeti sebessége 0. Tehát $g(x) \equiv 0$. Innen $\forall k \geq 1$-re $B_k = 0$, hiszen a $g(x) \equiv 0$ függvény szinuszos Fourier-sora minden b_k együtthatója 0 lesz. Az $\{A_k\}$ együtthatók kiszámolásához meg kell határozni az

$$f(x) = \begin{cases} 0,05x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 10 \\ 1 - 0,05x, & \text{ha } 10 \leq x \leq 20 \end{cases} \tag{2.2}$$

tiszta szinuszos sorfejtését!

$A_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^{20} f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx = \frac{2}{20}\int\limits_0^{10} 0,05x \sin\left(\frac{k\pi}{20}x\right) dx + \frac{2}{20}\int\limits_{10}^{20}(1-0,05x)\sin\frac{k\pi}{20}xdx = \frac{40}{(k\pi)^2}\sin\frac{k\pi}{2}$

(A hiányzó részletszámítások Sch. 328.oldalán találhatok.)

Tehát:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{40}{k^2\pi^2} \sin\frac{k\pi}{2} \cos\left(\frac{k\pi}{20}t\right) \sin\left(\frac{k\pi}{20}x\right)$$

Vagyis:

$$u(x,t) = \frac{40}{\pi^2}(\frac{1}{1^2}\cos\left(\frac{\pi}{20}t\right)\sin\left(\frac{\pi}{20}x\right) - \\ -\frac{1}{3^2}\cos\left(\frac{3\pi}{20}t\right)\sin\left(\frac{3\pi}{20}x\right) + \frac{1}{5^2}\cos\left(\frac{5\pi}{20}t\right)\sin\left(\frac{5\pi}{20}x\right) - ...)$$

2.1.2. II. megoldás D'Alambert-től

A $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ egyenletre az $u(x,0) = f(x)$; $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{(x,0)} = g(x)$; $u(0,t) = u(l,t) = 0$ feltételek mellett D'Alambert megoldása azon az észrevételen alapul, hogy ha $u_1, u_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kétszer differenciálható tetszőleges függvények, akkor az

$$u(x,t) = u_1(x+ct) + u_2(x-ct)$$

mindig kielégíti a rezgő húr $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial u}{\partial x^2}$ parciális differenciálegyenletét.

Ugyanis: ha $u(x,t) = u_1(x+ct) + u_2(x-ct)$, akkor $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{(x,t)} = cu_1'(x+ct) - cu_2'(x-ct)$. Továbbá

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\big|_{(x,t)} = c^2 u_1''(x+ct) + c^2 u_2''(x-ct)$$

Másrészt: $\frac{\partial u}{\partial x} = u_1'(x+ct) + u_2'(x-ct)$ és

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_1''(x+ct) + u_2''(x-ct)$$

A fenti két egyenletből adódik:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{(x,t)} = c^2\left[u_1''(x+ct) + u_2''(x-ct)\right] = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(x,t)}$$

Ekkor tehát a feltételekből kell meghatároznunk az $u_{1,}$ u_2 függvényeket.

Megoldás: Az $u(x,0) = f(x)$ és $u_t(x,0) = g(x)$ kezdeti feltételek esetén az

$$u(x,t) = u_1(x+ct) + u_2(x-ct)$$

egyenletbe $t = 0$-t írva $u(x,0) = u_1(x) + u_2(x)$.

Ha az

$$u(x,t) = u_1(x+ct) + u_2(x-ct)$$

kifejezést t szerint deriváljuk, majd $t = 0$-t helyettesítünk, akkor

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{(x,0)} = cu_1'(x) - cu_2'(x).$$

Tehát kapjuk, hogy

$$f(x) = u(x,0) = u_1(x) + u_2(x) \text{ és } g(x) = u_t(x,0) = c\left(u_1'(x) - u_2'(x)\right)$$

így

$$\left\{\begin{array}{c} u_1'(x) + u_2'(x) = f'(x) \\ u_1'(x) - u_2'(x) = \frac{g(x)}{c} \end{array}\right\}$$

egy közönséges differenciálegyenlet rendszer, melynek megoldását tanultuk (1.6. fejezet).

Alkalmazva a tanult módszert adódik, hogy

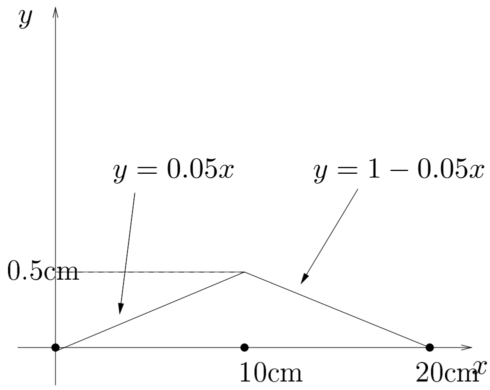
$$\left\{\begin{array}{c} u_1(s) = \frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2c}\int\limits_0^s g(\tau)\,d\tau + A \\ u_2(s) = \frac{1}{2}f(s) - \frac{1}{2c}\int\limits_0^s g(\tau)\,d\tau + B \end{array}\right\}$$

Ebből kapjuk, hogy $A + B = 0$ kell legyen. Így tehát:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_1(x+ct) + u_2(x-ct) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \\ & \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

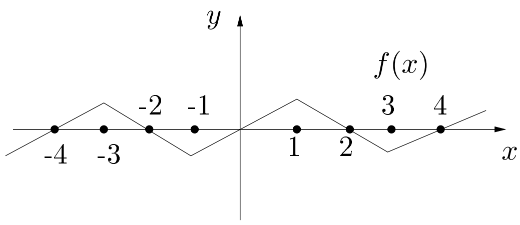
Vegyük észre, hogy ebben a levezetésben *nem* használtuk azt a kerületi feltételt, hogy $u(0,t) = u(l,t) = 0$, tehát a fenti levezetés "végtelen hosszú" húr esetén is működik.

27. PÉLDA: Tekintsük megint az előző példát, és oldjuk meg D'Alambert módszerével. A húr kezdeti alakját az ábra mutatja. Elengedve a húrt adjuk meg a húr mozgását leíró $u(x,t)$ függvényt.



Megoldás:

$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+t) + f(x-t)\right]$, ahol $f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 0.05x & \text{ha} & 0 \le x \le 10 \\ 1 - 0,05x & \text{ha} & 10 \le x \le 20 \end{array} \right\}$-nek a kiterjesztése a számegyenesre:



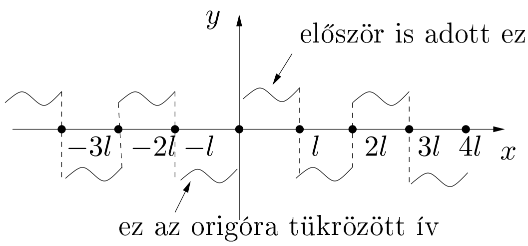
Tehát azt, hogy 10 időegység múlva az $x = 2$ cm-ben mi lesz a húr kitérése úgy határozzuk meg, hogy:

$$\begin{aligned} u(2,10) &= \frac{1}{2}\left[f(12) - f(-8)\right] = \frac{1}{2}\left[\underbrace{1 - 0.05 \cdot 12}_{f(12)} - \left(\underbrace{-0,05 \cdot 8}_{f(-8)}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + 0,4 - 0,6\right] = 0,4 \end{aligned}$$

2.1.3. A Bernoulli és a D'Alambert-féle módszerek összehasonlítása

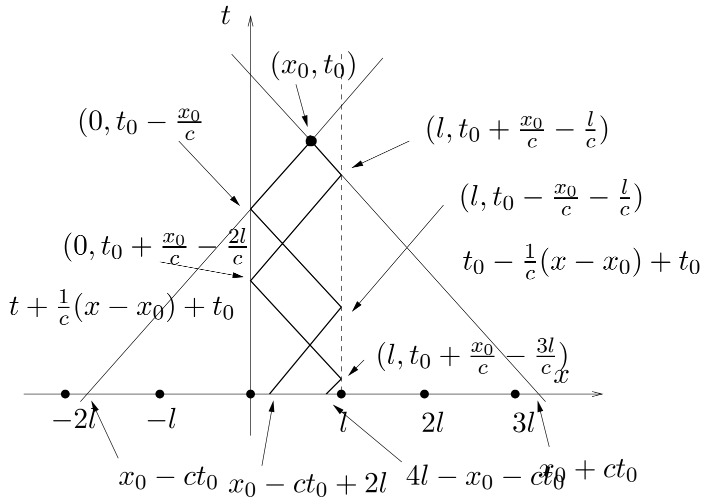
A Bernoulli-féle módszernél mind a *kezdeti feltételeket:* $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, mind a *kerületi feltételeket:* $u(0,t) = u(l,t) \equiv 0$ felhasználtuk. A *D'Alambert-féle módszernél* az $u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)\, d\tau$ megoldást kaptuk pusztán a kezdeti feltételek figyelembevételével. Hogy a megoldás a kerületi feltételeknek is eleget tegyen az f és a g függvények értelmezését ki kell terjeszteni a $[0,l]$-ről $\mathbf{R}$-be a következő képen:

Adott a grafikonon látható függvény, melynek a $[0,l]$ intervallumhoz tartozó darabját az origóra tükrözzük. Az így kapott $[-l,l]$-en értelmezett függvényt $2l$ szerint periodikusan kiterjesztjük a számegyenesre.

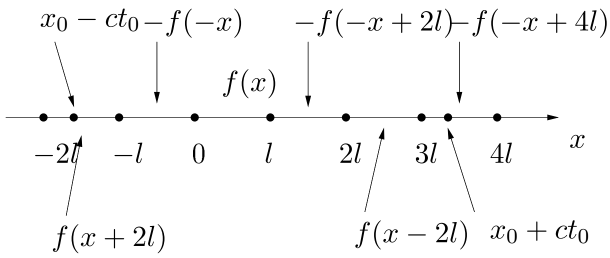


A D'Alambert módszerrel kapott megoldás működik végtelen hosszú húr esetén, amikor természetesen nincs az $u(0,t) = u(l,t) \equiv 0$ kerületi feltétel, és az f, g függvények az egész számegyenesen adottak.

A D'Alambert formula egy bonyolult formulát ad, amely tartalmazza a hullámok össze-vissza verődését mind a két határnál ($x = 0$ és $x = l$)-nél. Válasszunk egy konkrét (x_0, t_0) pontot, amely az ábrán a $t = -\frac{1}{c}(x - x_0) + t_0$ és a $t = \frac{1}{c}(x - x_0) + t_0$ egyeneseken fekszik.



Ez azért fontos, mert az $x + ct = const_1$ és az $x - ct = const_2$ alakú függvények egyenesek. Először azt szeretnénk tudni, hogy mivel egyenlő $f\left(x_0 + ct_0\right)$. Ez abból adódik, hogy:



Tehát $f\left(x_0 + ct_0\right) = -f\left(4l - x_0 - ct_0\right)$ és ugyanígy $f\left(x_0 - ct_0\right) = f\left(x_0 - ct_0 + 2l\right)$.

(A $4l - x_0 - ct_0$ és az $x_0 - ct_0 + 2l$ argumentumok már a $[0, l]$-ből vannak.)

Tehát

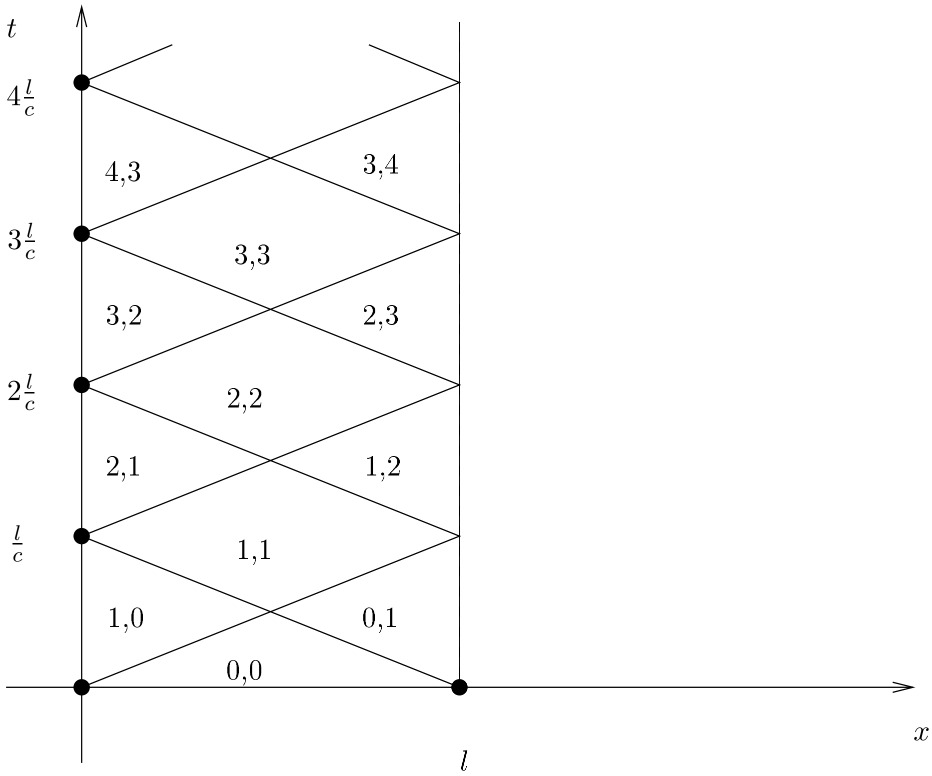
$$
\begin{aligned}
u\left(x_0,t_0\right) &= \frac{1}{2}f\left(x_0-ct_0+2l\right)-\frac{1}{2}f\left(4l-x_0-ct_0\right)\\
&+\frac{1}{2c}\left[\int\limits_{x-ct}^{-l} g\left(y+2l\right)dy+\underbrace{\int\limits_{-l}^{0}-g\left(-y\right)dy+\int\limits_{0}^{l} g\left(y\right)dy}_{0}\right.\\
&\left.+\underbrace{\int\limits_{l}^{2l}-g\left(-y+2l\right)dy+\int\limits_{2l}^{3l} g\left(y-2l\right)dy}_{0}+\int\limits_{3l}^{x+ct}-g\left(-y+4l\right)dy\right]
\end{aligned}
$$

Kihasználva, hogy $\int\limits_{x-ct} g\left(y+2l\right)dy=\int\limits_{2l+x-ct} g\left(s\right)ds$ és $\int\limits_{3l}^{x+ct}-g\left(-y+4l\right)dy=$ $\left[\begin{array}{llll} s=-y+4l, & y & 3l & x_0+ct_0\\ ds=-dy, & s & l & 4l-x_0-ct_0\end{array}\right]=\int\limits_{l}^{4l-x_0-ct_0} g\left(s\right)ds.$

Tehát

$$
\begin{aligned}
u\left(x_0,t_0\right) &= \frac{1}{2}\left(f\left(x_0-ct_0+2l\right)-f\left(4l-x_0-ct_0\right)\right)+\\
&+\frac{1}{2c}\left[\int\limits_{2l+x_0-ct_0}^{l} g\left(s\right)ds+\int\limits_{l}^{4l-x_0-ct_0} g\left(s\right)ds\right]\\
&= \frac{1}{2}\left(f\left(x_0-ct_0+2l\right)-f\left(4l-x_0-ct_0\right)\right)+\frac{1}{2c}\left[\int\limits_{2l+x_0-ct_0}^{4l-x_0-ct_0} g\left(s\right)ds\right].
\end{aligned}
$$

Ez azért hasznos, mert $\left(x_0-ct_0+2l\right)$, $\left(4l-x_0-ct_0\right)$, $\left(4l-x_0-ct_0\right)$ és $\left(2l+x_0-ct_0\right)$ a $[0,l]$ intervallumból vannak. Nagyon fontos, hogy ez a formula arra a partikuláris $\left(x_0,t_0\right)$-ra vonatkozik, amelyet a legutolsó ábra mutat. Attól függően, hogy hány "visszaverődéssel" juthatunk egy (x,t) pontból a $[0,l]$ intervallumra, felosztjuk a $\{(x,y):0\le x\le l,0\le y\}$ sávot $\left.\begin{array}{l} x+ct=kl\\ x-ct=kl\end{array}\right\}$ alakú egyenesekre.



Az előző feladat (x_0, t_0) pontja a satírozott $(2,3)$ tartományban volt, mert az $x - ct = kl$ egyenesek irányában **kettő**, az $x + ct = kl$ egyenesek irányában **három** tükröződése van. Tehát ezen $(2,3)$ tartományban lévő bármely más (x,t)-re az $u(x,t)$ is az $\frac{1}{2}(f(x_0 - ct_0 + 2l) - f(4l - x_0 - ct_0)) + \frac{1}{2c}\left[\int\limits_{2l+x_0-ct_0}^{4l-x_0-ct_0} g(s)\,ds\right]$ explicit formulával számolható, de más tartományokban az explicit formula különböző lesz.

Ezzel befejeztük az $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$ kezdeti és $u(0,t) = u(l,t) \equiv 0$ kerületi feltételű egyenlet vizsgálatát.

2.1.4. Végtelen hosszú húr esete

Mostantól az $u(0,t) = u(l,t) \equiv 0$ kerületi feltételt elhagyjuk. Marad az a *végtelen hosszú húr esete*, vagy úgy is felfoghatjuk, hogy a hullám egyenlete. $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

Mint korábban a D'Alambert módszernél láttuk, ennek megoldása:

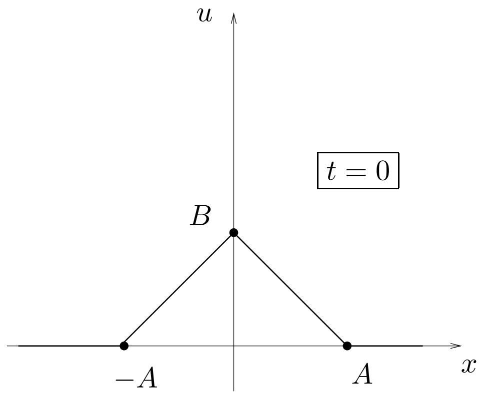
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

28. PÉLDA: Ha $f(x) \equiv 0$ és $\mathrm{g}(x) = \cos x$, akkor

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\left(\sin(x+ct) - \sin(x-ct)\right) = \frac{1}{c}\cos x \sin ct.$$

(Használtuk a $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$ összefüggést.)

29. PÉLDA: Tekintsünk egy végtelen hosszú húrt, amelyet három ujjunkkal lefogunk a $(-a,0)\,;\ (a,0)\,;\ (0,b)$ pontokban, majd elengedjük. írjuk fel a húr mozgását leíró $u(x,t)$ függvényt.

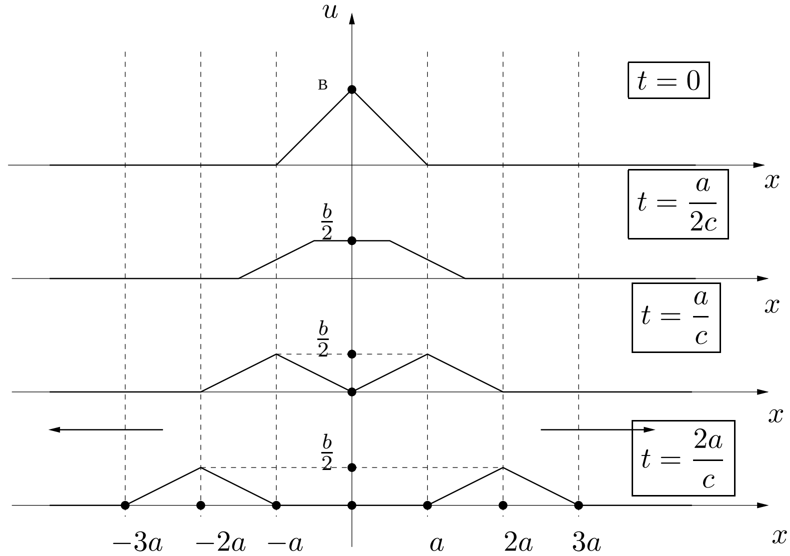


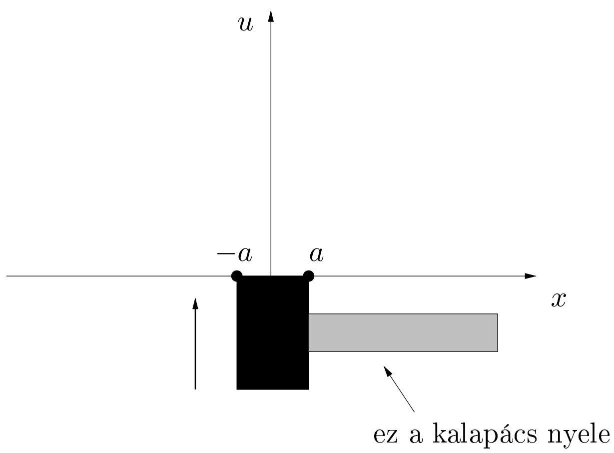
Megoldás: Ekkor $f(x) = \begin{cases} b - \frac{b|x|}{a} & ha\ |x| \le a \\ 0 & ha\ |x| > a \end{cases}$ és $g(x) \equiv 0$, hiszen a húrt magára hagytuk. A keresett $u(x,t)$ függvény:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right],$$

melyet a 2.1.4 ábrák szemléltetnek:

30. PÉLDA: Kalapácsütés:





A húr az x tengelyen fekszik, és képzeletben rávágunk egyet a kalapáccsal. Az ütés középpontja az $x = 0$. A kalapácsütés a $t = 0$-ban az $|x| < a$ pontoknak $g(x) = 1$ sebességet ad, a többi pontnak nem ad sebességet. Írjuk fel a húr alakját leíró $u(x,t)$ függvényt!

Megoldás:

$$f(x) \equiv 0;\; g(x) = \begin{cases} 1, & ha\ |x| < a \\ 0, & ha\ |x| \geq a \end{cases} .$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds = \frac{1}{2c} \left\{ \text{hossza az: } (x - ct, x + ct) \cap (-a, a) \text{-nak} \right\} .$$

Ekkor

$$u\left(x, \frac{a}{2c}\right) = \frac{1}{2c}\left\{\text{hossza az: } \left(x - \frac{a}{2}, x + \frac{a}{2}\right) \cap (-a, a) \text{-intervallumnak}\right\}.$$

Ez különböző $|x| < \frac{a}{2}$-re; $\frac{a}{2} < x < \frac{3a}{2}$-re és $x > \frac{3a}{2}$.

A hullámegyenlet megoldásának

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds$$

alakjából látszik, hogy az $(x_0, 0)$ beli kezdeti feltétel hatása c sebességgel, vagy legfeljebb c sebességgel terjed.

2.2. Hővezetés egyenlete

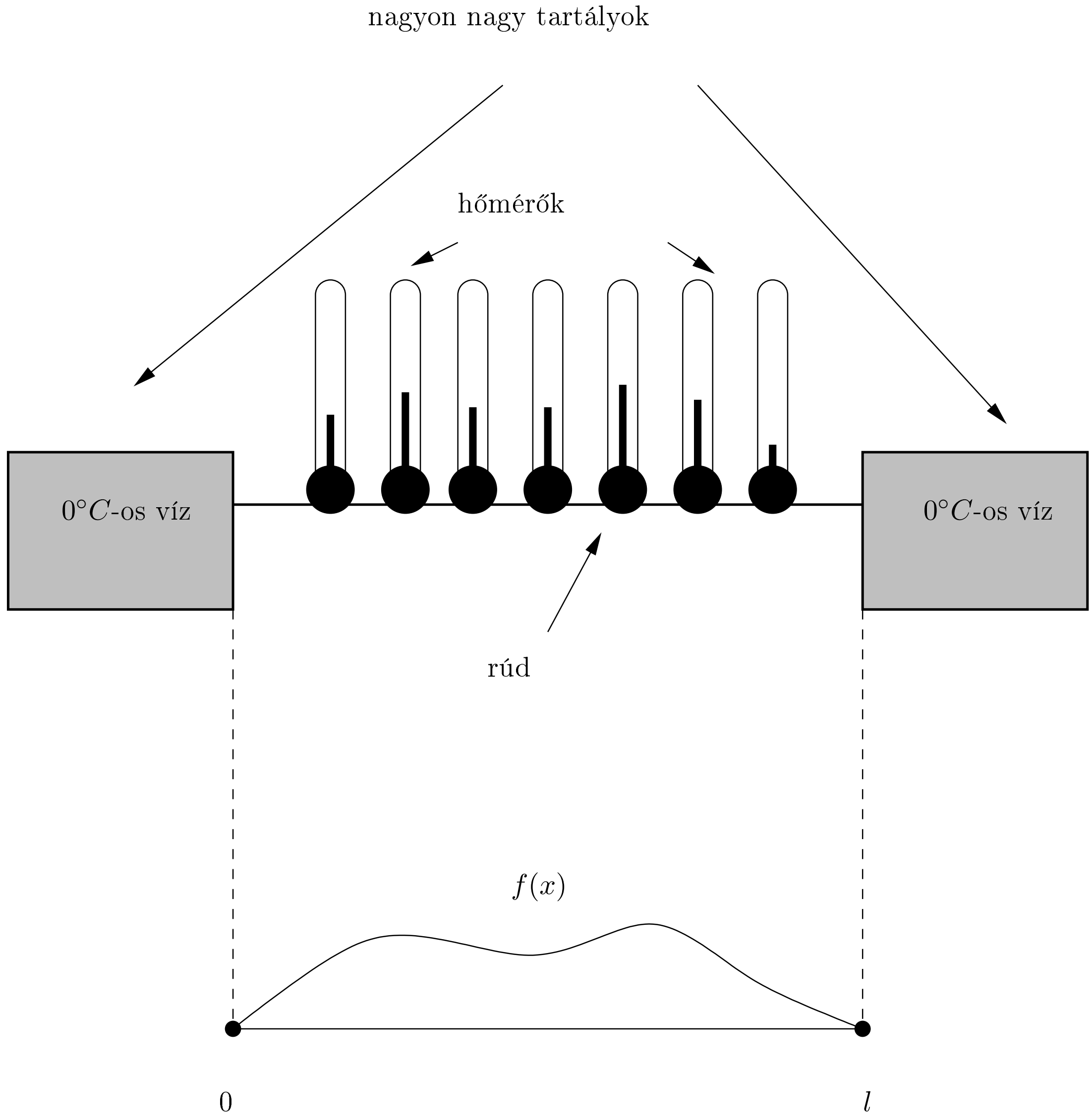
2.2.1. Hővezetés véges hosszúságú rúdban

Képzeljünk el egy rudat, melynek mindkét végét 0^0C-os vízzel telt hatalmas tartályokba tették. A rúd hossza l. Úgy képzeljük, hogy a rúd az x tengelyen van, és bal végpontja a *zérus* pont.

A rúd kezdeti hőmérsékletét az $f(x)$ függvény adja meg. Adjuk meg az $u(x,t)$ függvényt, amely a rúd hőmérsékletét írja le az x pontban t idő múlva. A kezdeti hőmérsékletet $t = 0$-ban a 2.2.1. ábra mutatja. Mivel a hő a melegebb helyről áramlik a hidegebb felé, ezért az ábra által szemléltetett állapot az idő múlásával változik. Egy adott x pontban a rúdnak néha magasabb, néha alacsonyabb a hőmérséklete az idő előrehaladásával. Hogy egy adott x pontban t idő mulva mért $u(x,t)$ hőmérsékletet meghatározhassuk, fel kell használni azt a Fouriertől származó észrevételt, hogy a hőterjedést az

$$u_t = k u_{xx}, \quad (0 < x < l; 0 < t)$$

másodrendű parciális differenciálegyenlet írja le. (Ennek levezetését megtalálhatjuk Simonyi Károly: A fizika kultúrtörténete című könyvében.) A *kezdeti feltétel* a rúd hőmérséklete a $t = 0$-ban, vagyis $u(x,0) = f(x)$. A *kerületi feltétel* pedig abból adódik, hogy a rúd két vége olyan nagy 0^0C-os vizet tartalmazó tartályokban van, melyeket a rúdból áramló hő nem tud



felmelegíteni. (Ezért kell, hogy a tartályok nagyon nagyok legyenek.) Tehát a *kerületi feltétel:* $u(0,t) = u(l,t) \equiv 0$. Vagyis:

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & 0 < x < l, 0 < t \\ u(0,t) = u(l,t) \equiv 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Ezt a problémát is a Fourier-sorok használatával oldjuk meg. (A hővezetés elméletét Fourier alkotta meg, és a róla elnevezett sorokat pontosan ezen probléma megoldása céljából vezette be 1822-ben.)

Megoldás: Az ismeretlen $u(x,t)$ függvényt, csakúgy mint a rezgő húr esetén

$$u\left(x,t\right)=X\left(x\right)T\left(t\right)$$

alakban keressük. A levezetés követi a rezgő húr differenciálegyenletének levezetésénél alkalmazott lépéseket. Vagyis:

$$\frac{T'}{kT}=\frac{X''}{X}=-\lambda=\text{konstans}.$$

Innen:

$$T'=-\lambda kT\Rightarrow T\left(t\right)=Ae^{-\lambda kT}.$$

Továbbá:

$$-X''\left(x\right)=\lambda X\left(x\right),\quad 0<x<l$$

-re és $X\left(0\right)=X\left(l\right)=0$. Ez pontosan az a probléma, mint ami a rezgő húr esetén fordult elő. Amint ott láttuk, ennek megoldása:

$$X\left(x\right)=\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Tehát

$$u\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2kt}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

feltéve, hogy

$$f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

az $f\left(x\right)$ függvény tiszta szinuszos Fourier-sora. Az

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t=ku_{xx}, & \left(0<x<l,0<t\right)\\ u\left(0,t\right)=u\left(l,t\right)\equiv 0 & \\ u\left(x,0\right)=f\left(x\right) & \end{array}\right\}$$

problémát tehát úgy oldjuk meg, hogy az $f\left(x\right)$ függvényt tiszta szinuszos Fourier-sorba fejtjük a $[0,l]$-en. (Ezt már gyakoroltuk a rezgő húr esetén.) Innen nyerjük az $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ együtthatókat, majd ezek segítségével felírjuk az $u\left(x,t\right)$ képletét az $\{A_n\}$-nek értékeinek behelyettesítésével az

$$u\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2kt}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

összefüggésbe.

A $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ számokat *sajátértékeknek* az $X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ függvényeket pedig *saját függvényeknek* hívjuk. Az ok erre az, hogy ha A egy az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$-be képező kétszer folytonosan differenciálható függvényeken értelmezett ún. operátor, melyre

$$Ag = -g'',$$

akkor ezzel a jelöléssel

$$AX_n = \lambda_n X_n.$$

Vegyük észre, hogy A-nak végtelen sok sajátértéke van:

$$\frac{\pi^2}{l^2}; \frac{4\pi^2}{l^2}; \frac{9\pi^2}{l^2}; \ldots.$$

Be lehet látni, hogy A-nak **csak** ezek a sajátértékei.

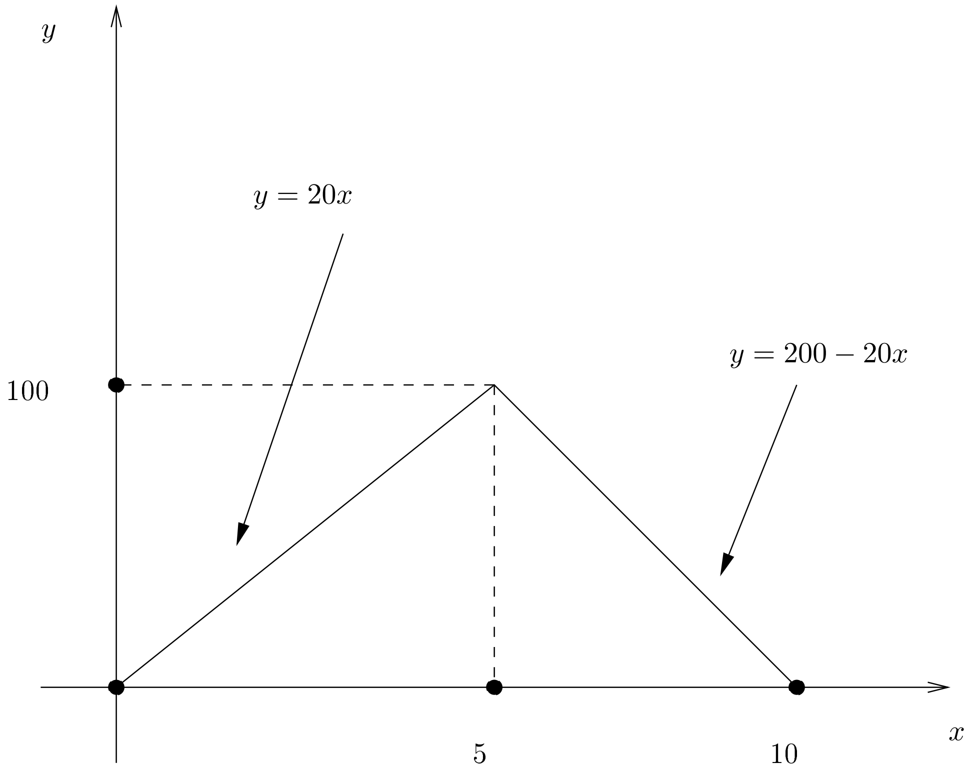
31. PÉLDA: Oldjuk meg a $\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & (0 < x < l, 0 < t) \\ u(t,0) = u(l,t) \equiv 0 & \\ u(x,0) = f(x) & \end{cases}$ feladatot, ha $l = 10$ és $f(x) = \begin{cases} 20x & ha\ 0 \le x \le 5 \\ 200 - 20x & ha\ 5 \le x \le 10 \end{cases}$

(l.2.2.1. ábra.)
Legyen $k = 1$. Vagyis $t = 0$-ban a rúd közepén a hőmérséklet 100^0C-os, és a vége felé lineárisan csökken 0-hoz.
Megoldás: Tiszta szinuszos Fourier-sorba kell fejteni az $f(x)$ függvényt. Vagyis meg kell találni az $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ értékeket, melyekre $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l}$ $(0 \le x \le l)$. A korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy $A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$.

$$A_n = \frac{1}{5}\int_0^5 20x\sin\frac{n\pi}{10}xdx + \frac{1}{5}\int_5^5 (200 - 20x)\sin\frac{n\pi}{10}xdx =$$

$$= -200\frac{-2\sin(\frac{n\pi}{2}) + n\pi\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2} + 200\frac{-2\sin(n\pi) + n\pi\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 2\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2\pi^2} =$$

$$= \frac{800}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{2}). \quad (2.3)$$



Mivel $\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & ha\ n = 4k \\ 1, & ha\ n = 4k+1 \\ 0, & ha\ n = 4k+2 \\ -1, & ha\ n = 4k+3 \end{cases}$, így

$f(x) = \frac{800}{\pi^2}\left[\frac{\sin\frac{x\pi}{10}}{1^2} - \frac{\sin(\frac{x\pi}{10}3)}{3^2} + \frac{\sin(\frac{x\pi}{10}5)}{5^2} - \frac{\sin(\frac{x\pi}{10}7)}{7^2} + \cdots\right].$

Használva az

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

összefüggést kapjuk:

$$u(x,t) = \frac{800}{\pi^2}\left[\frac{e^{-(\frac{\pi}{10})^2 t}\sin\frac{x\pi}{10}}{1^2} - \frac{e^{-\left(\frac{3\pi}{10}\right)^2 t}\sin(\frac{x\pi}{10}3)}{3^2} + \frac{e^{-\left(\frac{5\pi}{10}\right)^2 t}\sin(\frac{x\pi}{10}5)}{5^2} - \cdots\right]$$

2.2.2. Fourier- transzformált

A következő probléma megoldásához a Fourier-transzformáltat használjuk, ezért összefoglaljuk annak definícióját, és egyes tulajdonságait.

Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, amely folytonos (ez nem szükséges, csak azért tesszük fel, mert Lebesgue integrált még nem használtunk), továbbá $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$. Az $f(x)$ *Fourier-transzformáltja:*

$$F[f](\lambda) = g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\lambda t} dt.$$

Emlékeztetünk, hogy i az imaginárius egység ($i^2 = -1$).

1. Belátható, hogy $g(\lambda)$ korlátos és folytonos az $\mathbf{R}$-en, és $\lim\limits_{|\lambda| \to \infty} g(\lambda) = 0$.

2. Ha f' folytonos, és $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, dx < \infty$, akkor $F[f'](\lambda) = i\lambda F[f](\lambda)$, és így $\forall n$-re $F\left[f^{(n)}\right](\lambda) = (i\lambda)^n F[f](\lambda)$ teljesül, ha $f^{(n)}$ folytonos, és $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x)\, dx < \infty$.

2.2.3. Hővezetés végtelen hosszú rúdban

Az egyszerűség miatt legyen $k = 1$ a hővezetés $u_t' = k u_{xx}''$, egyenletében. Így a következő problémát vizsgáljuk:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t' = u"_{xx} & -\infty < x < \infty \text{ és } t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) & . \end{array} \right\}$$

Tegyük fel, hogy $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|\, dx$; és $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f''(x)|\, dx$ improprius integrálok mind léteznek. $(f \in C^2(\mathbf{R}))$. A feladat megoldását azon $u(x,t)$ függvények körében keressük, melyekre $u \in C^2$ (vagyis kétszer folytonosan differenciálható) és

(i) $\forall x \in \mathbf{R}$-re $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|\, dx$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u_x'(x,t)|\, dx$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|u_{xx}^{"}(x,t)\right| dx < \infty$.

(ii) Az $u_t(x,t)$ függvénynek minden $[0,r]$ intervallumon van egy (t-től független) integrálható majoránsa $g(x)$ azaz $|u_t(x,t)| \leq g(x)$ és $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx < \infty$.

Megoldás:
Vegyük az $u_t' = u_{xx}''$ mindkét oldalának x-szerinti Fourier-transzformáltját: $v(\lambda,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,e^{-i\lambda x}dx = F[u]$. Ezzel

$$F[u_t'] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)\,e^{-i\lambda x}dx = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,e^{-i\lambda x}dx = v_t'(\lambda,t),$$

ehhez kellett a fenti (ii) feltétel az $u(x,t)$-re. Mivel $F[u_{xx}''] = -\lambda^2 v(\lambda,t)$, így kapjuk $\forall\lambda$-ra a t változót tartalmazó *közönséges differenciálegyenletet*:

$$\left.\begin{array}{r} v_t'(\lambda,t) = -\lambda^2 v(\lambda,t) \\ v(\lambda,0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\lambda x}dx \end{array}\right\}, \text{ melyre ez egy } \textit{Cauchy feladat.}$$

Ennek a t változóra vett Cauchy feladatnak a megoldása:

$$v(\lambda,t) = e^{-\lambda^2 t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\lambda x}dx = e^{-\lambda^2 t}F[f](\lambda).$$

Előző tanulmányainkból tudjuk, hogy $F\left[e^{-ax^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}$. Az $a = \frac{1}{4a}$ helyettesítéssel kapjuk a következőt:

$$F\left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\right](\lambda) = e^{-\lambda^2 t}.$$

Ezt felhasználva a $v(\lambda,t) = e^{-\lambda^2 t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\lambda x}dx = e^{-\lambda^2 t}F[f](\lambda)$ számolásánál adódik a következő:

$$F[u](\lambda) = v(\lambda,t) = F\left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\right](\lambda)\,F[f](\lambda) = F\left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} * f(x)\right],$$

(ahol a *konvolúció* $[h * g](x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(u)\, g(x-u)\, du$.)

Tehát
$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} f(x-v)\, dv.$$

Tehát a Fourier-transzformált segítségével a parciális differenciálegyenlet megoldását közönséges differenciálegyenlet megoldására vezettük vissza.

3. fejezet

Differenciálgeometria

3.1. Görbék a térben

Szemléletesen: egyszerű görbeív egy meghajlított drótdarab. Pontosabban:

8. DEFINÍCIÓ: : Az $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ differenciálható függvény **értékkészletét** egyszerű görbének nevezzük, ha a következők teljesülnek:

(a) $\mathbf{r}$ *egy-egy értelmű*, vagyis $t_1 \neq t_2$-re $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$;

(b) Az $\mathbf{r}$ *inverze folytonos*;

(c) $\dot{\mathbf{r}} \neq \mathbf{0}$.

Ekkor az $\mathbf{r}$ a görbe egy paraméterezése.

Fontos megállapodások és jelölések:

(i) $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) + \mathbf{k}z(t)$

(ii) Mindig feltesszük, hogy az $\mathbf{r}(t)$ komponens függvényei: $x(t), y(t), z(t)$ legalább *háromszor* (de legtöbbször *végtelenszer*) differenciálhatók.

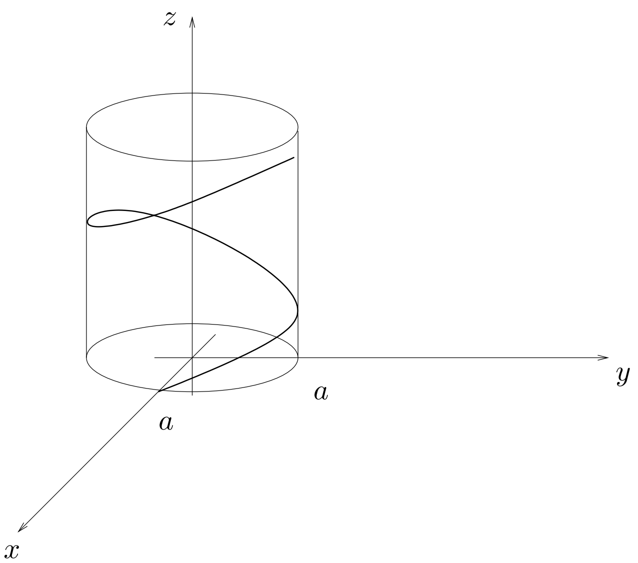
(iii) Az $[a, b]$ egy *véges* vagy *végtelen* intervallum.

32. PÉLDA: :

(a) A legegyszerűbb görbe az *egyenes,* melyet meghatároz egy pontja, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, és egy irányvektora, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Mint azt már tudjuk (matematika, B2), az egyenes egy paraméterezése:

$$\mathbf{r}(t) = \left(\underbrace{x_0 + tv_1}_{x(t)}, \underbrace{y_0 + tv_2}_{y(t)}, \underbrace{z_0 + tv_3}_{z(t)}\right)$$

(b) *Csavarvonal:* Tekintsük a z tengelyű és a alapsugarú egyenes körhengert.



Ezen henger felületén elhelyezkedő $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, ct)$, ahol $0 \leq t$, $0 < a$, $0 < c$ görbét *csavarvonalnak* nevezzük.

(c) *Hosszúsági és szélességi körök:*

Korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy az R sugarú gömb felületének pontjait meg lehet paraméterezni a következőképpen:

Legyen P az R sugarú gömbfelület egy pontja, továbbá legyen P_0 a P pontnak az xy síkra való vetülete. Legyen Ψ az OP félegyenes és a z tengely szöge $(0 \leq \Psi \leq \pi)$, és legyen φ az OP_0 félegyenes és az x tengely szöge $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$. Ekkor ha $P = (x_0, y_0, z_0)$ kapjuk, hogy $z_0 = R\cos\Psi$. Továbbá $\left\{\begin{array}{c} y_0 = R\sin\Psi\sin\varphi \\ x_0 = R\sin\Psi\cos\varphi \end{array}\right\}$.

Vagyis a gömbfelület egy paraméterezése:
$\mathbf{r}(\varphi,\Psi)=(R\sin\Psi\cos\varphi,R\sin\Psi\sin\varphi,R\cos\Psi)\,.$

A *hosszúsági (fél)köröket* akkor kapjuk, ha φ-t lerögzítjük, és Ψ-t tekintjük paraméternek $(0\le\Psi\le\pi)$.

A *szélességi köröket* úgy kapjuk, ha Ψ-t rögzítjük, és φ-t tekintjük paraméternek $(0\le\varphi\le 2\pi)$. Vagyis az R sugarú gömbfelület egy (φ_0,Ψ_0) paraméterhez tartozó P_0 pontján áthaladó *hosszúsági félkör*:

$$\mathbf{r}(\Psi)=(R\sin\Psi\cos\varphi_0,R\sin\Psi\sin\varphi_0,R\cos\Psi)\,.$$

a P_0-on áthaladó *szélességi kör:*

$$\mathbf{r}(\varphi)=(R\sin\Psi_0\cos\varphi,R\sin\Psi_0\sin\varphi,R\cos\Psi_0)\,.$$

Egy konkrét esetben:

Írjuk fel az $R=4$ sugarú gömb $P_0=\left(\sqrt{6},\sqrt{6},2\right)$ pontján áthaladó hosszúsági és szélességi köröket!

Mivel $0\le\Psi\le\pi$ és $4\cos\Psi_0=2$, így $\Psi_0=\frac{\pi}{3}$. Tehát $\sin\Psi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, így $4\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi_0=\sqrt{6}$ és $4\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi_0=\sqrt{6}$. Ezért $\varphi_0=\frac{\pi}{4}$, tehát a P_0 pont a $\varphi_0=\frac{\pi}{4}$ és a $\Psi_0=\frac{\pi}{3}$ paraméterhez tartozik. Így a *hosszúsági félkör:*

$$\mathbf{r}(\Psi)=\left(4\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\Psi,4\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\Psi,4\cos\Psi\right),\quad(0\le\Psi\le\pi)\,,$$

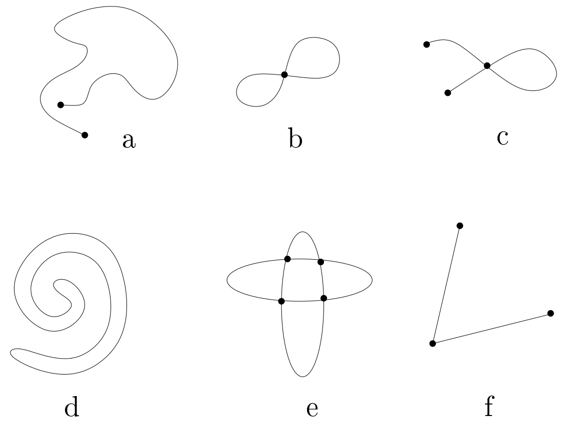
a *szélességi kör:*

$$\mathbf{r}(\varphi)=\left(4\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi,4\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi,4\frac{1}{2}\right),\quad(0\le\varphi\le 2\pi)$$

A szélességi kör nyilván **nem** egyszerű görbeív, mert $\mathbf{r}(0)=\mathbf{r}(2\pi)$, de ha a paraméter intervallumot a $[0,2\pi]$ valamely zárt részintervallumaként választjuk, akkor egyszerű görbét kapunk.

9. DEFINÍCIÓ: Egy térbeli összefüggő ponthalmazt *differenciálható görbének* nevezünk, ha minden pontjának létezik környezete, melyben a halmaz egyszerű görbeív.

10. DEFINÍCIÓ: Egy differenciálható görbét *zártnak* nevezünk, ha a kezdő és végpontja megegyezik. (Pl. egy kör vagy ellipszis.)

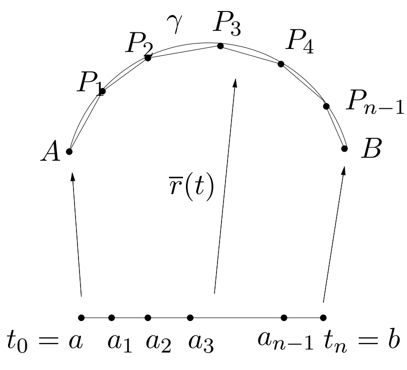


33. PÉLDA: Az alábbiak közül melyek a differenciálható görbék?

Válasz: a., és d. A d., egy zárt differenciálható görbe. A b., esetében a B, a c., esetben a C és az e., esetben az ábrán jelölt pontoknak **nincs** olyan környezete, amelyben a halmaz egyszerű görbeív. Az f., a csúcs pontban -ben **nem** differenciálható.

<u>**Ívhossz**</u>

11. DEFINÍCIÓ: Legyen a γ egyszerű görbeív egy paraméterezése $\mathbf{r}(t)$; $a \leq t \leq b$. Legyen $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$, $A = \mathbf{r}(t_0)$, $B = \mathbf{r}(t_n)$ és $P_i = \mathbf{r}(t_i)$, ahol $0 < i < n$. A görbe egy felosztása.



Legyen L a supremuma (legkisebb felső korlátja) az összes lehetséges $AP_1P_2 \ldots P_{n-1}B$ poligonok hosszainak. Ha L véges azt mondjuk, a γ görbe *rektifikálható,* és ívhossza L.

8. TÉTEL: Ha γ egyszerű görbeív (feltettük, hogy folytonosan differenciálható), akkor γ rektifikálható, és ívhossza:

$$L = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)| \, dt$$

teljesül a γ bármely paraméterezésére.

34. PÉLDA: Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ paraméterezéssel adott ív hosszát egy fordulat alatt.

Megoldás: $0 \leq t \leq 2\pi$, $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$,

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} \equiv \sqrt{2}.$$

Tehát $L = \int_0^{2\pi} |\dot{\mathbf{r}}(t)| \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi$.

3.1.1. Görbék ívhossz parméterezése

Legyen $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ egy tetszőleges paraméterezése a γ egyszerű görbeívnek. Legyen $s(t) = \int_a^t |\dot{\mathbf{r}}(\tau)| \, d\tau$, ekkor $s(t)$ a t időpillanatig befutott ív hossza. Mivel $s(t)$ szigorúan monoton, így létezik inverz függvénye, ami szintén szigorúan monoton és folytonosan differenciálható.

Legyen $t(s)$ az $s(t)$ inverz függvénye. Ekkor ha L jelöli a γ hosszát, $t : [0, L] \to [a, b]$, $\mathbf{r} : [a, b] \to \gamma$, $(\mathbf{r} \circ t) : [0, L] \to \gamma$

Tehát az $\widetilde{\mathbf{r}}(s) = (\mathbf{r} \circ t)(s) = \mathbf{r}(t(s))$ a γ görbe egy paraméterezése. Az $\widetilde{\mathbf{r}}(s)$ paraméterezést a γ görbe *természetes paraméterezésének,* vagy *ívhossz paraméterezésének* hívjuk.

35. PÉLDA: Adjuk meg az $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ csavarvonal ívhossz paraméterezését!

Megoldás:
$s(t) = \int_0^t |\dot{\mathbf{r}}(\tau)| \, d\tau = \int_0^t \sqrt{2} d\tau = \sqrt{2} t$. Tehát az $s(t) = \sqrt{2} t$ függvény inverzfüggvénye: $t(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} s$. Vagyis a csavarvonal természetes paraméterezése: $\widetilde{\mathbf{r}}(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(0 \leq s \leq 2\sqrt{2}\pi\right)$. Könnyű látni, hogy

noha az $\widetilde{\mathbf{r}}'(s)$ érintő vektor nem állandó, de $|\widetilde{\mathbf{r}}'(s)| \equiv 1$. Ez általában minden *ívhosszparaméterezett* görbére igaz.

9. TÉTEL: Legyen γ egyszerű görbeív, és $\widetilde{\mathbf{r}}(s)$, $(0 \le s \le L)$ a γ ívhossz paraméterezése. Ekkor $|\widetilde{\mathbf{r}}'(s)| \equiv 1$.

Bizonyítás.

$$\widetilde{\mathbf{r}}'(s) = \frac{d\mathbf{r}(t(s))}{ds} = \dot{\mathbf{r}}(t(s))\, t'(s) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t(s))}{s'(t(s))} = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t(s))}{|\dot{\mathbf{r}}(t(s))|}$$

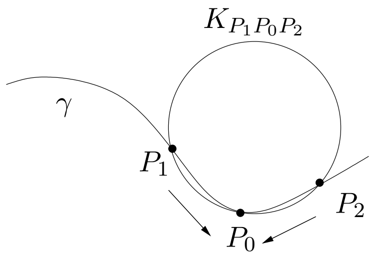
egy egységvektor. Az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy $s(t) = \int\limits_a^t |\dot{\mathbf{r}}(\tau)\, d\tau|$, így $s'(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|$. Vagyis az ívhosszparaméterezés az a paraméterezés, ahol az érintő (sebesség) vektor hossza 1 minden pillanatban. ■

10. TÉTEL: Legyen $\widetilde{\mathbf{r}}(s)$, $0 \le s \le L$ a γ görbe természetes paraméterezése. Ekkor $\widetilde{\mathbf{r}}''(s) \perp \widetilde{\mathbf{r}}'(s)$ teljesül minden $0 \le s \le L$-re.

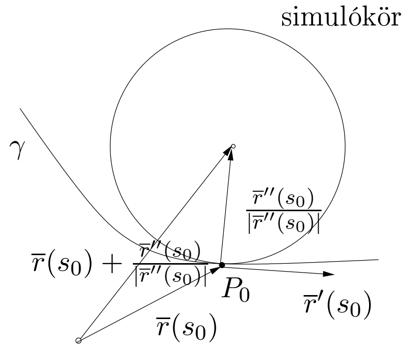
Bizonyítás. Tudjuk, hogy $|\widetilde{\mathbf{r}}'(s)| \equiv 1$, tehát $\widetilde{\mathbf{r}}'(s)\widetilde{\mathbf{r}}'(s) \equiv 1$ deriválva mindkét oldalt kapjuk: $\widetilde{\mathbf{r}}''(s)\widetilde{\mathbf{r}}'(s) + \widetilde{\mathbf{r}}''(s)\widetilde{\mathbf{r}}'(s) \equiv 0$, így $2\widetilde{\mathbf{r}}''(s)\widetilde{\mathbf{r}}'(s) \equiv 0$. Vagyis $\widetilde{\mathbf{r}}''(s) \perp \widetilde{\mathbf{r}}'(s)$ $\forall s$-re. ■

Simulókör

Legyen a γ egyszerű görbe ívhossz paraméterezése $\widetilde{\mathbf{r}}(s)$, $0 \le s \le L$. Tegyük fel, hogy az $\widetilde{\mathbf{r}}(s_0)$ helyvektorú P_0 pontban $\widetilde{\mathbf{r}}''(s_0) \neq \mathbf{0}$. Ekkor, ha P_1, P_2 a görbének P_0-hoz közeli pontjai, akkor $P_1P_0P_2$ pontokon keresztül egyetlen $K_{P_1P_0P_2}$ kör rajzolható.



Amint $P_1, P_2 \to P_0$ a $K_{P_1P_0P_2}$ köröknek létezik határhelyzete, amely egy, a P_0-beli érintőre merőleges $\frac{1}{|\tilde{r}''(s_0)|}$ sugarú kör. Ezt a kört a γ görbe P_0-beli *simulókörének* nevezzük. A simulókör középpontjának helyvektora: $\tilde{r}(s_0) + \frac{\tilde{r}''(s_0)}{|\tilde{r}''(s_0)|^2}$.



12. DEFINÍCIÓ: A simulókör sugarának reciprokát a γ görbe $P_0 = \tilde{r}(s_0)$-ban vett *görbületének* hívjuk. Jele: $\varkappa(s_0)$, tehát $\varkappa(s_0) = |\tilde{r}''(s_0)|$.

Azt tehát tudjuk, hogy $\tilde{r}'(s) \perp \tilde{r}''(s)$-re, de az, hogy $\tilde{r}''(s)$ is egységvektor lenne, általában **nem** igaz. Az $\tilde{r}''(s)$ irányú egységvektort, $\mathbf{n}(s) = \frac{\tilde{r}''(s)}{|\tilde{r}''(s)|}$ *főnormális egységvektornak* nevezzük.

Az érintő irányú egységvektor: $\mathbf{t}(s) = \tilde{r}'(s)$, míg ezek vektoriális szorzata: $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$, a *binormális egységvektor.* A $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$ egységvektorokból álló jobbsodrású rendszert a $P = \tilde{r}(s)$ pontbeli *kísérő triédernek* hívjuk.

Az érintő ($\mathbf{t}(s)$) és a főnormális egységvektor ($\mathbf{n}(s)$) síkja a *simulósík.* Egyenlete: $(\mathbf{u} - \mathbf{r}(s_0))\,\mathbf{b}(s_0) = 0.$

A főnormális ($\mathbf{n}(s)$) és a binormális ($\mathbf{b}(s)$) síkja a *normálsík,* melynek egyenlete: $(\mathbf{u} - \mathbf{r}(s_0))\,\mathbf{t}(s_0) = 0.$

Az érintő és a binormális síkja a *rektifikáló sík*, ennek egyenlete:
$(\mathbf{u} - \mathbf{r}(s_0)) \cdot \mathbf{n}(s_0) = 0.$

Görbe helyzete a kísérő triéderhez képest

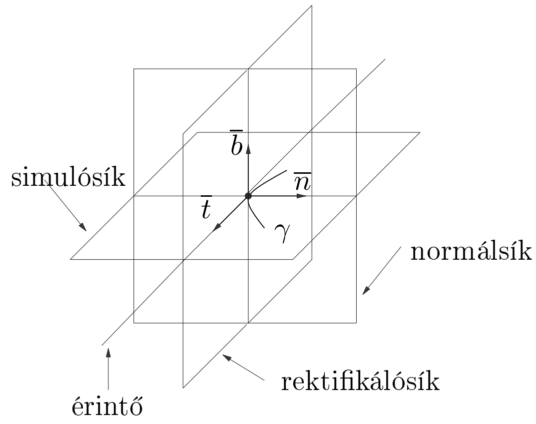
általános típusú pontjaiban a görbe a rektifikáló sík egyik oldalán helyezkedik el, a normálsíkot és az érintősíkot viszont átmetszi. A $P_0 = \tilde{r}(s_0)$ körüli görbeszakasz vetülete a :

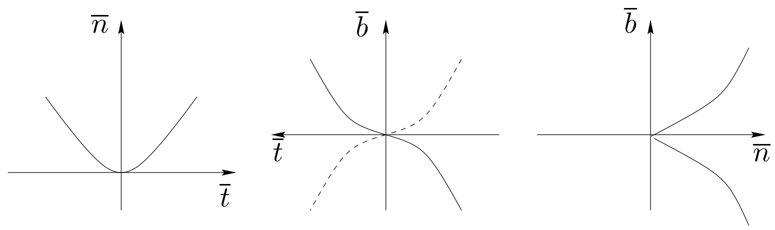
- simulósíkra kb. egy *parabola*

- rektifikálósíkra kb. egy *harmadfokú függvény*

- normálsíkra kb. egy *Neil-féle parabola*

Ezen fenti állítások olyan P_0 pontokra vonatkoznak, ahol sem a görbület, sem a torzió (definíciója alább) **nem** nulla.

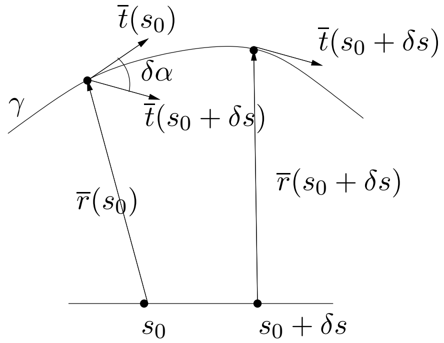




a b c

11. TÉTEL: A görbület az érintővektor ívhossz szerinti szögsebessége. Legyen a γ görbe természetes paraméterezése $\tilde{r}\,(s)\,,\ a \leq s \leq b.$

Bizonyítás. Legyen $\underline{\Delta\alpha}$ az s_0 és az $s_0 + \triangle\ s$ paraméterekhez tartozó pontokban vett $\mathbf{t}\,(s)$ és $\mathbf{t}\,(s_0 + \triangle\ s)$ érintők szöge.



Az érintővektor ívhossz szerinti szögsebessége az $\tilde{r}\ (s_0)$-ban definíció szerint: $\lim\limits_{\triangle s \to 0} \frac{\triangle\alpha}{\triangle s} = \lim\limits_{\triangle s \to 0} \frac{\sin\triangle\alpha}{\triangle s}$, amit tovább írva, ha használjuk, hogy $\sin \triangle\ \alpha =$

$|\tilde{r}'(s_0)\times\tilde{r}'(s_0+\triangle s)| = |\tilde{r}'(s_0)\times[\tilde{r}'(s_0+\triangle s)-\tilde{r}'(s_0)]|$, kapjuk, hogy

$$\lim_{\triangle s\to 0}\frac{\triangle\,\alpha}{\triangle\,s} = \lim_{\triangle s\to 0}\frac{\sin\triangle\,\alpha}{\triangle\,s} =$$
$$= \lim_{\triangle s\to 0}\left|\tilde{r}'(s_0)\times\frac{\tilde{r}'(s_0+\triangle s)-\tilde{r}'(s_0)}{\triangle\,s}\right| = \lim_{\triangle s\to 0}\left|\tilde{r}'(s_0)\times\tilde{r}''(s_0)\right| =$$
$$= \left|\tilde{r}''(s_0)\right| = \chi(s_0)\,. \quad (3.1)$$

■

Az egyszerű görbeív különböző pontjaihoz általában más-más állású simulósík tartozhat. A simulósík állását a binomiális egységvektor mutatja meg. Minél gyorsabban változik a binomiális egységvektor szöge, annál inkább eltér a görbe egy síkgörbétől. Ennek mérésére szolgál a *torzió.*

13. DEFINÍCIÓ: Az $\tilde{r}(s)$ ivhosszparaméterezésű γ görbe egy s paraméterhez tartozó $\tilde{r}(s)$ pontjában a *torzió értékét* a $\tau(s) := -\left(\dot{\mathbf{b}}(s)\,,\mathbf{n}(s)\right)$ *skalárszorzattal* definiáljuk.

Vegyük észre, hogy a binormális egységvektor deriváltja, $\dot{\mathbf{b}}(s)$, mindig párhuzamos a főnormális egységvektorral $(\mathbf{n}(s)$-sel$)$.

Ugyanis: $\mathbf{b}(s)\,\mathbf{b}(s)\equiv 1$, innen deriválással $2\dot{\mathbf{b}}(s)\,\mathbf{b}(s)\equiv 0$, azaz $\dot{\mathbf{b}}(s)\perp\mathbf{b}(s)$.

Másrészt: $\mathbf{b}(s)\,\mathbf{t}(s)\equiv 0$, innen deriválással $\dot{\mathbf{b}}(s)\,\mathbf{t}(s)+\underbrace{\mathbf{b}(s)\underbrace{\dot{\mathbf{t}}(s)}_{\chi(s)\mathbf{n}(s)}}_{0} = 0,$

így $\dot{\mathbf{b}}(s)\perp\mathbf{t}(s)$.
$\dot{\mathbf{b}}(s)\perp\mathbf{b}(s)$ és $\dot{\mathbf{b}}(s)\perp\mathbf{t}(s)$ merőlegességekből következik, hogy

$$\dot{\mathbf{b}}(s)\parallel\mathbf{n}(s)\,.$$

Tehát $\dot{\mathbf{b}}(s) = -\tau(s)\,\mathbf{n}(s)$, a $\tau(s)$ definíciója miatt. Amiből az is következik, hogy $\left|\dot{\mathbf{b}}(s)\right| = |\tau(s)|$.

12. TÉTEL: A binormális egységvektor ívhossz szerinti szögsebességege $|\tau(s)|$.

Bizonyítás.

Legyen $\Delta\beta$ az s_0*és* $s_0+\Delta s$ paraméterekhez tartozó pontokbeli $\mathbf{b}(s_0)$ és $\mathbf{b}(s_0+\Delta s)$ binormális egységvektorok összege. Ekkor a binormális egységvektor ívhossz szerinti szögsebessége az s_0 paraméterhez tartozó $\tilde{r}(s_0)$ pontban egyenlő a

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\beta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\sin\Delta\beta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\mathbf{b}(s_0)\times\mathbf{b}(s_0+\Delta s)|}{\Delta s} &= \\ = \lim_{\Delta s\to 0}\mathbf{b}(s_0)\times\frac{|\mathbf{b}(s_0+\Delta s)-\mathbf{b}(s_0)|}{\Delta s} &= \\ = \left|\mathbf{b}(s_0)\times\dot{\mathbf{b}}(s_0)\right| = \left|\dot{\mathbf{b}}(s_0)\right| = |\tau(s_0)|\,. \quad (3.2)\end{aligned}$$

■ **Frenet-formulák**

$$\text{Frenet-formulák:}\quad \begin{array}{rcccl}\mathbf{t}' = & & \varkappa\mathbf{n} & & \\ \mathbf{n}' = & -\varkappa\mathbf{t} & & +\tau\mathbf{b} & . \\ \mathbf{b}' = & & -\tau\mathbf{n} & & \end{array}$$

$$\text{Más alakban a Frenet-formulák:}\begin{bmatrix}\mathbf{t}'\\ \mathbf{n}'\\ \mathbf{b}'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \varkappa & 0\\ -\varkappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{n}\\ \mathbf{b}\end{bmatrix}$$

Bizonyítás. Az első és a harmadik formulát már láttuk. Az új formula a második. Ennek igazolása: $\mathbf{n}(s)=\mathbf{b}(s)\times\mathbf{t}(s)$ mindkét oldalát deriválva kapjuk: $\mathbf{n}'(s)=\mathbf{b}'(s)\times\mathbf{t}(s)+\mathbf{b}(s)\times\mathbf{t}'(s) = -\tau(s)\underbrace{\mathbf{n}(s)\times\mathbf{t}(s)}_{-\mathbf{b}(s)}+\mathbf{b}(s)\times$ $\times(\varkappa(s)\,\mathbf{n}(s)) = \tau(s)\,\mathbf{b}(s)-\varkappa(s)\,\mathbf{t}(s)$, mert $\mathbf{b}(s)\times\mathbf{n}(s)=-\mathbf{t}(s)$. ■

A következő tétel a görbület és a torzió egy érdekes tulajdonságát mutatja:

13. TÉTEL: (Görbék alaptétele) A görbék alakját egyértelműen meghatározzák az ívhossz paraméterezésben megadott $\varkappa(s)$ és $\tau(s)$ függvények. Továbbá, ha $\varkappa(s)>0$ és $\tau(s)$ folytonos függvények az $[a,b]$ intervallumról $\mathbf{R}$-be képeznek, akkor létezik olyan görbe, melynek ívhossz szerinti paraméterezése esetén a görbületet a $\varkappa(s)$, a torziót a $\tau(s)$ adja meg.

Torzió és görbület általános paraméterezés esetén

14. TÉTEL: Legyen $\mathbf{r}(t)$ $a\le t\le b$ a γ görbe egy tetszőleges paraméterezése. Ekkor a görbület a t paraméterhez tartozó $\mathbf{r}(t)$ pontban:

$$\varkappa(t)=\frac{|\dot{\mathbf{r}}(t)\times\ddot{\mathbf{r}}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^3}$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy az ívhossz a t időpillanatig: $s(t) = \int\limits_a^t |\dot{\mathbf{r}}(\tau)|\, d\tau$. Ekkor $\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(s(t))$, így

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \tilde{\mathbf{r}}'(s(t))\, s'(t) \text{ és } \ddot{\mathbf{r}}(t) = \tilde{\mathbf{r}}''(s(t)) \left(s'(t)\right)^2 + \tilde{\mathbf{r}}'(s(t))\, s''(t).$$

$$\frac{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^3} =$$

$$= \frac{|\tilde{\mathbf{r}}(s(t)) \times \tilde{\mathbf{r}}''(s(t))|\, |s'(t)|^3}{\underbrace{|\tilde{\mathbf{r}}'(s(t))|^3}_{1} |s'(t)|^3} = |\tilde{\mathbf{r}}''(s(t))| = \varkappa(\tilde{\mathbf{r}}(s(t))) = \varkappa(\mathbf{r}(t)). \tag{3.3}$$

■

15. TÉTEL: Legyen $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$ a γ egy tetszőleges paraméterezése. Ekkor a görbe $\mathbf{r}(t)$ pontjában a torzió:

$$\tau(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)\, \ddot{\mathbf{r}}(t)\, \dddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|^2}$$

3.2. Felületek

A felületek tárgyalását néhány bevezető gondolattal kezdjük.

3.2.1. Bevezetés

Felületek megadása.

a. $z = f(x, y)$ pl. hiperbolikus paraboloid $z = x^2 - y^2$

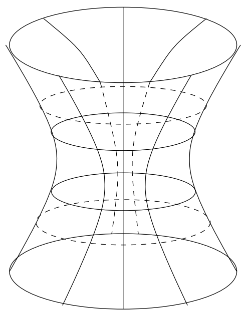
b. $F(x, y, z) = 0$. Példák:

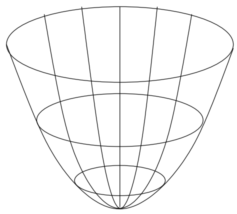
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gömb,

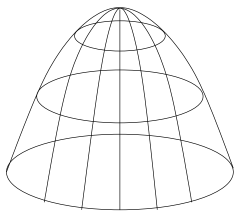
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipszoid,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ egyköpenyű hiperboloid,

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ kétköpenyű hiperboloid.







c. $\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v)\, z(u,v))$, Példák:

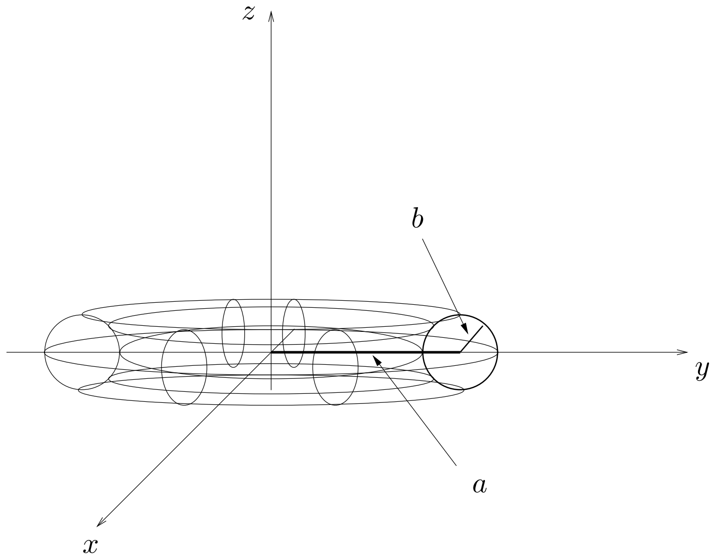
$\mathbf{r}(\varphi,\Psi) = (R\sin\Psi\cos\varphi, R\sin\Psi\sin\varphi, R\cos\Psi)$ az R sugarú gömb,

$\mathbf{r}(u,v) = ((a+b\cos v)\cos u, (a+b\cos v)\sin u, b\sin v)$ egy tórusz felülete.

Forgásfelületek.

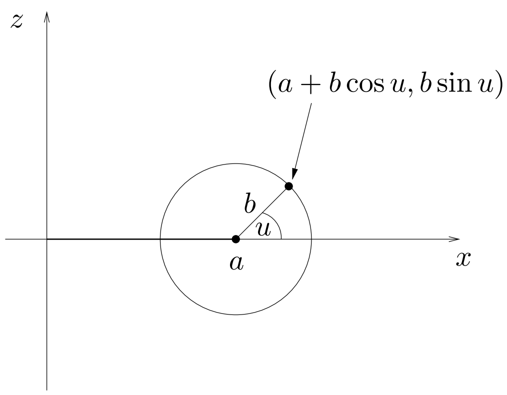
1. (a) Adott az xz síkban egy $z = f(x)$ függvény, ha ezt megforgatjuk a z tengely körül, akkor az x szerepét az xy síkbeli origótól vett távolság, vagyis a $\sqrt{x^2+y^2}$ veszi át. Vagyis egy z tengelyű forgásfelület alakja $z = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, ahol f egy tetszőleges függvény $(f : \mathbf{R} \to \mathbf{R})$. pl. $z = x^2+y^2$ vagy $z = \sin(x^2+y^2)$.

   (b) Legyen adott az xz síkban egy görbe $(x(u), z(u))$, $a \le u \le b$



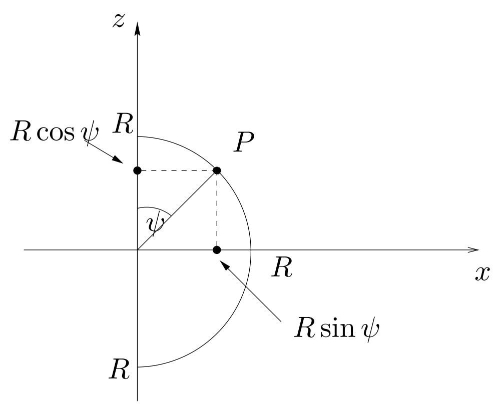
alakban.Ekkor ezen görbe z tengely körüli forgatásával kapott forgásfelület $\mathbf{r}(u,v) = (x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u))\,, \quad \begin{matrix} a \le u \le b \\ 0 \le v \le 2\pi \end{matrix}\,.$

2. (a) Forgassuk az ábrán látható K kört a z tengely körül.



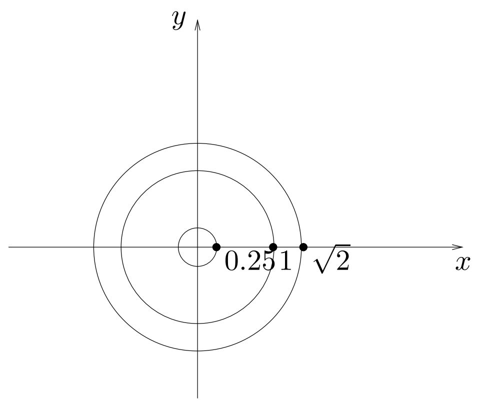
Eredményül a tórusz felületet kapjuk, amely K kör:
$u \to (a + b\cos u, b\sin u)\,,\ 0 \le u \le 2\pi$. Így a tórusz felület:
$\mathbf{r}(u,v) = ((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u)\,,\ 0 \le v \le 2\pi$.

(b) Forgassuk az ábrán látható félkört a z tengely körül.



A félkört a $\Psi \to (R\sin\Psi, R\cos\Psi)$, $0 \le \Psi \le \pi$ görbe adja meg. Ezért $\mathbf{r}(\varphi,\Psi) = (R\sin\Psi\cos\varphi, R\sin\Psi\sin\varphi, R\cos\Psi)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, a gömbfelszín egy paraméterezése

Szintvonalak. Tegyük fel, hogy adott egy felület $z = f(x,y)$ alakban, pl. $z = x^2 + y^2$. Ekkor $\forall c \in \mathbf{R}$-re értelmezzük a c-hez tartozó szinthalmazt a következőképpen: $\{(x,y)\,|\,f(x,y) = c\}$. például a $z = x^2 + y^2$ esetben a $c < 0$ számokhoz tartozó szinthalmazok **üreshalmazok,** a $c = 0$-hoz tartozó szinthalmaz= $\{(0,0)\}$. A $c > 0$-hoz tartozó szinthalmazok **origó középpontú** $\sqrt{c}$ **sugarú körök.** Ezek a szinthalmazok gyakran, de nem mindig görbék, így néha **szintvonalaknak** hívjuk őket.

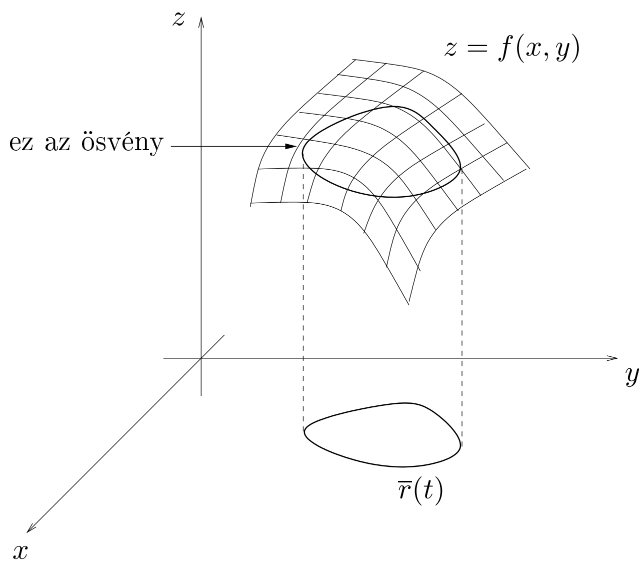


Tegyük fel, hogy a $z = f(x,y)$ felületnek egy szintvonala az $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \le t \le b$ görbe. Azaz $f(\mathbf{r}(t)) \equiv c$, valamely $c \in \mathbf{R}$ és minden $a \le t \le b$-re. Az $f(\mathbf{r}(t)) \equiv c$ mindkét oldalt t-szerint deriválva kapjuk, hogy $f'(\mathbf{r}(t))\,\dot{\mathbf{r}}(t) \equiv 0$. Vagyis $\forall t \in [a,b]$-re $grad|_{\mathbf{r}(t)} \perp \dot{\mathbf{r}}(t)$. Tehát azt kapjuk, hogy a szintvonal gradiense **merőleges** az érintőjére.

Szintvonalakkal találkozhatunk pl. a turistatérképeken, ahol a $z = f(x,y)$ felület az adott hegység felülete, és a szintvonalak azok a görbék, melyek azonos magasságon lévő helyeken futnak át.

Feltételes szélsőérték

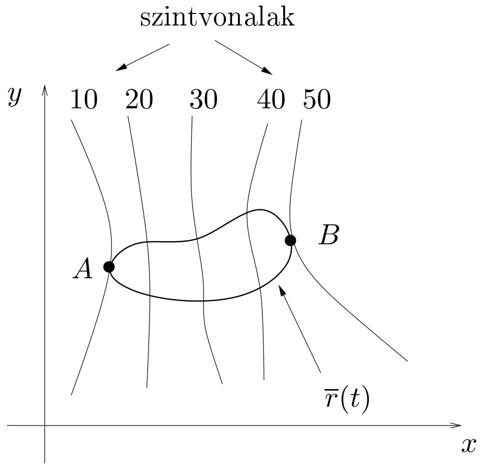
16. TÉTEL: Adott egy $z = f(x,y)$ felület. Sétáljunk ezen a felületen egy olyan ösvény mentén, melynek az xy síkra eső vetülete az $\mathbf{r}(t)$ görbe. Ekkor az $\mathbf{r}(t)$-re vonatkozólag az f-nek feltételes szélsőértéke az $\mathbf{r}(t)$ azon pontjaiban lehet csak, ahol az $\mathbf{r}(t)$ érinti az adott ponton áthaladó szintvonalat.



36. PÉLDA: Az ábra a $z = f(x,y)$ szintvonalait és az $\mathbf{r}(t)$ görbét mutatja.

Ekkor lokális feltételes szélsőértékek az A és a B pontokban lehetnek. Ha egy felület $\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in D \subset \mathbf{R}^2$, alakban adott, akkor ábrázolhatjuk a felületet a paramétersík **koordináta vonalainak** a képei segítségével.

Általában a computerrel rajzolt felületek is ilyenek.



Láttunk példát három féleképpen módon megadott felületekre. Ha a felület $\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ alakban van megadva, az a mi számunkra kellemes. Ha $z = f(x,y)$ alakban van, az sokszor még jobb, de mindenesetre átírhatjuk az $\mathbf{r}(u,v)$ alakra úgy, hogy $u = x$, $v = y$ és ekkor $\mathbf{r}(u,v) = (u, v, f(u,v))$. Tehát ezen a módon minden, az $u, v \to \mathbf{r}(u,v)$ alakú felületekre kimondott tétel triviális módon a $z = f(x,y)$ alakban megadott felületekre is átvihető. A harmadik féle megadási mód az ún. implicit alak pl. $x^2+y^2+z^2 = 1$ vagy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = 1$ vagy $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = 1$. Az ilyen alakban megadott felületeket megpróbáljuk átírni $\mathbf{r}(u,v)$ alakra. A fenti első esetben ezt már megtettük, hiszen ez a gömbfelület. Az egyköpenyű hiperboloidot $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = 1\right)$ az $\mathbf{r}(u,v) = (a \cos u chv, b \sin u chv, c \cdot shv)$, $0 \le u \le 2\pi$, $v \in \mathbf{R}$ -vel paraméterezhetjük meg.

Azon impliciten adott felületekkel, melyeket $\mathbf{r}(u,v)$ alakban **nem** tudunk felírni, **nem** fogunk tudni mit kezdeni az ezen előadásban tanult tételek segítségével.

3.2.2. Definíciók

14. DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{r} : \mathbf{T}\,(\subset \mathbf{R}^2) \to \mathbf{R}^3$ leképezés $\mathcal{F}$ értékkészletét **elemi felületnek** hívjuk, ha $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}^2$ egyszeresen összefüggő (nincs benne lyuk) tartomány, $\mathbf{r}$:

- $1-1$ értelmű,

- végtelen sokszor differenciálható,

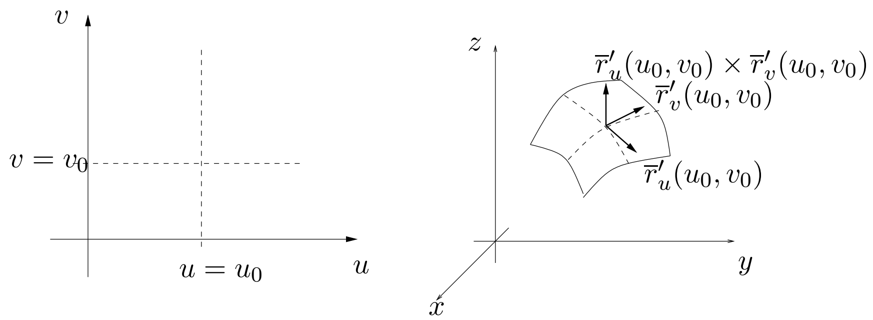
- inverze folytonos,
- az $\mathbf{r}'_u$ és $\mathbf{r}'_v$ vektorok minden pontban függetlenek. **Ekkor az r az elemi felület egy paraméterezése.**

15. DEFINÍCIÓ: Felületnek nevezünk egy olyan térbeli halmazt, amely összefüggő, és minden pontjának van olyan gömbkörnyezete, melyben a halmaz elemi felület.

37. PÉLDA: Az $\mathbf{r}(u,v) = (u^2, v^2, u^3 + v^2)$ esetén $\mathbf{r}'_u = (2u, 0, 3u^2)$; $\mathbf{r}'_v = (0, 2v, 2v)$. Tehát $\mathbf{r}'_u(0,0) = (0,0,0)$ és $\mathbf{r}'_v(0,0) = (0,0,0)$, vagyis az $\mathbf{r}(u,v)$ **nem** határoz meg elemi felületet semmilyen olyan T tartományon, mely az origót tartalmazza! Sőt, sem az u, sem a v tengelyt nem szabad metszeni T-nek ahhoz, hogy $\mathbf{r}(u,v)$ egy elemi felületet határozzon meg!

Vegyük észre, hogy az a feltétel, hogy $\mathbf{r}'_u$ és $\mathbf{r}'_v$ lineárisan független, az $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \neq \mathbf{0}$ feltétellel ekvivalens.

16. DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{r}'_u(u_0,v_0) \times \mathbf{r}'_v(u_0,v_0)$-t a felület (u_0,v_0)-hoz tartozó **felületi normális vektorának** hívjuk.



Mivel a felületi normális vektor merőleges mind az $u \to \mathbf{r}(u,v_0)$ görbe $\mathbf{r}'(u_0,v_0)$ érintővektorára, mind pedig a $v \to \mathbf{r}(u_0,v)$ görbe $\mathbf{r}'_v(u_0,v_0)$ érintővektorára, így az $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ felületi normális vektor merőleges az $\mathbf{r}'(u_0,v_0)$-beli érintősíkra, tehát annak egy normálvektora. Tehát ha az

$$\mathbf{r}(u_0,v_0) = (x_0,y_0,z_0) \text{ és } \mathbf{r}'_u(u_0,v_0) \times \mathbf{r}'_v(u_0,v_0) = \mathbf{n} = (n_1,n_2,n_3),$$

akkor **a felület $\mathbf{r}(u,v_0)$-beli érintősíkja:**

$$(n_1,n_2,n_3)((x,y,z) - (x_0,y_0,z_0)) = 0.$$

így

$$n_1x + n_2y + n_3z - n_1x_0 - n_2y_0 - n_3z_0 = 0.$$

Az $|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|$ felületi normális hossza:

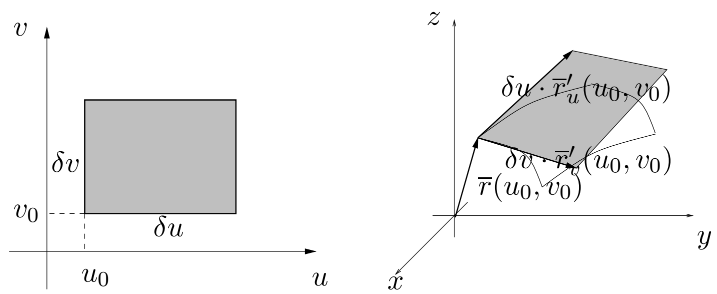
$$|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|^2 = (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) = \underbrace{(\mathbf{r}'_u)^2}_{E}\underbrace{(\mathbf{r}'_v)^2}_{G} - \underbrace{(\mathbf{r}'_u\mathbf{r}'_v)^2}_{F^2}$$

$$|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| = \sqrt{EG - F^2}$$

A fenti $E = (\mathbf{r}'_u)^2$; $F = \mathbf{r}'_u\mathbf{r}'_v$; $G = (\mathbf{r}'_v)^2$ mennyiségeket **Gauss-féle elsőrendű alapmennyiségeknek** hívjuk.

3.2.3. Felület felszíne

Először tekintsük a paraméter tartomány (T-nek az uv koordináta síkon) egy beosztását a koordináta tengelyekkel párhuzamos vonalaknak. Ezek megfelelői a 3.2.2. ábra jobboldali ábráján a felületen futó **koordinátavonalak**. A felület felszínének kiszámításához meg kell becsülnünk a felület ezen koordináta vonalai által határolt kis elemi darabjának felszínét, majd az ilyen kis elemi felszínek összege adja a felület felszínét. Az előbbi ábra kinagyítva:



A jobb oldali ábrán a koordináta vonalak által kifeszített területet közelítőleg megkapjuk, ha a $\Delta u\mathbf{r}'_u$ és a $\Delta v\mathbf{r}'_v$ által meghatározott paralelogramma $\Delta u\Delta v\,|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|$ területét kiszámoljuk. (A közelítés annál jobb, minél kisebb a Δu és a Δv.) Tehát az $\mathcal{F}$ felület felszíne közelítőleg

$$\lim_{\Delta u,\Delta v\to 0} \Sigma\Delta u\Delta v\,|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| = \iint_T |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|\,dudv = \iint_T \sqrt{EG - F^2}dudv,$$

ahol a Σ-t az összes kis téglalapjára vesszük a T tartománynak, ha $\Delta u, \Delta v \to 0$ a kettősintegrál definíciója miatt. Tehát a **felület felszíne:**

$$\iint_T \sqrt{EG - F^2}\,dudv.$$

38. PÉLDA: Határozzuk meg az R sugarú gömb felszínét!

Megoldás:
$\mathbf{r}(\varphi, \Psi) = (R\sin\Psi\cos\varphi, R\sin\Psi\sin\varphi, R\cos\Psi)$, $T : (0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le \Psi \le \pi)$
$\mathbf{r}'_\varphi = (-R\sin\Psi\sin\varphi, R\sin\Psi\cos\varphi, 0)$
$\mathbf{r}'_\Psi = (R\cos\Psi\cos\varphi, R\cos\Psi\sin\varphi, -R\sin\Psi)$

$E = R^2\sin^2\Psi\sin^2\varphi + R^2\sin^2\Psi\cos^2\varphi = R^2\sin^2\Psi$
$F = -R^2\cos\Psi\sin\Psi\cos\varphi\sin\varphi + R^2\cos\Psi\sin\Psi\cos\varphi\sin\varphi = 0$
$G = R^2\cos^2\Psi\cos^2\varphi + R^2\cos^2\Psi\sin^2\varphi + R^2\sin^2\Psi = R^2\left(\cos^2\Psi + \sin^2\Psi\right) = R^2$

$E = \left(\mathbf{r}'_\varphi\right)^2$
$F = \mathbf{r}'_\varphi\mathbf{r}'_\Psi$
$G = \left(\mathbf{r}'_\Psi\right)^2$. Tehát, az R-sugarú gömb felszíne:

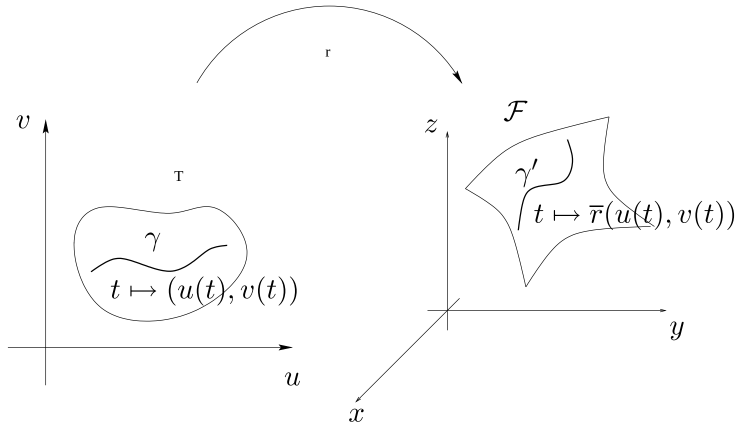
$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\Psi=0}^{\pi} \sqrt{EG - F^2}\,d\Psi d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\Psi=0}^{\pi} \sqrt{R^4\sin^2\Psi}\,d\Psi d\varphi =$$

$$= 2\pi R^2 \underbrace{\int_{\Psi=0}^{\pi} \sin\Psi\,d\Psi}_{2} = 4R^2\pi \quad (3.4)$$

3.3. Felületi görbék

Legyen az $\mathcal{F}$ felület egy paraméterezése $\mathbf{r} : T \to \mathbf{R}^3$. Legyen továbbá $t \to (u(t), v(t))$ egy T-ben futó γ görbe paraméterezése. Ekkor az $\mathbf{r}(u(t), v(t))$, $a \le t \le b$ egy, az $\mathcal{F}$ felületen futó γ' görbe paraméterezése lesz.

39. PÉLDA: Számítsuk ki a fenti γ' görbe ívhosszát!



40. PÉLDA: Ha γ_1', γ_2' két fenti módon definiált felületi görbe, melyek mindegyike átmegy egy $P_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ ponton, akkor határozzuk meg a γ_1' és a γ_2' görbék szögét!

Megoldás az első feladatra:
Legyen $\Phi(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$, $a \le t \le b$. Tudjuk, hogy a γ' ívhossza:

$$L = \int_a^b \left|\dot{\Phi}(t)\right| dt.$$

Mivel $\dot{\Phi}(t) = \mathbf{r}_u'\dot{u} + \mathbf{r}_v'\dot{v}$ (összetett függvény deriválási szabálya), ezért

$$L = \int_a^b \sqrt{(\mathbf{r}_u'\dot{u} + \mathbf{r}_v'\dot{v})(\mathbf{r}_u'\dot{u} + \mathbf{r}_v'\dot{v})}dt = \int_a^b \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}dt.$$

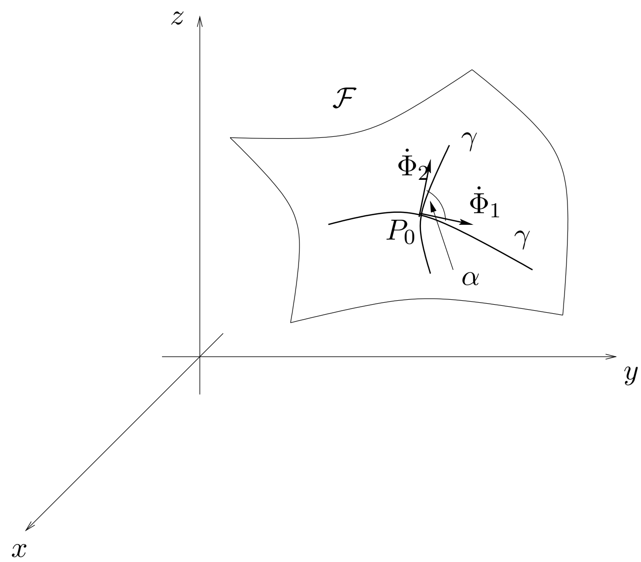
17. DEFINÍCIÓ: Az $E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2$ kifejezést **első alapformának** nevezzük. Az első alapforma **pozitív definit**! (Hiszen az $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ mátrix determinánsa$=\left|\mathbf{r}_u' \times \mathbf{r}_v'\right|^2 > 0$ és $\mathbf{r}_u'$ **soha** nem lehet $\mathbf{0}$, így $E > 0$.)

Megoldása a második feladatnak:
Tegyük fel, hogy a $t \to (u_1(t), v_1(t))$ és a $t \to (u_2(t), v_2(t))$ paraméterezésű γ_1 és γ_2 T-beli görbék átmennek az (u_0, v_0) ponton. Ekkor a $\Phi_1(t) = \mathbf{r}(u_1(t), v_1(t))$ és a $\Phi_2(t) = \mathbf{r}(u_2(t), v_2(t))$ paraméterezésű

$a \le t \le b$ görbék γ_1' és γ_2' átmennek az $\mathbf{r}(u_0, v_0) = P_0$ ponton. A γ_1'és γ_2' szöge a P_0-ban definíció szerint a $\dot{\Phi}_1$ és a $\dot{\Phi}_2$ szöge a P_0-ban. Hívjuk ezt a meghatározandó szöget α-nak. Ekkor

$$\cos\alpha = \frac{\dot{\Phi}_1\dot{\Phi}_2}{\left|\dot{\Phi}_1\right|\left|\dot{\Phi}_2\right|} = \frac{(\mathbf{r}_u'\dot{u}_1 + \mathbf{r}_v'\dot{v}_1)(\mathbf{r}_u'\dot{u}_2 + \mathbf{r}_v'\dot{v}_2)}{|\mathbf{r}_u'\dot{u}_1 + \mathbf{r}_v'\dot{v}_1|\,|\mathbf{r}_u'\dot{u}_2 + \mathbf{r}_v'\dot{v}_2|} =$$

$$= \frac{E\dot{u}_1\dot{u}_2 + F(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1) + G\dot{v}_1\dot{v}_2}{\sqrt{E\dot{u}_1^2 + 2F\dot{u}_1\dot{v}_1 + G\dot{v}_1}\sqrt{E\dot{u}_2^2 + 2F\dot{u}_2\dot{v}_2 + G\dot{v}_2}}. \quad (3.5)$$



Ebből adódik, hogy:

17. TÉTEL: A felület valamely $P_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ pontján áthaladó paramétervonalak **akkor és csak akkor** merőlegesek, ha ebben az (u_0, v_0) pontban az $F = 0$.

Bizonyítás. Paramétervonalak esetén: $\dot{u}_1\dot{u}_2 = \dot{v}_1\dot{v}_2 = 0$. Tehát a fenti képlet számlálójában **csak** az F-es tag marad meg. Másrészt az $\dot{u}_1\dot{v}_2$ és az $\dot{u}_2\dot{v}_1$ közül pontosan az egyik lesz 0, ezért a fenti tört pontossan akkor 0, ha $F = 0$. ■

Az első alapmennyiségek (E, F, G) a felület metrikáját (ívhossz, szög, felszín) határozzák meg. Ezek azonban változatlanok maradnak, ha a felületet meghajlítjuk. Ha a felület térbeli alakját akarjuk vizsgálni, szükségünk lesz a második alapmennyiségekre: L, M és N.

Jelölés: Jelöljük a felületi normális egységvektort $\mathbf{m}$-mel! Vagyis

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|}.$$

Továbbá $\mathbf{r}''_{uu} := \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}$; $\mathbf{r}''_{uv} := \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}$; $\mathbf{r}''_{vv} := \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2}$; $\mathbf{r}''_{vu} := \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v \partial u}$. Korábbi tanulmányokból ismert, hogy $\mathbf{r}''_{uv} = \mathbf{r}''_{vu}$, továbbá $\mathbf{m}'_u := \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u}$ és $\mathbf{m}'_v := \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial v}$.

18. DEFINÍCIÓ: Az $L = \mathbf{r}''_{uu}\mathbf{m}$; $M = \mathbf{r}''_{uv}\mathbf{m}$; $N = \mathbf{r}''_{vv}\mathbf{m}$ mennyiségeket **másodrendű Gauss-féle főmennyiségeknek** hívjuk.

19. DEFINÍCIÓ: Az $L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2$ kifejezést **második alapformának** nevezzük.

3.3.1. Felületi görbék görbülete

18. TÉTEL: Legyen az $\mathcal{F}$ felület egy paraméterezése $\mathbf{r} : \mathbf{T} \to \mathbf{R}^3$. Továbbá legyen a γ egy olyan T-beli görbe, melynek $t \to (u(t), v(t))$, $a \leq t \leq b$ egy paraméterezése. Ekkor a $\Phi(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ paraméterezésű felületi görbe γ' görbülete:

$$\varkappa = \frac{1}{\mathbf{mn}} \frac{\overbrace{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}^{\text{második alapforma}}}{\underbrace{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}_{\text{első alapforma}}},$$

minden olyan pontban, ahol a γ' görbe főnormális egységvektora, $\mathbf{n}$ nincs a felület érintősíkjában, vagyis $\mathbf{nm} \neq 0$, vagyis a formulának van értelme.

A bizonyítás ívhossz paraméterezésre áttéréssel, és összetett függvények deriválásából adódik.

Ennek következtében kapjuk, hogy:

19. TÉTEL: Ha a felület egy adott pontján áthaladó két görbének azonos a simulósíkja (és ez nem egyezik meg a felület ezen pontjában vett érintősíkjával), akkor azonos a görbületük is.

Bizonyítás. Legyenek $\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 : t \to (u_1(t), v_1(t)) \\ \gamma_2 : t \to (u_2(t), v_2(t)) \end{array} \right\}$ olyan görbék az $\mathcal{F}$ felület T paramétertartományában, melyek áthaladnak az (u_0, v_0) ponton közös a simulósíkjuk a $P_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ pontban. Ez a sík különbözik a P_0-beli érintősíktól!

Ekkor a $\left\{ \begin{array}{c} \gamma_1' : \Phi_1(t) = \mathbf{r}(u_1(t), v_1(t)) \\ \gamma_2' : \Phi_1(t) = \mathbf{r}(u_2(t), v_2(t)) \end{array} \right\}$, $a \leq t \leq b$ görbékre a $\mathbf{t}_1(u_0, v_0) = \pm\mathbf{t}_2(u_0, v_0)$ és $\mathbf{n}_1(u_0, v_0) = \mathbf{n}_2(u_0, v_0)$ vagyis az érintő és főnormális egységvektorok azonosak. Azaz $\dot{\Phi}_1(t) = \mathbf{r}_u'\dot{u}_1 + \mathbf{r}_v'\dot{v}_1|_{(u_0,v_0)}$ párhuzamos a $\dot{\Phi}_2(t) = \mathbf{r}_u'\dot{u}_2 + \mathbf{r}_v'\dot{v}_2$.

Tehát az (u_0, v_0)-ban $\{\mathbf{r}_u', \mathbf{r}_v'\}$ függetlensége miatt $(\dot{u}_1, \dot{v}_1) = \lambda(\dot{u}_2, \dot{v}_2)$ valamely $\lambda \neq 0$-ra. Vizsgáljuk a $\varkappa = \frac{1}{\mathbf{mn}} \dfrac{\overbrace{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}^{\text{második alapforma}}}{\underbrace{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}_{\text{első alapforma}}}$ formulát! Ebben $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$ (u_0, v_0)-ban. Továbbá, ha $\dot{u}_1 = \lambda\dot{u}_2$ és $\dot{v}_1 = \lambda\dot{v}_2$ helyettesítéseket használjuk, a λ^2-et mind a számlálóból mind a nevezőből kiemelve és λ^2-tel egyszerűsítve kapjuk, hogy

$$\varkappa_1 = \frac{1}{\mathbf{mn}_1} \frac{L\dot{u}_1^2 + 2M\dot{u}_1\dot{v}_1^2 + N\dot{v}_1^2}{E\dot{u}_1^2 + 2F\dot{u}_1\dot{v}_1 + G\dot{v}_1^2} = \frac{1}{\mathbf{mn}_2} \frac{L\dot{u}_2^2 + 2M\dot{u}_2\dot{v}_2 + N\dot{v}_2^2}{E\dot{u}_2^2 + 2F\dot{u}_2\dot{v}_2 + G\dot{v}_2^2} = \varkappa_2$$

az (u_0, v_0)-ban. ■

20. TÉTEL: Bármely felületi görbe P_0-beli görbülete megegyezik a görbe simulósíkja által a felületből kimetszett síkgörbe görbületével. (Feltéve, hogy a simulósík az érintősíktól a P_0-ban külünbözik.)

Bizonyítás. Az előző tételből azonnal adódik. ■

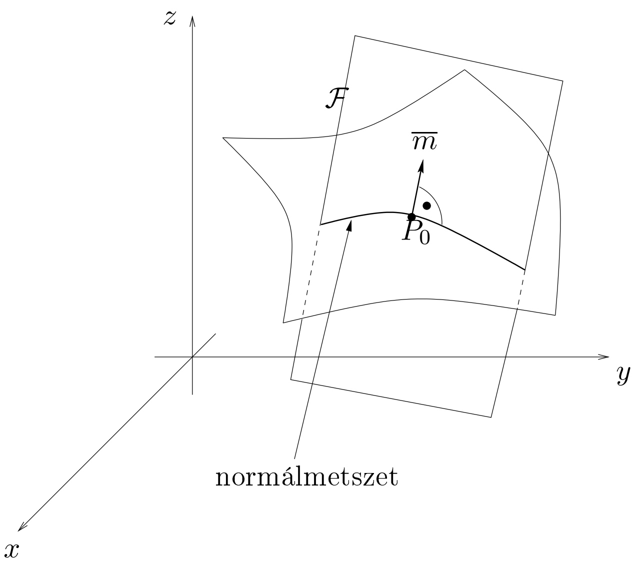
Normálmetszet, ferdemetszet

A továbbiakban legyen $\mathbf{r} : \mathbf{T} \to \mathbf{R}^3$ az $\mathcal{F}$ felület egy paraméterezése, és P_0 az $\mathcal{F}$ egy pontja.

20. DEFINÍCIÓ: Azon síkokat, melyek átmennek a P_0 *ponton*, és merőlegesek a P_0-beli érintősíkra (tehát tartalmazzák a P_0 kezdőponttól felmért $\mathbf{m}$ vektort) **normálsíkoknak,** a normálsíkok által az $\mathcal{F}$ felületből kimetszett görbéket **normálmetszeteknek** nevezzük. Minden más síkmetszetet **ferdemetszetnek** hívunk.

21. TÉTEL: (Meusnier-tétele (Mönié)) Ha a normálmetszet görbülete $\varkappa_n$, akkor a normálsíktól $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ szöggel elforgatott ferdén metsző sík által kimetszett ferde metszet görbülete :

$$\varkappa = \frac{\varkappa_n}{\cos\varphi}.$$



Bizonyítás. A felületi görbék görbületét megadó

$\varkappa = \frac{1}{\mathbf{mn}} \frac{\overbrace{L\dot{u} + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}}^{\text{második alapforma}}}{\underbrace{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}_{\text{első alapforma}}}$ képletből $\varkappa = \frac{1}{\mathbf{mn}} \frac{Q_2}{Q_1}$, ahol Q_2, Q_1 a második illetve az első alapforma. A normál metszet esetén $\mathbf{m} \parallel \mathbf{n}$, tehát $\varkappa_n = \left|\frac{Q_2}{Q_1}\right|$. Mivel $\varphi = (\mathbf{m}, \mathbf{n})\measuredangle$ vagy $\varphi = \pi - (\mathbf{m}, \mathbf{n})\measuredangle$, így $\cos\varphi = |\mathbf{mn}|$. Tehát $\varkappa = \frac{1}{|\mathbf{mn}|}\left|\frac{Q_2}{Q_1}\right| = \frac{1}{\cos\varphi}\varkappa_n$. Itt felhasználtuk, hogy $\varkappa$ és $\varkappa_n$ definícióból adódóan csak pozitív lehet! ∎

Tehát a ferde metszetek görbülete $\cos\varphi$-vel való osztással (ahol φ a normálsíkkal bezárt szög) határozható meg a normálmetszetből. Ezért ezután csak a **normálmetszet** meghatározásával foglalkozunk, és a rövidség kedvéért $\varkappa$-t írunk $\varkappa_n$ helyett a normálmetszetre.

A normálmetszet görbületének előjelet tulajdonítunk aszerint, hogy $\mathbf{n} = \mathbf{m}$ vagy $\mathbf{n} = -\mathbf{m}$, a $\varkappa$ pozitív vagy negatív. A normálmetszet **előjeles** görbülete tehát

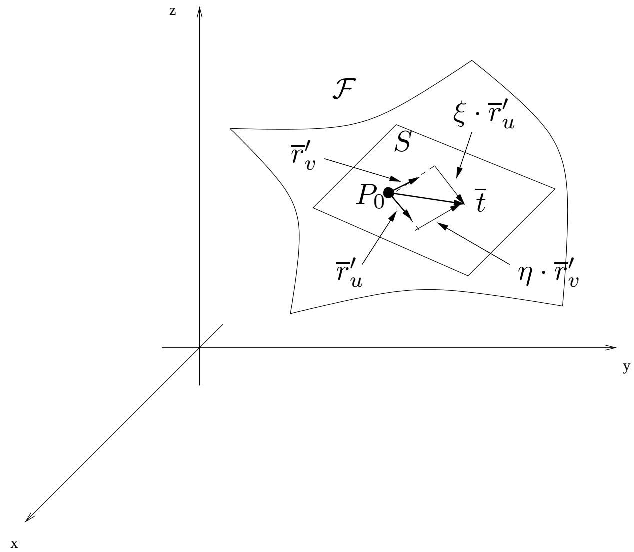
$$\varkappa = \frac{Q_2}{Q_1}.$$

A $\varkappa$-t a normálmetszet előjeles görbületének jelölésére használjuk.

3.3.2. Főgörbületek, főirányok

22. TÉTEL: Legyen $\mathbf{t}$ egy P_0 kezdőpontú egységvektor az $\mathcal{F}$ felület P_0-beli érintősíkjában. Legyen $\mathbf{t}|_{(u_0,v_0)} = \xi\mathbf{r}'_u + \eta\mathbf{r}'_v|_{(u_0,v_0)}$. Ekkor a t-hez tartozó normálmetszet görbülete

$$\varkappa = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2.$$



Bizonyítás. Legyen a felületi görbe ívhossz paraméterezéssel megadva. Ekkor $Q_1 \equiv 1$ és $\bar{t} = \mathbf{r}' = u'\mathbf{r}'_u + v'\mathbf{r}'_v$, így $u' = \xi$, $v' = \eta$. Tehát $\varkappa = L\xi^2 + 2M\xi\xi + N\xi^2$. ∎

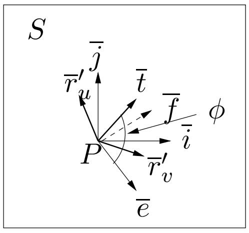
23. TÉTEL: Euler-tétele: A P_0-beli S érintősíkban megadható olyan irány ($\mathbf{e}$) és olyan, csak a P_0-tól függő $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ számok, hogy az $\mathbf{e}$-től φ szöggel elforgatott egyeneshez tartozó normálmetszet görbülete

$$\varkappa = \varkappa_1 \cos^2\varphi + \varkappa_2 \sin^2\varphi.$$

Bizonyítás. Tudjuk (előző tételből), $\mathbf{t} = \xi\mathbf{r}'_u + \eta\mathbf{r}'_v$, akkor $\varkappa = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^{2}$. Vegyünk fel az S-ben egy tetszőleges ortonormált $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ rendszert. ($\mathbf{i}\perp\mathbf{j}$ és $\|\mathbf{i}\| = \|\mathbf{j}\| = 1$.)

Tegyük fel, hogy $\mathbf{t} = \mathbf{xi} + \mathbf{yj}$ (azaz $\mathbf{t}$ koordinátái $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$-ben x és y). Mátrixosan felírva:

$$\varkappa = [\xi, \eta] \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}.$$



Ha áttérünk az $\{\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v\}$ koordinátarendszerről az $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ koordinátarendszerre, akkor $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ valamely 2×2-es B mátrixra. így $[\xi, \eta] = [x, y]\, B^T$. Vagyis $A := B^T \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} B$-re

$$\varkappa = [x, y]\, A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

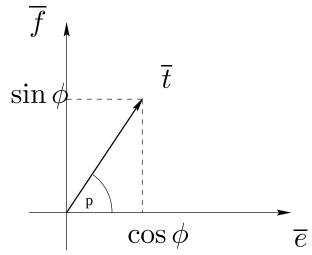
mivel $B^T \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} B$ egy szimmetrikus mátrix, ez a $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ kvadratikus alak főtengely alakra hozható **ortogonális** transzformációval, vagyis a kanonikus alakhoz tartozó $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ bázis is ortonormált! Vagyis $\exists C$ ortogonális mátrix, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$. Tehát $\varkappa = [h, k]\, D \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$, ahol $D = C^T AC$ egy diagonális mátrix, $D = \begin{bmatrix} \varkappa_1 & 0 \\ 0 & \varkappa_2 \end{bmatrix}$. Mivel $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = BC \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$, ezért $\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$ a $\mathbf{t}$ vektor koordinátáit jelenti az $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ bázisban. Mivel $\|t\| = 1$, ezért ha φ a $(\mathbf{t}, \mathbf{e})\measuredangle$, akkor $h = \cos\varphi$ és $k = \sin\varphi$. Így tehát $\varkappa = [\cos\varphi, \sin\varphi] \begin{bmatrix} \varkappa_1 & 0 \\ 0 & \varkappa_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$, vagyis

$$\varkappa = \varkappa_1 \cos^2\varphi + \varkappa_2 \sin^2\varphi.$$

Ezzel bebizonyítottuk a tételt. ■

Észrevétel:

Mivel $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, ezért a $\varkappa$ mindig a $\varkappa_1$ és $\varkappa_2$ közé esik. Ezért a normálmetszetek maximumát és minimumát a $\varkappa_1$ és $\varkappa_2$ adják, hiszen $\varkappa = \varkappa_1 + (\varkappa_2 - \varkappa_1)\sin^2\varphi$, és $0 \le \sin^2\varphi \le 1$.



21. DEFINÍCIÓ: A $\varkappa_1$*és* $\varkappa_2$ görbületet az $\mathcal{F}$ felület P_0 pontbeli **főgörbületeinek,** a hozzájuk tartozó érintő irányokat **főirányoknak,** a főirányokhoz tartozó normálmetszeteket **főmetszeteknek** nevezzük.

22. DEFINÍCIÓ: összeg vagy **Minkowski görbület** : $H := \varkappa_1 + \varkappa_2$.
Szorzat vagy **Gauss görbület**: $K := \varkappa_1 \varkappa_2$

24. TÉTEL:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

ez az első és második alapforma diszkriminánsainak hányadosa, és

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}.$$

Főirányok meghatározása. Egy irányt a P_0-beli érintősíkban egy (ξ, η) párral határozhatunk meg oly módon, hogy a $\xi \mathbf{r}'_u + \eta \mathbf{r}'_v$ amint (ξ, η) adott, kijelöl egy irányt (l. ábra a következő oldalon).

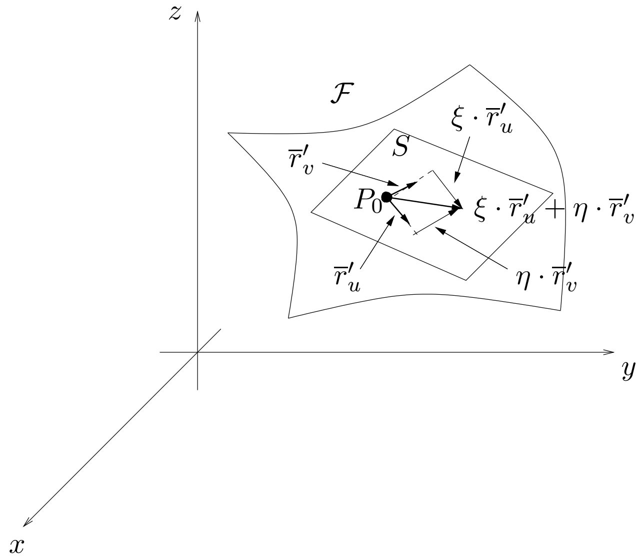
25. TÉTEL: A két főirányt szolgáló (ξ, η) párokat az

$$\begin{vmatrix} \eta^2 & -\xi\eta & \xi^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

másodfokú egyenlet gyökei adják.

Felületi pontok osztályozása. Taylor-tétel egy következménye:

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}(u_0,v_0) + (u-u_0)\,\mathbf{r}'_u(u_0,v_0) + (v-v_0)\,\mathbf{r}'_v(u_0,v_0) +$$
$$+\frac{1}{2}\left[(u-u_0)^2\,\mathbf{r}''_{uu}(u_0,v_0) + 2(u-u_0)(v-v_0)\,\mathbf{r}''_{uv}(u_0,v_0)\,(v-v_0)^2\,\mathbf{r}''_{vv}(u_0,v_0)\right] +$$
$$+\Psi(u,v), \quad (3.6)$$



3.1. ábra. Egy (ξ, η) számpár meghatároz egy irányt az S érintősíkban

ahol $\frac{\Psi(u,v)}{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2} \to 0$.
Legyen

$$\hat{\mathbf{r}}(u,v) = \mathbf{r}(u,v) - \Psi(u,v).$$

Ekkor az $\mathbf{r}(u,v)$ és a másodrendű $\hat{\mathbf{r}}(u,v)$ felületeknek a P_0-ban közös az érintősíkjuk. Ha a koordinátarendszer vektorai az $\{\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v, \mathbf{m}\}$, akkor az $\hat{\mathbf{r}}(u,v)$ egyenlete ebben az új koordinátarendszerben: $Z = \frac{1}{2}\left[Lx^2 + 2Mxy + ny^2\right]$ adódik. (Az $\hat{\mathbf{r}}$ definíciójában beszorzunk $\mathbf{m}$-mel, és észrevesszük, hogy az $\{\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v, \mathbf{m}\}$-ben $\mathbf{r}(u_0, v_0) = \mathbf{0}$, és $\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v \perp \mathbf{m}$.

Ebből az következik, hogy az $\hat{\mathbf{r}}(u,v)$ felület

- elliptikus paraboloid ,vagy

- hiperbolikus paraboloid,vagy

- parabolikus henger,

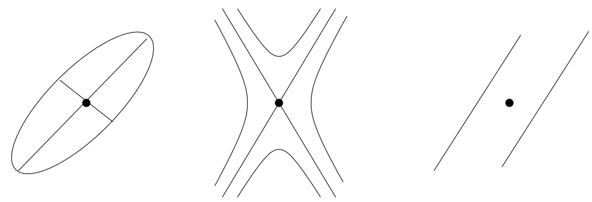
attól függően, hogy az $Lx^2 + 2Mxy + Ny^2$ kvadratikus forma **definit, indefinit,** vagy **szemidefinit.**

(*Emlékeztető:* Egy $Q(x,y)$ kvadratikus forma **pozitív definit**, ha $Q(x,y) > 0\ \forall (x,y) \neq \mathbf{0}$, **pozitív szemidefinit,** ha $Q(x,y) \geq 0\ \forall (x,y)$-ra, de létezik $(x,y) \neq \mathbf{0}$, hogy $Q(x,y) = 0$. **Indefinit,** ha $\exists (x_1, y_1)$ és (x_2, y_2), hogy $Q(x_1, y_1) > 0$; $Q(x_2, y_2) < 0$).

Az $\hat{\mathbf{r}}(u,v)$ felületet a P_0 pontbeli **simuló paraboloidnak** hívjuk. Az $\{\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v, \mathbf{m}\}$ koordinátarendszerben messük el a simuló paraboloidot a $z = \frac{1}{2}$ és $z = -\frac{1}{2}$ síkokkal. (Ezek az érintősíkkal P_0-beli párhuzamos síkok.) Ezután a metszet görbét vetítsük merőlegesen ($\{\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v, \mathbf{m}\}$-beli koordinátarendszerben) az $\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v$ síkjára (ez a P_0-beli érintősík). Ezek a vetületek görbék az $\{\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v, \mathbf{m}\}$ rendszerben:

$$Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = 1 \qquad \text{és} \qquad Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = -1$$

Ezek alakja lehet:



a b c

- ellipszis, ebben az esetben a P_0 pont **elliptikus**

- konjugált hiperbolapár, ebben az esetben a P_0 pont **hiperbolikus**

- párhuzamos egyenes, ekkor a P_0 pont **parabolikus**

Ha egy P_0 pontban $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$, akkor ez egy **planáris pont.**

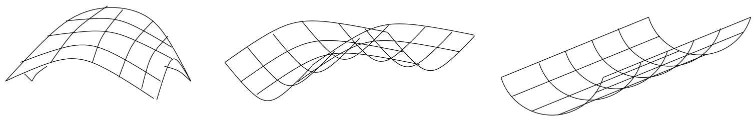
26. TÉTEL: A P_0 pont aszerint elliptikus, hiperbolikus, vagy parabolikus, amint:

(i) $\varkappa$ (a különböző irányokban a P_0 pontban) jeltartó, jelváltó, vagy jeltartó, de 0-t is felvesz.

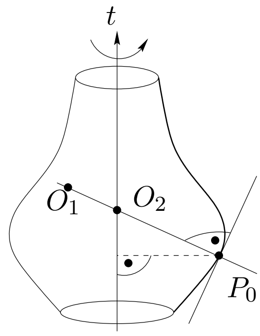
(ii) Q_2 definit, indefinit, vagy szemidefinit.

(iii) $K > 0$, $K < 0$, $K = 0$, de $\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 \neq 0$.

(iv) $LN - M^2 > 0$, $LN - M^2 < 0$, $LN - M^2 = 0$



a b c



Forgásfelület pontjainak osztályozása. Forgassuk meg a g görbét a t tengely körül. Az így keletkező $\mathcal{F}$ forgásfelület pontjait akarjuk osztályozni.

Ekkor a g görbét **medián görbének** nevezzük. Az egyik főmetszet éppen a medián görbe.

Az ehhez tartozó símulókör középpontját nevezzük O_1T-nek. A másik főmetszet símulókörének középpontja O_2 a felületi merőleges és a tengely metszete.

A P_0 pont **elliptikus,** ha O_1 és O_2 az érintősík **azonos oldalán** van, azaz a tengely felől nézve a medián görbe **konkáv.**

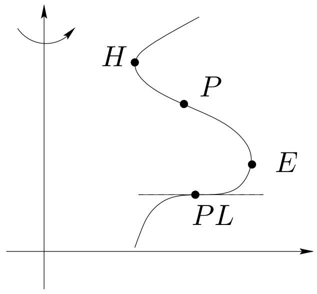
A P_0 pont **hiperbolikus,** ha O_1 és O_2 az érintősík **ellentétes oldalain** vannak, vagyis a medián görbe a tengely felől nézve konvex.

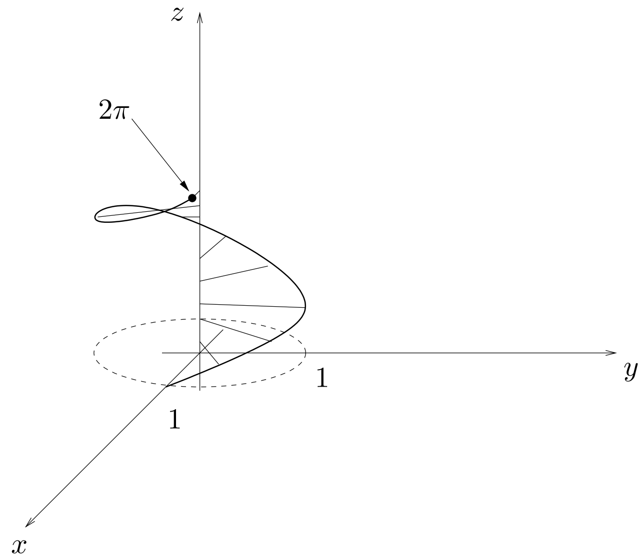
A P_0 pont **planáris**, ha a medián görbe görbülete zérus (pl. az inflexiós érintő merőleges a tengelyre).

41. PÉLDA:

H	hiperbolikus pont
P	parabolikus pont
E	elliptikus pont
PL	planáris pont

42. PÉLDA: Legyen $\mathbf{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)\,,\ 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 2\pi$. A felület úgy adódik, ha a csavarvonal minden pontját a saját magasságában (az x síkkal párhuzamos) szakasszal összekötjük a z-tengellyel.)





Feladat: Számítsuk ki a felület egy általános pontjában a főirányokat és a főgörbületeket!

Megoldás:

1. lépés: **Alapmennyiségek meghatározása:**

$$\mathbf{r}'_u(u,v) = (\cos v, \sin v, 0)\,;\ \mathbf{r}'_v(u,v) = (-u\sin v, u\cos v, 1)$$

$$\mathbf{r}''_{uu}(u,v) = (0,0,0)\,;\ \mathbf{r}''_{uv}(u,v) = (-\sin v, \cos v, 0)\,;$$

$$\mathbf{r}''_{vv}(u,v) = (-u\cos v, -u\sin v, 0).$$

$$E = \mathbf{r}'^2_u \equiv 1;\ F = \mathbf{r}'_u\mathbf{r}'_v \equiv 0;\ G = \mathbf{r}'^2_v = u^2+1$$

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v|} = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}(\sin v, -\cos v, u)$$

$$\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{vmatrix} = (\sin v, -\cos v, u)$$

$$|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| = \sqrt{\sin^2 v + \cos^2 v + u^2} = \sqrt{u^2+1}$$

$$L = \mathbf{r}''_{uu}\mathbf{m} = \mathbf{0m} \equiv 0; M = \mathbf{r}''_{uv}\mathbf{m} =$$
$$= (-\sin v, \cos v, 0)(\sin v, -\cos v, u)\frac{1}{\sqrt{u^2+1}} = -\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}; \quad (3.7)$$

$$N = \mathbf{r}''_{vv}\mathbf{m} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)(\sin v, -\cos v, u)\tfrac{1}{\sqrt{u^2+1}} \equiv 0$$

2. lépés: $\varkappa_1, \varkappa_2$ **meghatározása:**

Tudjuk, hogy

$$K = \varkappa_1\varkappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-\frac{1}{u^2+1}}{u^2+1} = -\frac{1}{(u^2+1)^2}.$$

Szintén tudjuk, hogy

$$H = \varkappa_1 + \varkappa_2 = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} = \frac{1\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot \frac{-1}{\sqrt{u^2+1}} + (u^2+1)\cdot 0}{1\,(u^2+1) - 0} \equiv 0.$$

A főgörbületeket, $\varkappa_1, \varkappa_2$ meghatározhatjuk a másodfokú egyenleteknél ismert *gyökök és együtthatók* közti összefüggésből, ugyanis $\varkappa_1, \varkappa_2$ kielégíti az $\varkappa^2 - H\varkappa + K = 0$ egyenletet, mivel $H = \varkappa_1 + \varkappa_2$ és $K = \varkappa_1\varkappa_2$. Tehát $\varkappa_1, \varkappa_2$ értékét megkapjuk, ha az $\varkappa^2 - H\varkappa + K = 0$ egyenletet megoldjuk $H = 0$ és $K = -\frac{1}{(u^2+1)^2}$-re. Az eredmény: $\varkappa^2 - \frac{1}{(u^2+1)^2} = 0 \Rightarrow \varkappa_1 = \frac{1}{u^2+1}$; $\varkappa_2 = -\frac{1}{u^2+1}$.

3. lépés: **Főirányok meghatározása:**

Tudjuk, hogy a főirányok olyan $\mathbf{t} = \xi\mathbf{r}'_u + \eta\mathbf{r}'_v$ vektorok, amelyeknél a ξ, η-ra

$$\begin{vmatrix} \eta^2 & -\xi\eta & \xi^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Mivel ebben az esetben nem kell hogy $\mathbf{t}$ egységvektor legyen, **csak** a $\frac{\xi}{\eta}$ arány számít az irány meghatározásakor, vagyis a determináns első sorában

η^2-tel osztva kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{\xi}{\eta} & \frac{\xi^2}{\eta^2} \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Behelyettesítve:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{\xi}{\eta} & \frac{\xi^2}{\eta^2} \\ 1 & 0 & u^2+1 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{u^2+1}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{c} \frac{\xi}{\eta} = \sqrt{u^2+1} \\ \text{vagy} \\ \frac{\xi}{\eta} = -\sqrt{u^2+1} \end{array}.$$

Vagyis $\xi_1 = \sqrt{u^2+1}$, $\eta_1 = 1$ és $\xi_2 = -\sqrt{u^2+1}$, $\eta_2 = 1$.

Az egyik főirány:

$$\begin{aligned} \xi_1 \mathbf{r}'_u + \eta_1 \mathbf{r}'_v &= \sqrt{u^2+1}\,(\cos v, \sin v, 0) + (-u\sin v, u\cos v, 1) = \\ &= \left(\sqrt{u^2+1}\cos v - u\sin v, \sqrt{u^2+1}\sin v + u\cos v, 1\right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

A második főirány:

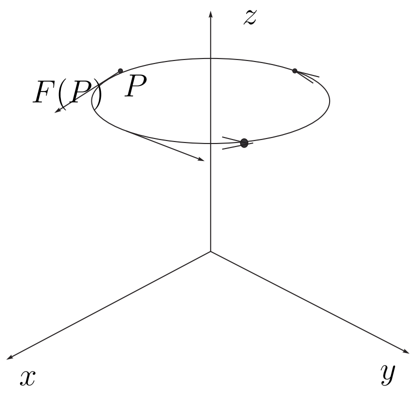
$$\begin{aligned} \xi_2 \mathbf{r}'_u + \eta_2 \mathbf{r}'_v &= -\sqrt{u^2+1}\,(\cos v, \sin v, 0) + (-u\sin v, u\cos v, 1) = \\ &= \left(-\sqrt{u^2+1}\cos v - u\sin v, -\sqrt{u^2+1}\sin v + u\cos v, 1\right). \end{aligned} \tag{3.9}$$

4. fejezet

Vektoranalízis

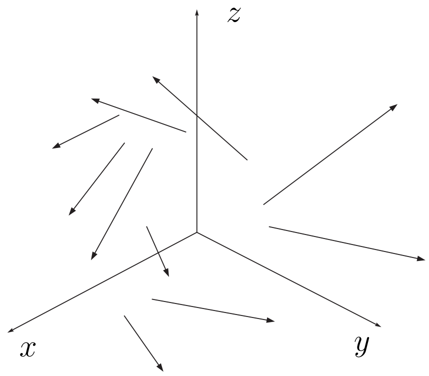
4.1. Vektorterek

43. PÉLDA: Forgassuk a teret a z tengely körül ω szögsebességgel!



4.1. ábra. z tengely körüli ω szögsebességű forgatás

(Ez $\frac{\omega}{2\pi}$ körülfordulást jelent másodpercenként.)
Ekkor a tér egy P pontjának a pályája egy xy-síkkal párhuzamos kör. Ha $\vec{F}(P)$ a P pont sebességvektora, akkor amint a fizikában tanultuk:$F(x, y, z) = (-\omega y, \omega x, 0)$, ha $P(x, y, z)$. Ez egy úgynevezett *vektorteret* definiál. Vagyis a tér minden egyes (x, y, z) pontjához hozzárendelünk egy vektort az $(x, y, z) \rightarrow (-\omega x, \omega y, 0)$ szabállyal.



4.2. ábra. Vektortér: a tér minden pontjához egy vektort rendelünk.

44. PÉLDA: Legyen $f(x, y, z) = xyz$ (vagyis $f{:}\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$) ez NEM vektortér, hiszen az f a tér minden pontjának egy számot, (xyz)-t feleltet meg. Az ilyen függvényeket *skalártérnek* is hívjuk. Azonban a $grad(f)$ már egy vektortér, hiszen $grad(f) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Nevezetesen $grad(f)(x, y, z) = (yz, xz, xy)$. Az $\vec{F} = grad(f)$ (ahol $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$) alakú vektortereket *gradiens vektortereknek* hívjuk.

A továbbiakban gyakran használjuk az

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \tag{4.1}$$

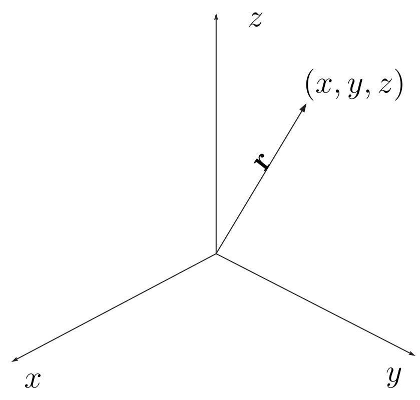
jelölést. Vagyis $\mathbf{r}$ jelenti az általános (x, y, z) pont helyvektorát. Ezt azért vezetjük be, hogy bizonyos vektorterek felírása egyszerűbb legyen. Az $\mathbf{r}$ hosszát r-rel jelöljük. Tehát

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

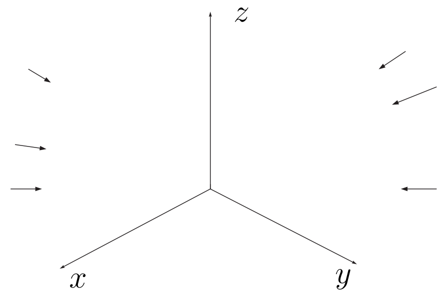
Legyen P egy egységnyi tömegű pont, melynek koordinátái (x, y, z) és az origóban a Föld középpontja, M van. Határozzuk meg azt az $\vec{F}(P)$ erőt, amellyel az M vonzza a P-t.

Newton törvénye szerint $\vec{F}(P)$ iránya a $\overrightarrow{PM}$ iránya és az $\vec{F}(P)$ hossza fordítva arányos r^2-tel. Ebből: $\vec{F}(\mathbf{r}) = -k\frac{\mathbf{r}}{r^3}$, ahol $k > 0$. Vagyis

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-ky}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right).$$



4.3. ábra. Az **r** definíciója.



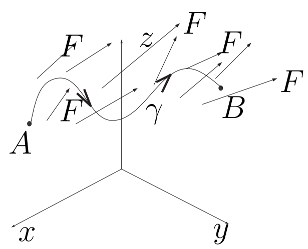
4.4. ábra. A F vektortér

Az ilyen vektortereket erőtereknek is hívhatjuk.

Fordítva: Ha adott egy $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vektortér, akkor ezt felfoghatjuk, mint egy térben áramló folyadék sebességterét, vagy mint valamiféle erőteret. Ez segíti a szemléletet, mert ennek a vektoranalízis fejezetnek minden része fizikai indíttatású.

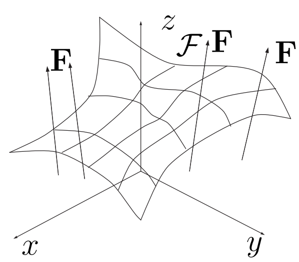
Két alapkérdést fogunk megválaszolni:

1.Kérdés: Adott egy γ irányított görbe a térben és egy erőtér, $\vec{F}$. Hogyan számolhatjuk ki a γ-án futó pontnak az erőtér ellenében végzett munkáját? (Vagy a ponton az erőtér által végzett munkát?)



4.5. ábra. γ irányított görbe a térben és az $\mathbf{F}$ vektortér

2.Kérdés: Adott egy $\vec{F}$-sebességtér szerint áramló folyadék (időben állandó). Kérdés: Mekkora egy $\mathcal{F}$ felületen időegység alatt átáramló folyadék térfogata?



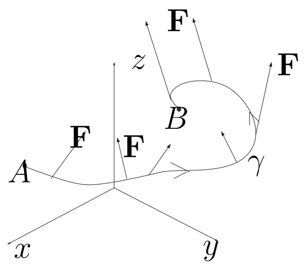
4.6. ábra. Fluxus: a felületen időegység alatt áthaladó folyadék előjeles térfogata

Ezt a térfogatot definíció szerint az $\vec{F}$-nek a $\mathcal{F}$-re vonatkozó *fluxusának* hívjuk.
A fenti *1. kérdésre* a vonalmenti integrál, míg a *2. kérdésre* a felületmenti integrál segítségével adjuk meg a választ.

4.2. Vonalmenti integrál

Adott egy γ irányított görbe, melynek paraméterezése: $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$ és $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. (Minden komponens függvény minden parciális deriváltja létezik, és kétszer folytonosan deriválható a γ egy környezetében.) Ezeket a feltételeket a "Vonalmenti integrál" fejezetben mindig használjuk.

23. DEFINÍCIÓ: Az $\vec{F}$ erőtér által a γ-án A-ból B-be mozgó ponton végzett munkát vonalmenti integrálnak nevezzük (pontosabban az $\vec{F}$ vonalmenti integráljának a γ-án. Jele: $\int\limits_{\gamma} \vec{F}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$.



4.7. ábra. Vonalmenti integrál

Tehát a matematikában a *vonalmenti integrál* az a mennyiség, ami a fizikában tanult *munka* fogalmának felel meg.

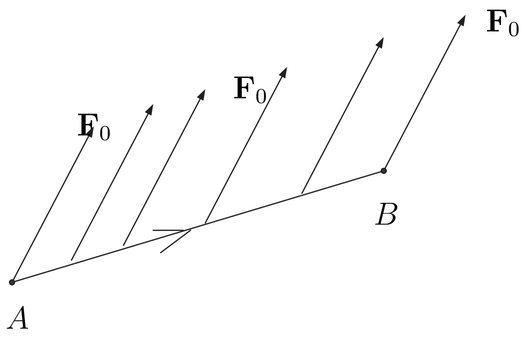
Hogyan számoljuk ki a munkát?

Munka = (elmozdulás irányába eső erő)·(elmozdulás).
Első lépés: Tegyük fel először, hogy a γ görbe egy *egyenes* AB szakasz, az $\vec{F}$ erőtér pedig minden pontban egy *konstans* $\vec{F}_0$ erő.
Ekkor az $\vec{F}_0$-nak az $\overrightarrow{AB}$ irányába eső merőleges vetületvektora: $\vec{F}_0 \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$, ez az elmozdulás irányába eső erő, szorozva az elmozdulással: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, adja a munkát, ami

$$W = \vec{F}_0 \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} \left|\overrightarrow{AB}\right| = \vec{F}_0 \overrightarrow{AB}$$

Második lépés: A munka általános γ görbe, és általános $\vec{F}$ vektortér esetén:

Ezt a problémát az első lépésben tárgyalt esetre visszavezetve oldjuk meg. Beosztjuk a γ görbe $[a, b]$ paraméter intervallumát n részre, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ úgy, hogy $\max\limits_{1 \le i \le n} \{t_i - t_{i-1}\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.



4.8. ábra. Konstans vektortér vonalmenti integrálja egyenes szakaszon

Minden $1 \leq i \leq n$ -re legyen P_i az a pont, melynek helyvektora $\mathbf{r}(t_i)$. A γ görbének a (P_{i-1}, P_i) ívét a $\triangle\mathbf{r}_i = \overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ vektorral helyettesítjük. Ezen a $\triangle\mathbf{r}_i$ szakaszon alkalmazva az első pont eredményét $\triangle\mathbf{r}_i \cdot \vec{F}(\mathbf{r}(t_{i-1}))$ a végzett munka közelítőleg, ha az $\vec{F}$-et konstansnak tekintjük a $\triangle\mathbf{r}_i$-n. Tehát nagy n-re a $t_{i-1,}$ t_i paraméterekhez tartozó $\mathbf{r}(t_{i-1})$, $\mathbf{r}(t_i)$ íven végzett munka közelítőleg: $\vec{F}(\mathbf{r}(t_{i-1}))[\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})] \approx \vec{F}(\mathbf{r}(t_{i-1}))\dot{\mathbf{r}}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})$. Ezeket összegezve a munka:

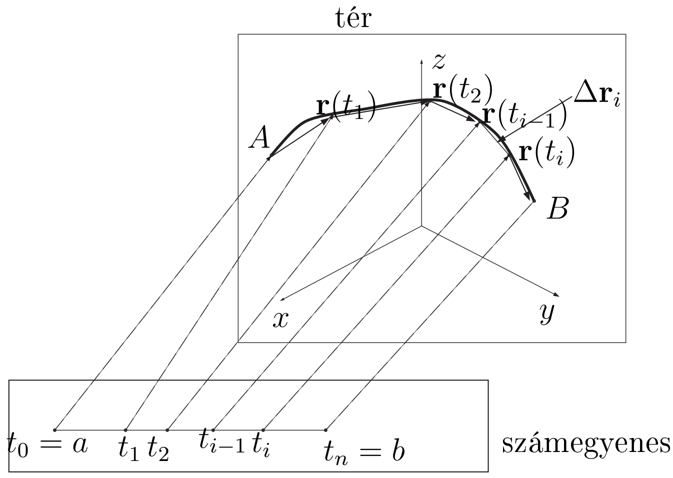
$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\mathbf{r}(t_{i-1}))\dot{\mathbf{r}}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b \vec{F}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t)\,dt.$$

Tehát azt kaptuk, hogy az $\int_\gamma \vec{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ vonalmenti integrált a következőképpen számíthatjuk ki:

27. TÉTEL:

$$\int_\gamma \vec{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int_a^b \vec{F}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t)\,dt$$

45. PÉLDA: Legyen $\vec{F}(x, y, z) = (x, yz, y)$ és γ paraméterezése:



4.9. ábra. Munka általános görbén

$\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ $0 \le t \le 1$ (l. ábra 4.10). Ekkor

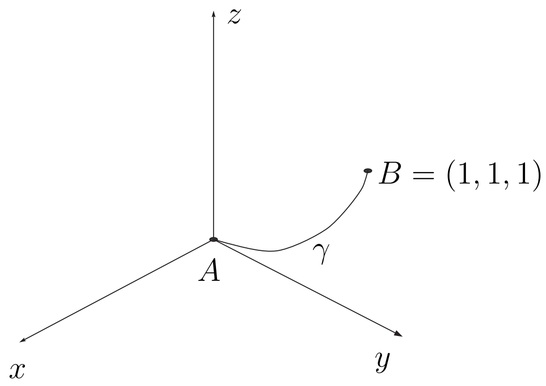
$$\int\limits_{\gamma} \vec{F}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \int\limits_0^1 \underbrace{\left(t, t^5, t^2\right)}_{\vec{F}(\mathbf{r}(t))} \underbrace{\left(1, 2t, 3t^2\right)}_{\dot{\mathbf{r}}(t)} dt = \int\limits_0^1 \left(t + 2t^6 + 3t^4\right) dt =$$
$$= \left[\frac{t^2}{2} + \frac{2}{7}t^7 + \frac{3}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{7} + \frac{3}{5} = \frac{97}{70}. \tag{4.2}$$

A megoldás folyamán először lokalizáltuk az $\vec{F}$-et a γ-ra, $\vec{F}(\mathbf{r}(t))$-t kiszámoltuk. Ez úgy történik, hogy az $\vec{F}(x, y, z) = (x, yz, y)$ képletében a jobb oldalon $\forall x$ helyébe az $\mathbf{r}(t)$ első komponens függvényét, t-t írjuk, $\forall y$ helyébe az $\mathbf{r}(t)$ második komponens függvényét, t^2-t írjuk, $\forall z$ helyébe az $\mathbf{r}(t)$ harmadik komponens függvényét, t^3-t írjuk.

$\vec{F}(\mathbf{r}(t)) = (t, t^2 \cdot t^3, t^2)$, majd az $\dot{\mathbf{r}}(t)$-t kiszámítjuk $\dot{\mathbf{r}}(t) = (1, 2t, 3t^2)$. Ezután meghatározzuk az $\vec{F}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)$ skaláris szorzatot, ami egy t-től függő valós értékű függvény, és ezt a szokásos módon kiintegráljuk az $[a, b]$-n.

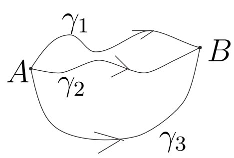
4.2.1. Vonalintegrál függetlensége az úttól

A kérdés az, hogy milyen feltételek esetén lesz igaz, hogy rögrzített A és B pontok esetén az A és B-t összekötő bármely két görbére az $\vec{F}$ vektortér



4.10. ábra. A γ görbe

vonalmenti integrálja megegyezik, vagyis a munka független az úttól, csak az erőtértől és az elmozdulás A és B végpontjaitól függ?



4.11. ábra. Vonalintegrál úttól való függetlensége.

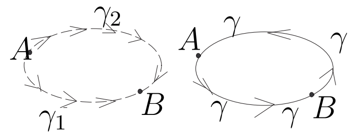
24. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy egy $\vec{F}$ vektortér *konzervatív*, ha az $\vec{F}$ gradiens vektortér. Vagyis $\vec{F} = grad\ f$ valamely $f : H \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ függvényre, ekkor az f függvény az $\vec{F}$ vektortér *potenciál függvénye.*

25. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy *az $\vec{F}$ vektortér vonalmenti integrálja független az úttól*, ha bármely A és B pontokra és ezeket összekötő bármely két γ_1, γ_2 irányított egyszerű görbeívekre, melyek kezdőpontja A, és végpontja B

$$\int_{\gamma_1} \vec{F}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} \tag{4.3}$$

teljesül, feltéve, hogy a γ_1 és γ_2 végig az $\vec{F}$ értelmezési tartományában halad.

3. MEGJEGYZÉS: Vegyük észre, ha az $\vec{F}$ vonalmenti integrálja független az úttól, akkor $\forall$ zárt γ görbére $\int\limits_{\gamma} \vec{F}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = 0$, hiszen $\int\limits_{\gamma} \vec{F}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \int\limits_{\gamma_1} \vec{F}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} - \int\limits_{\gamma_2} \vec{F}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = 0$.



4.12. ábra. Vonalintegrál úttól való függetlensége esetén zárt görbén vett integrál egyenlő nullával.

Ebben a fejezetben az a célunk, hogy találjunk olyan feltételt, amely segít annak eldöntésében, hogy egy adott vektortér vonalintegrálja független-e az úttól. Ehhez nélkülözhetetlen a következő fogalom bevezetése és annak tanulmányozása:

26. DEFINÍCIÓ: $curl\left(\vec{F}\right)$ vagy $rot\left(\vec{F}\right)$ definíciója:

(a) Ha $\vec{F}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ egy síkbeli vektortér, akkor ha $\vec{F} = (F_1, F_2)$, az $\vec{F}$ rotációja: $rot\left(\vec{F}\right) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F1}{\partial y}$. Néha azt írjuk, hogy $curl\left(\vec{F}\right)$ a $rot\left(\vec{F}\right)$ helyett. A $curl\left(\vec{F}\right)$ vagy $rot\left(\vec{F}\right)$ (ugyanazt jelentik) értéke tehát síkbeli vektortér esetén egy valós szám.

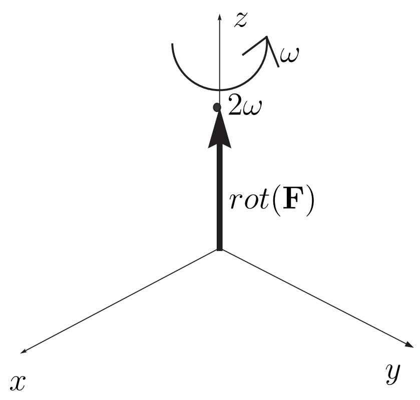
(b) Ha $\vec{F}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ egy térbeli vektortér, akkor ha $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ a $curl\left(\vec{F}\right) = rot\left(\vec{F}\right)$ egy vektor:

$$curl\left(\vec{F}\right) = rot\left(\vec{F}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}; \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}; \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

46. PÉLDA: A z tengely körül ω szögsebességgel való forgás sebességtere: $\vec{F}(x,y,z) = (-\omega y, \omega x, 0)$. Ennek rotációja:

$$rot\left(\vec{F}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = (0,0,2\omega).$$

Tehát a z tengellyel párhuzamos és felfelé mutató 2ω hosszú vektor.



4.13. ábra. A z tengely körüli ω szögsebességű forgatás rotációja.

47. PÉLDA: $\vec{F}(\mathbf{r}) = \frac{-k\mathbf{r}}{r^3}$ gravitációs vektortér, ahol $k > 0$ valós szám. Kérdés a $curl\left(\vec{F}\right)$ értéke.

Megoldás:

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-kx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-ky}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-kz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$rot\left(\vec{F}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-kx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-ky}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-kz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{vmatrix}$$

$$3\left((x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\right)k\,(yz-yz,\ -xz+zx,\ xy-xy) \equiv (0,0,0) = \mathbf{0}$$

Diszkutálva a fenti két példát látható, hogy a rotáció az örvényléssel kapcsolatos, hiszen a gravitációs vektortérnél a második példában minden vektor az origó felé mutat. Itt nincs örvénylés, ezért a $rot\left(\vec{F}\right) = \mathbf{0}$. Míg a forgómozgást leíró első példabeli vektortér rotációja nem tűnik el sehol sem.

48. PÉLDA: $\vec{F}(x,y) = (-\omega y, \omega x)$, ez az ω szögsebességű origó körüli forgás sebességtere az xy síkban. $curl\left(\vec{F}\right) = \omega + \omega = 2\omega$.

49. PÉLDA: Legyen $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ tetszőleges kétszer folytonosan differenciálható függvény és $\vec{F} = grad\,(f)$. Ekkor

$$rot\left(\vec{F}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f'_x & f'_y & f'_z \end{vmatrix} = \left(\underbrace{f''_{zy} - f''_{yz}}_{0}, \underbrace{f''_{xz} - f''_{zx}}_{0}, \underbrace{f''_{yx} - f''_{xy}}_{0} \right) = \mathbf{0},$$

mivel a vegyes parciális deriváltaknál a deriválás sorrendje felcserélhető. Tehát azt a nagyon fontos megállapítást tettük, hogy konzervatív (gradiens) vektortér rotációja MINDIG azonosan a ZÉRUS VEKTOR!

28. TÉTEL: Egy $\vec{F}$ vektortér vonalmenti integrálja akkor és csak akkor független az úttól, ha $\vec{F}$ konzervatív.

Tehát a fő problémánk az, hogy megtaláljuk azon vektortereket, melyek vonalmenti integrálja független az úttól. Ez megoldódik, ha megtaláljuk a konzervatív vektortereket. Maradt tehát a következő kérdés:

Adott egy $\vec{F}$ vektortér. Hogyan döntjük el, hogy konzervatív-e?

A választ a curl-teszt adja. A válasz nem "akkor és csak akkor" típusú, hanem elégséges, de nem szükséges feltételt ad. Az itteni curl-tesztnél létezik erősebb állítás, amely viszont egy bonyolultabb fogalmat tartalmaz, nevezetesen az egyszerűen összefüggő halmaz fogalmát.

4.2.2. Curl-teszt a síkban

Adott egy $\vec{F} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ síkbeli vektortér, $\vec{F} = (F_1, F_2)$.

I. Ha a $curl\left(\vec{F}\right)$ akárcsak egyetlen pontban is zérustól különböző értéket vesz fel, akkor $\vec{F}$ NEM konzervatív.

II. Tegyük fel, hogy $curl\left(\vec{F}\right) \equiv \mathbf{0}$.

A eset: Az $\vec{F}$ minden komponens függvényének parciális deriváltja: $\frac{\partial F_1}{\partial x}$, $\frac{\partial F_2}{\partial x}$, $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, $\frac{\partial F_2}{\partial y}$ a sík MINDEN pontjában definiálva van. Ekkor az $\vec{F}$ *konzervatív.*

B eset: Van olyan pont, amelyben legalább az egyik parciális derivált nem definiált. Ekkor a teszt nem mond semmit, tehát ekkor a curl-teszt inconclusive (hatástalan, nem mond semmit). Lehet, hogy az $\vec{F}$ konzervatív, de az is lehet, hogy nem.

4.2.3. Curl-teszt a térben

Adott egy $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vektortér a térben. $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$

I. Ha a $curl\left(\vec{F}\right)$ akárcsak egyetlen pontban is zérustól különböző értéket vesz fel, akkor az $\vec{F}$ NEM konzervatív.

II. Tegyük fel, hogy $curl\left(\vec{F}\right) \equiv \mathbf{0}$.

A eset: Ha mind a kilenc parciális derivált: $\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial F_3}{\partial z}$ értelmezve van minden pontban, *kivéve esetleg véges sok pontot,* akkor az $\vec{F}$ *konzervatív.*

B eset: Ha a fenti kilenc parciális derivált közül legalább egy nincs értelmezve végtelen sok pontban, akkor a curl-teszt inconclusive, tehát az is lehet, hogy az $\vec{F}$ konzervatív, és az is, hogy nem. A curl-teszttel ezt nem tudjuk eldönteni.

50. PÉLDA: Legyen $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$. Ekkor $\vec{F}$ egy síkbeli vektortér. $curl\left(\vec{F}\right) = \mathbf{0}$, de $\vec{F}$ nincs értelmezve az origóban, így a II/B eset áll fenn, vagyis a curl-teszt inconclusive.

51. PÉLDA: $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $\vec{F}(\mathbf{r}) = -k\frac{\mathbf{r}}{r^3}$. Már beláttuk, hogy $curl\left(\vec{F}\right) \equiv \mathbf{0}$. Az egyetlen pont, ahol $\vec{F}$ nincs értelmezve az origó. Az összes többi pontban mind $\vec{F}$, mind a kilenc parciális derivált értelmezve van, így az $\vec{F}$ konzervatív.

4.2.4. Potenciálfüggvény meghatározása

Ha $\vec{F}$ egy konzervatív vektortér, akkor van potenciálfüggvénye, vagyis létezik $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, amire $\vec{F} = grad\,(f)$. A potenciálfüggvény meghatározását egy konkrét példán mutatjuk be.

52. PÉLDA: $\vec{F}(x,y,z) = (1+4y+5z,\ 2+4x,\ 3+5x)$. Ekkor

$$curl\left(\vec{F}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1+4y+5z & 2+4x & 3+5z \end{vmatrix} \equiv (0,0,0) \equiv \mathbf{0}.$$

Másrészt az összes parciális derivált mindenütt értelmezett, így az $\vec{F}$ konzervatív a curl-teszt szerint. Tudjuk, hogy $f'_x = 1+4y+5z \Rightarrow f(x,y,z) = \int (1+4y+5z)\,dx + g(y,z) = x+4xy+5xz+g(y,z)$. Másrészt:

$$f'_y = 2+4x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(x+4xy+5xz+g(y,z)\right) = 4x + g'_y(x,y).$$

Vagyis

$$4x + g'_y(y,z) = 2+4x \Rightarrow g'_y(y,z) = 2 \Rightarrow g(y,z) = 2y + h(z).$$

Tehát

$$f(x,y,z) = x+4xy+5xz+2y+h(z).$$

Így, mivel

$$f'_z = 3+5x \Rightarrow 5x + h'(z) = 3+5x \Rightarrow h'(z) = 3 \Rightarrow h(z) = 3z + c.$$

Ezért

$$f(x,y,z) = x+4xy+5xz+2y+3z+c.$$

(Az előző feladatot találgatással is megoldhattuk volna.)

53. PÉLDA: $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}; \frac{x}{x^2+y^2}; -4\right)$. A kérdés az, hogy konzervatív-e az $\vec{F}$?

Megoldás: $curl\left(\vec{F}\right) \equiv \mathbf{0}$, amint azt triviális látni! Azonban az $\vec{F}$ nem definiált a z tengely pontjaiban, tehát végtelen sok pontban, így a II/B eset áll fent, a curl-teszt tehát nem segít! Legyen γ az $x^2+y^2=1$ és $z=12$

kör, amely a pozitív irányba irányított. Számítsuk ki $\int\limits_\gamma \vec{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ értékét! Ha kiderül, hogy $\int\limits_\gamma \vec{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} \neq 0$, akkor ebből adódik, hogy $\vec{F}$ nem konzervatív. Tanultuk ugyanis (l. 3. Megjegyzés), hogy konzervatív vektorterek zárt görbén vett vonalmenti integrálja zérus. A γ paraméterezése: $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $z(t) \equiv 12$ és $0 \le t \le 2\pi$; vagyis: $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 12)$.
Tehát:
$\vec{F}(\mathbf{r}(t)) = \left(\frac{-\sin t}{1}, \frac{\cos t}{1}, -4\right)$, $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$.
$\vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = \sin^2 t + \cos^2 t \equiv 1$. $\int\limits_\gamma \vec{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int\limits_0^{2\pi} \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\,dt = \int\limits_0^{2\pi} 1dt = 2\pi \neq 0$. Tehát $\int\limits_\gamma \vec{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} \neq 0$, így az $\vec{F}$ nem konzervatív.

A következő tétel azt mutatja, hogy konzervatív vektortér esetén két pont közötti elmozdulás során végzett munka a pontenciál függvény ezen pontokban vett értékeinek a különbsége.

29. TÉTEL: Legyen $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ egy minden pontban értelmezett gradiens vektor tér. Nevezzük az $\vec{F}$ potenciál függvényét f-nek. Tehát: $\vec{F} = grad(f)$. Legyen γ egy görbe, melynek kezdőpontja A és végpontja B. Ekkor

$$\int\limits_\gamma \vec{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = f(B) - f(A).$$

Bizonyítás. Legyen a γ egy paraméterezése $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$. Tekintsük a

$$g(t) = f(\mathbf{r}(t))$$

függvényt. Mivel ez egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, alkalmazhatjuk rá a Newton-Leibniz tételt. Használva, hogy

$$g'(t) = grad(f)(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t).$$

Tehát

$$f(B) - f(A) = g(b) - g(a) = \int\limits_a^b g'(t)dt = \int\limits_a^b \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}(t) = \int\limits_\gamma \vec{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r}.$$

■

54. PÉLDA: Legyen a γ görbe adva az $\mathbf{r}(t) = (t,\ 2t^3,\ 3t^2)$, ahol $0 \leq t \leq 1$, paraméterezéssel. Számítsuk ki az $\int_\gamma \vec{F}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$ értékét, ha

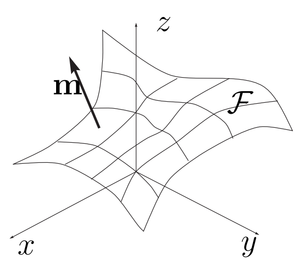
$$\vec{F}(x, y, z) = grad(e^{x+y+z+1})!$$

Megoldás: A γ görbe az origót köti össze az $A(1, 2, 3)$ ponttal, és az $\vec{F}$ potenciálfüggvénye: $f(x, y, z) = e^{x+y+z+1}$. Tehát

$$\int_\gamma \vec{F}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = f(1, 2, 3) - f(0, 0, 0) = e^7 - e.$$

4.3. Felületmenti integrál

Legyen $\mathcal{F}$ egy elemi felület, és $\mathbf{r} : T \to \mathbf{R}^3$ egy paraméterezése $\mathcal{F}$-nek. Legyen továbbá $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ egy vektortér, ami legalább kétszer folytonosan differenciálható. Képzeljük el, hogy egy folyadék úgy áramlik, hogy a tér bármely P pontjában $\vec{F}(P)$ a folyadék sebessége minden időpontban. Az $\mathcal{F}$ felületet irányíthatjuk vagy az $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$, vagy a $-\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ normálvektorral. Ezáltal a felület irányított felületté válik.



4.14. ábra. A nomálvektor $\mathbf{m} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ vagy $\mathbf{m} = -\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$

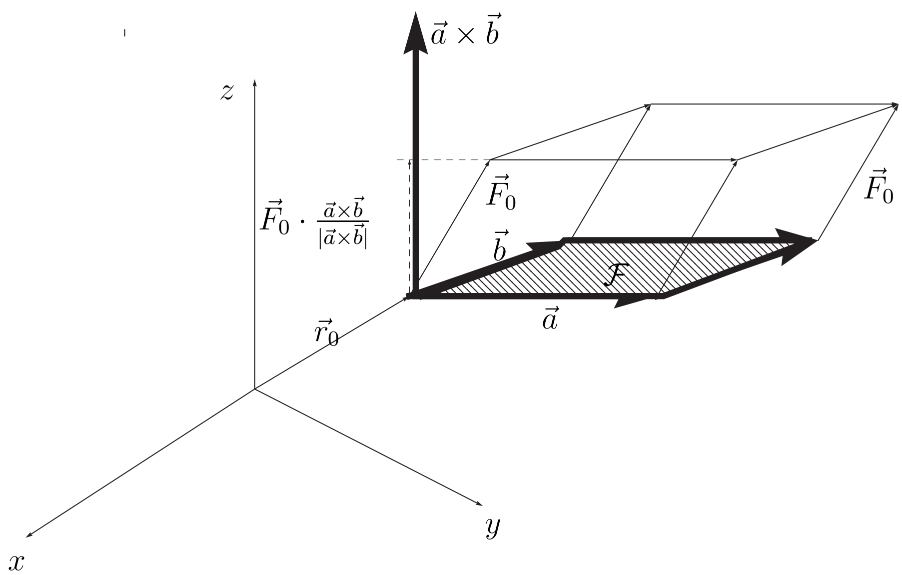
A felület irányítását gyakran úgy adjuk meg, hogy azt mondjuk, hogy a felületet irányítsuk a "felfelé mutató normálissal" (amikor az egyáltalán értelmes). Adott tehát egy irányított $\mathcal{F}$ felület, és meg akarjuk határozni az $\mathcal{F}$-en (az irányítás irányában) időegység alatt átfolyó folyadék előjeles térfogatát.

27. DEFINÍCIÓ: Az $\mathcal{F}$-en időegység alatt átfolyó, az $\vec{F}$ sebességtér szerint áramló folyadék térfogatát az $\vec{F}$ vektortér $\mathcal{F}$-re vett *felületmenti integráljának*, vagy *fluxusának* hívjuk, és $\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{A}$-val jelöljük.

Tehát:
-ha a fluxus pozitív, akkor a felület irányításának irányába több folyadék folyik;
-ha a fluxus negatív, akkor az irányítással ellentétes irányba folyik több folyadék;
-ha a fluxus zérus, akkor ugyanannyi folyadék folyik az irányítással egyező és azzal ellentétes irányba időegység alatt.

Kérdés: Hogyan számolhatjuk ki a fluxust?

1. lépés Tegyük fel, hogy $\vec{F}$ egy konstans vektortér, $\vec{F} \equiv \vec{F_0}$ és $\mathcal{F}$ egy paralelogramma, melyet az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok feszítenek ki, és az $\vec{a} \times \vec{b}$-vel irányított:

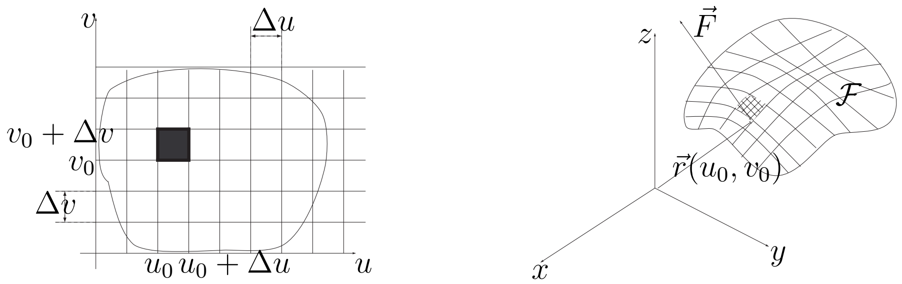


4.15. ábra. Fluxus számítás.

Az $\mathcal{F}$ felületen az $\vec{a} \times \vec{b}$ irányába időegység alatt átfolyó folyadék az ábrán látható paralelepipedont tölti ki. Tehát az $\vec{F}$-nek az $\mathcal{F}$-re vonatkozó fluxusa ezen paralelepipedon térfogata, ami *alapterület* $\times$ *magasság*. Az alapterület: $\mathcal{F}$ területe$=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, magasság: $\vec{F}_0$-nak az $\vec{a}\times\vec{b}$-re vett merőleges vetülete, ami $\vec{F}_0\cdot\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}$. Ezekből a paralelepipedon térfogata: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\vec{F}_0\cdot\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}=\vec{F}_0\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.

Vagyis, ha $\vec{F}=\vec{F}_0$ konstans, és $\mathcal{F}$ egy $\vec{a},\vec{b}$ által kifeszített $\vec{a}\times\vec{b}$-vel irányított paralelogramma, akkor: $\iint\limits_F \vec{F}d\vec{A}=\vec{F}_0\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.

2.lépés: *Fluxus általános $\vec{F}$-re és $\mathcal{F}$-re:*



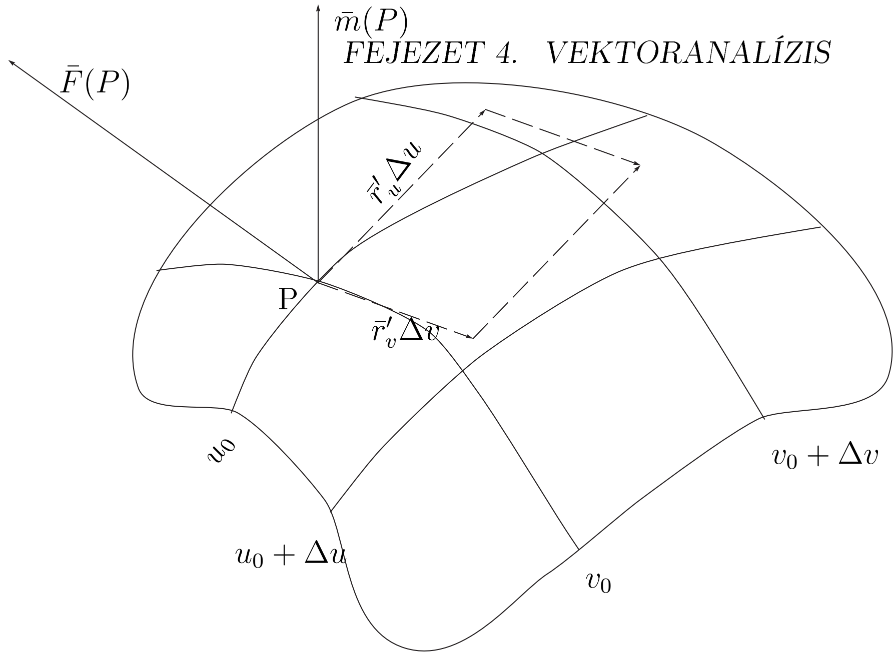
4.16. ábra. Fluxus általános $\vec{F}$-re.

A $\mathcal{F}$ felület egy paraméterezése: $\mathbf{r}:T\to\mathcal{F}$. Koordináta-vonalak segítségével kicsiny darabokra, elemi részekre particionáljuk a felületet. Két közelítést alkalmazunk, melyek hatása eltűnik, ha a felület ezen felosztását minden határon túl finomítjuk.

Az első közelítés az, hogy az ábrán feketével satírozott elemi felületdarab helyett az érintő síkban neki megfelelő paralelogrammát tekintünk.

A másik közelítés az, hogy ezen a paralelogrammán az $\vec{F}$-et konstansnak, $\vec{F}\equiv\vec{F}(\mathbf{r}(u_0,v_0))$-nak vesszük, így alkalmazhatjuk az *1.lépés* eredményét. Ha az első ábra elemifelület darabját kinagyítjuk, akkor ezen az elemifelület darabon az *1.lépés* eredményét alkalmazva látjuk, hogy közelítőleg:

$$\vec{F}(\mathbf{r}(u_0,v_0))\cdot(\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v)\triangle u\triangle v \tag{4.4}$$



4.17. ábra. Fluxus általános esetben

A fluxust az egész felületre úgy kapjuk, ha az elemifelület darabokra vett fluxusokat összegezzük, és $\triangle u, \triangle v \to 0$. Vagyis:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{A} &= \lim_{\triangle u, \triangle v \to 0} \Sigma \vec{F}\left(\mathbf{r}\left(u_0, v_0\right)\right) \cdot \left(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\right) \triangle u \triangle v \\ &= \iint\limits_{T} \vec{F}\left(\mathbf{r}\left(u, v\right)\right) \cdot \left(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\right) dudv,\end{aligned} \tag{4.5}$$

feltéve, hogy az $\mathcal{F}$ az $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$-vel van irányítva.

Ha az $\mathcal{F}$-et a $-\ \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$-vel irányítjuk, akkor

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{A} = -\iint\limits_{T} \vec{F}\left(\mathbf{r}\left(u, v\right)\right) \cdot \left(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\right) dudv.$$

Fontos speciális eset: Ha az $\vec{F}$ vektortérnek a $\mathcal{F}$ felület minden pontjában a felület normálisára eső merőleges vetülete ugyanaz a szám,

$$\vec{F}\left(p\right) \cdot \vec{m}\left(p\right) \equiv q,$$

akkor

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{A} = q \cdot felszín(\mathcal{F}). \tag{4.6}$$

Ez alkalmazható például, ha az $\mathcal{F}$ egy síkidom, és az $\vec{F}$ vektortér konstans.

55. PÉLDA: Legyen $\mathcal{F}$ az a felület, melynek egy $T : 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 1$ paraméterezésére $\mathbf{r}(u,v) = (u+2v, -v, u^2+3v)$ és az $\mathcal{F}$-et a felfelé mutató normálissal irányítjuk. Legyen $\vec{F}(x,y,z) = (xy, 2x+y, z)$.
Kérdés: $\iint_{\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{A} =?$

1.lépés: Az $\vec{F}$-et lokalizáljuk az $\mathcal{F}$ felületre azaz az $\vec{F}(x,y,z) = (xy, 2x+y, z)$ képlet jobb oldalán található minden x helyébe $u+2v$-t, minden y helyébe $-v$-t és minden z helyébe u^2+3v-t írunk. Így kapjuk: $\vec{F}(\mathbf{r}(u,v)) = ((u+2v)(-v), 2(u+2v)-v, u^2+3v)$. Innen $\vec{F}(\mathbf{r}(u,v)) = (-uv-2v^2, 2u+3v, u^2+3v)$.

2.lépés: Meghatározzuk a normális vektort. Ehhez kiszámítjuk az $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2u\mathbf{i} + (4u-3)\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Mivel a $\mathbf{k}$ együtthatója negatív ezért az $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ lefelé mutat, tehát a keresett normális $\mathbf{n} = -\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (-2u, 3-4u, 1)$.

3.lépés: Kiszámítjuk az $\vec{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \mathbf{n}$ skalárszorzatot: $\vec{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \mathbf{n} = 2u^2v + 4uv^2 + 6u + 3v - 8u^2 - 4uv + u^2 + 3v$

4.lépés: $\iint_{\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{A} = \int_{u=0}^{3} \int_{v=0}^{1} 4uv^2 + 2u^2v - 7u^2 + 6v + 6u - 4uv dv du = \cdots = -21$

Ez azt jelenti, hogy időegységenként 21 egységgel több folyadék áramlik az $\mathcal{F}$-en keresztül "lefelé", mint "felfelé".

56. PÉLDA: Legyen $A(1,0,1)$; $B(1,1,1)$; $C(2,0,3)$. Legyen $\mathcal{F}$ az ABC háromszög, és irányítsuk $\mathcal{F}$ -et a "lefelé" mutató normálissal. Legyen továbbá $\vec{F} \equiv (5,4,3)$.

Kérdés: Mivel egyenlő $\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{A}$?

Megoldás: Mivel $\vec{F}$ konstans, és $\mathcal{F}$ egy síkidom, így a fluxus az $\vec{F}$-nek a normálisra eső vetülete szorozva a területével. Legyen $\vec{b} = \vec{AB} = (0,1,0)$; $\vec{c} = \vec{AC} = (1,0,2)$
$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2,0,-1)$, mivel az utolsó komponens negatív, ezért $\vec{b} \times \vec{c}$ a megfelelő normálvektor.
Az $\vec{F}$ vetülete a $\vec{b} \times \vec{c}$-re: $\vec{F} \cdot \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\left|\vec{b} \times \vec{c}\right|}$. A háromszög területe: $\frac{\left|\vec{b} \times \vec{c}\right|}{2}$. Tehát a fluxus:
$\vec{F} \cdot \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\left|\vec{b} \times \vec{c}\right|} \cdot \frac{\left|\vec{b} \times \vec{c}\right|}{2} = \frac{\vec{F} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{2} = \frac{\vec{F}\vec{b}\vec{c}}{2} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{7}{2} = \iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{A}.$

4.3.1. Gauss-féle divergencia tétel

28. DEFINÍCIÓ: Legyen $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Az $\vec{F}$ *divergenciája* az (x,y,z) pontban:

$$div\vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

ahol $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

57. PÉLDA: Legyen $\vec{F}(x,y,z) = (xy, y^2 \sin z, z^2 + y)$. Ekkor

$$div\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 \sin z\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z^2 + y\right) = y + 2y \sin z + 2z.$$

A vektortér divergenciája tehát egy valós értékű függvény, vagyis a divergencia egy adott pontban egy szám, (ellentétben a rotációval, ami egy vektor). A divergenciát a forráserősség mértékeként szokták használni. Hogy miért, azt a következő tétel mutatja.

29. DEFINÍCIÓ: Ha K egy test a térben, akkor ∂K-val jelöljük a K határát. Itt mindig feltesszük, hogy ∂K egy irányított felület a *kifelé mutató normálissal:*

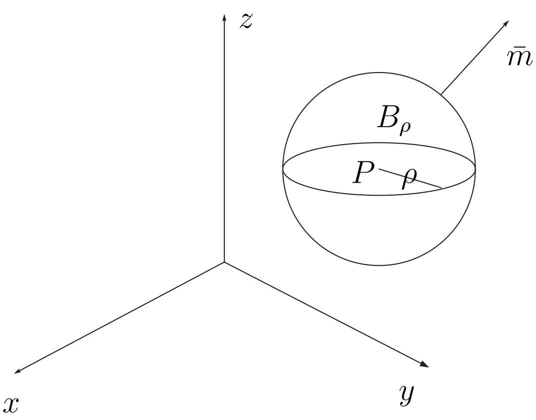
4.3.2. Gauss tétel vagy Divergencia tétel

Legyen K egy test a térben. A ∂K-t, a K határát (felületét) a kifelé mutató normálissal irányítjuk. Ekkor:

$$\iint_{\partial K} \vec{F} d\vec{A} = \iiint_{K} div\vec{F} dxdydz,$$

ahol az $\vec{F}$ a K minden pontjában értelmezve kell legyen, és $div\vec{F}$ egy valós értékű függvény.

Alkalmazás: Legyen ρ egy nagyon kicsi szám (majd $\rho \to 0$), és a tér egy P pontja körül tekintsük a ρ sugarú B_ρ gömböt.



4.18. ábra. Divergencia jelentése.

Ezt írjuk K helyett a fenti tételbe. Irányítsuk a B_ρ-nak a ∂B_ρ felületét a kifelé mutató normálissal. Ekkor, ha ρ nagyon kicsi, feltehető, hogy $div\vec{F}\,|_{B_\rho} \equiv div\vec{F}\,(P)$. (Ezzel kicsi hibát vétünk, ami $\rho \to 0$-ra kiesik!)
Ekkor a Gauss tétel jobb oldala:

$$\iiint_{B\rho} div\vec{F} dxdydz \approx div\vec{F}\,(P) \cdot térfogat(B_\rho).$$

Tehát a Gauss tétel szerint:

$$\iint\limits_{\partial B_\rho} \vec{F}d\vec{A} \approx div\vec{F}\,(P) \cdot térfogat(B_\rho)$$

vagyis $div\vec{F}\,(P) \approx \frac{\iint\limits_{\partial B_\rho} \vec{F}d\vec{A}}{térfogat(B_\rho)}$. Pontosabban:

$$div\vec{F}\,(P) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\iint\limits_{\partial B_\rho} \vec{F}d\vec{A}}{térfogat(B_\rho)}.$$

Tehát a divergencia a P-ben éppen egy nagyon kicsi gömb felületén időegység alatt kiáramló folyadék térfogata, osztva ezen kicsi gömb térfogatával.

A eset: $div\vec{F}\,(P) < 0$, ekkor több folyadék folyik be, mint amennyi kifolyik egy P középpontú kicsike sugarú gömbbe. Ezért a P pont *elnyelő*.

B eset: $div\vec{F}\,(P) > 0$, ekkor egy P körüli kicsiny gömbből több folyadék folyik ki, mint amennyi befolyik, tehát a P pont egy *forrás*.

C eset: $div\vec{F}\,(P) = 0$, ekkor ugyanannyi folyadék folyik be, mint amennyi kifolyik egy P körüli kicsiny gömbből.

58. PÉLDA: Legyen T a 4.19. ábrán látható tömör tórusz, melynek ∂T felületét a kifelé mutató normálissal irányítottuk. Legyen $\vec{F}\,(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ és $\vec{G}\,(x,y,z) = (2x+y^2, y+\sin z, z-x^3)$ Határozzuk meg:

a.) $\iint\limits_{\partial T} \vec{F}d\vec{A}$ és

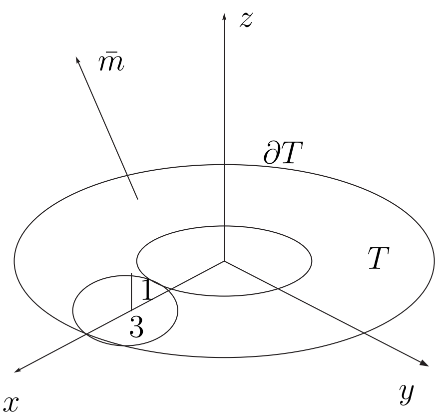
b.) $\iint\limits_{\partial T} \vec{G}d\vec{A}$ értékét!

Megoldás: $div\vec{F} \equiv 0$, $div\vec{G} = 2+1+1 = 4$. Tehát mivel a divergencia mindkét esetben konstans függvény, ezért a Gauss tételből kapjuk:

$\iint\limits_{\partial T} \vec{F}d\vec{A} = \iiint\limits_{T} div\vec{F}dxdydz = 0$, ($div\vec{F}$ azonosan nulla)

$\iint\limits_{\partial T} \vec{G}d\vec{A} = \iiint\limits_{T} div\vec{G}dxdydz = 4 \cdot térfogat\,(T)$, $(div\vec{G} \equiv 4)$.

Kérdés: Mi a T tömör tórusz térfogata?



4.19. ábra. Tórusz a 58. Példához

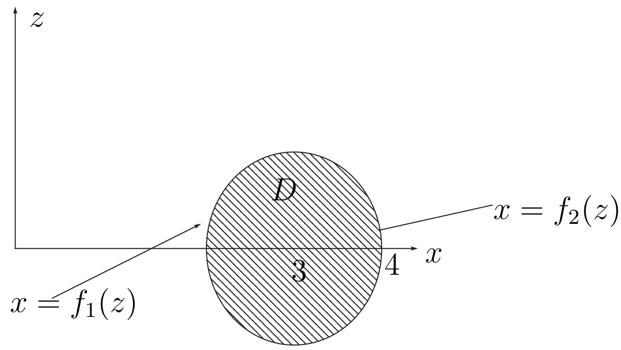
Tudjuk, hogy a T-t úgy kapjuk, hogy a $D = \left\{(x,z) : (x-3)^2 + z^2 \leq 1\right\}$ körlemezt megforgatjuk a z tengely körül. A D-t meghatározó $(x-3)^2 + z^2 = 1$ kör z-hez közelebbi félköríve: $x = f_1(z) = 3 - \sqrt{1-z^2}$, és a távolabbi: $x = f_2(z) = 3 + \sqrt{1-z^2}$.

A tórusz térfogatát úgy kapjuk, ha azon térfogatból, melyet az $x = f_2(z)$-nek a z tengely körüli forgatásából kapunk: $\pi \int\limits_{-1}^{1} f_2^2(z)\,dz$, kivonjuk az $x = f_1(z)$ z tengely körüli forgatásával kapott térfogatot: $\pi \int\limits_{-1}^{1} f_1^2(z)\,dz$.

$$Térfogat(T) = \pi \int\limits_{-1}^{1} f_2^2(z) - f_1^2(z)\,dz = \pi \int\limits_{-1}^{1} \left(9 + 6\sqrt{1-z^2} + 1 - z^2\right) - \left(9 - 6\sqrt{1-z^2} + 1 - z^2\right) dz = \pi \int\limits_{-1}^{1} 12\sqrt{1-z^2}dz = 12\pi \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-z^2}dz = 6\pi^2$$

4.3.3. Stokes tétel

30. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{F}$ felület, és annak $\partial\mathcal{F}$ határa koherensen vannak irányítva, ha egy ember végigsétál $\partial\mathcal{F}$-en a $\partial\mathcal{F}$ irányába



4.20. ábra. Tömör tórusz térfogata

úgy, hogy a feje a lábához képest az $\mathcal{F}$ irányításának megfelelően van, és a felület az ember bal kezére esik.

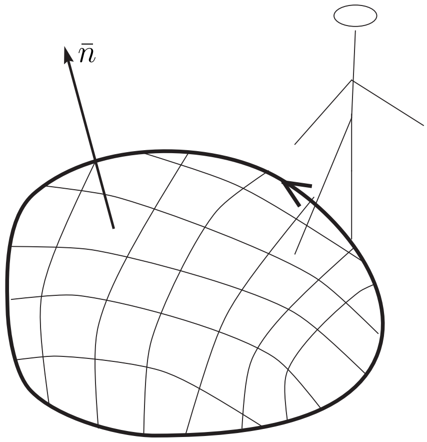
59. PÉLDA: Az $\mathcal{F}$ a 4.22 ábrán látható henger palástja, $\partial\mathcal{F}$ a henger alap és fedő köre. Ha $\mathcal{F}$ a kifelé mutató normálissal irányított, akkor hogyan kell irányítani a henger határát, $\partial\mathcal{F}$-et alkotó alsó és felső köröket?

Megoldás: Az alsó kör irányítása: az óramutatóval ellentétes
A felső kör irányítása az óramutatóval egyezik.

30. TÉTEL: (Stokes tétel) Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F}$ felület és annak $\partial\mathcal{F}$ határa koherensen irányított. Ekkor, ha az $\vec{F}$ parciális deriváltjai az $\mathcal{F}$ minden pontjában definiáltak, akkor:

$$\int\limits_{\partial\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{r} = \iint\limits_{\mathcal{F}} curl\left(\vec{F}\right) d\vec{A}$$

1. A $\mathcal{F}$ felület határa a $\partial\mathcal{F}$, legtöbbször egy görbe.



4.21. ábra. Felület és határa koherens irányítása.

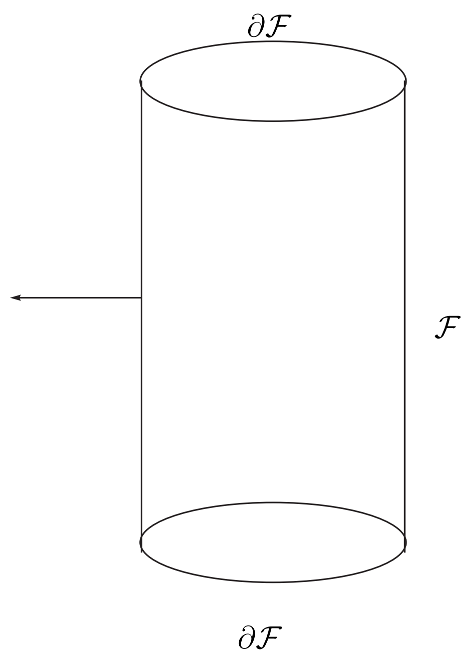
2. Az is lehet, hogy a $\mathcal{F}$ határa, $\partial\mathcal{F}$ egynél több görbe uniója, mint egy hengerpalást esetén.

3. Az is gyakran előfordul,hogy a $\mathcal{F}$ határa az üreshalmaz. Például: ha a $\mathcal{F}$ egy gömb felülete, vagy a $\mathcal{F}$ egy krumpli felülete. Ebben az esetben $\partial\mathcal{F} = \emptyset$ vagyis $\int\limits_{\partial\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{r} = 0$, így ha $\mathcal{F}$ egy test felülete, akkor $\iint\limits_{\mathcal{F}} curl\left(\vec{F}\right) d\vec{A} = 0$, következik a Stokes tételből.

60. PÉLDA: Legyen γ a 4.24. ábrán látható DEFG irányított görbe, és $\vec{F}(x, y, z) = (x, x, x)$. Mivel egyenlő $\int\limits_{\gamma} \vec{F} d\mathbf{r}$?

Megoldás: Legyen $\mathcal{F}$ az a felület, aminek a γ a határa, $\gamma = \partial\mathcal{F}$. Irányítsuk $\mathcal{F}$-et a γ-val koherensen. Ekkor mivel $curl\left(\vec{F}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0,0,0) = \mathbf{0}$ azt kapjuk, hogy $\iint\limits_{\mathcal{F}} curl\left(\vec{F}\right) d\vec{A} = 0$. Használva a Stokes tételt: $\int\limits_{\partial\mathcal{F}} \vec{F} d\mathbf{r} = \iint\limits_{\mathcal{F}} curl\left(\vec{F}\right) d\vec{A} = 0$.

61. PÉLDA: Legyen $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$, vagyis $\mathcal{F}$ az xy síkbeli egység sugarú körlemez, a felfelé mutató normálissal irányítva. Legyen $\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y, -x, 3z)$. Mivel egyenlő $\int\limits_{\partial\mathcal{F}} \vec{F} d\mathbf{r}$?



4.22. ábra. Henger és határa koherens irányítása.

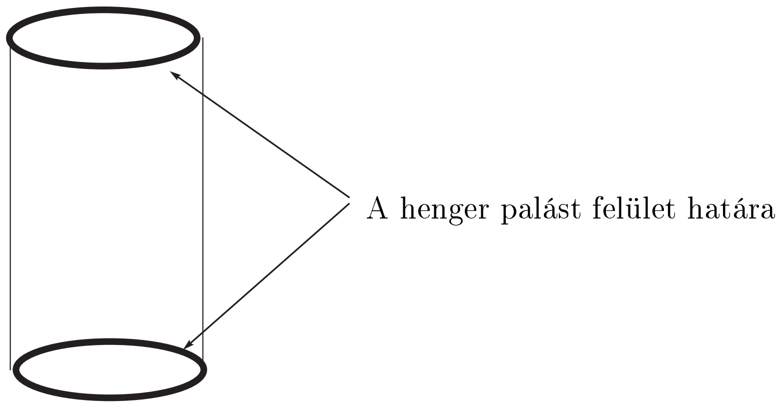
Megoldás: Számoljuk ki $\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{r}$-et a vonalmenti integrál kiszámolására tanult formulával: $\partial\mathcal{F}$ egy paraméter, $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, ahol $0 \leq t \leq 2\pi$. $\vec{F}(\mathbf{r}(t)) = (\sin t, -\cos t, 0)$; $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$. Tehát

$$\vec{F}(r(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = -\sin^2 t - \cos^2 t = -1.$$

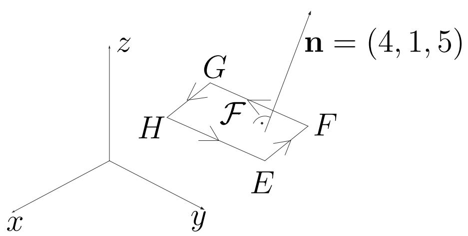
Vagyis

$$\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} -1 dt = -2\pi.$$

Ha valaki a Stokes-tétel alkalmazásával akarná az $\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{r}$-et kiszámolni,



4.23. ábra. A felület határátát lehet, hogy két görbe alkotja



4.24. ábra. Az EFGH pontok által meghatározott paralelogramma.

akkor először a

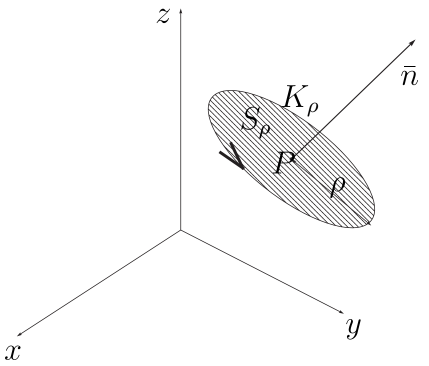
$$\begin{aligned} curl\left(\vec{F}\right) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{3z}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix} \\ &= \left(-3zy\left(x^2+y^2\right)^{-3/2}, 3zx\left(x^2+y^2\right)^{-3/2}, 0\right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

értéket határozza meg. Ebből viszont az adódna, hogy $\int\limits_{\partial\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{r} = 0$, hiszen az xy síkban (ahol $z = 0$), $curl\left(\vec{F}\right) = \mathbf{0}$. Valahol hiba van, hiszen az előbb $\int\limits_{\partial\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{r} = -2\pi$ adódott.

A hiba abból adódik, hogy ebben az esetben NEM alkalmazható a Stokes tétel. Azért nem, mert a Stokes-tétel azon feltétele, hogy az $\vec{F}$ minden parciális deriváltja létezzen az $\mathcal{F}$ felület minden pontjában, nem teljesül, mivel az $\vec{F}$ a z tengelyen nem értelmezett.

4.3.4. A curl$\left(\vec{F}\right)$ fizikai jelentése

Legyen P a tér egy pontja, és S_ρ egy P középpontú, kicsiny sugarú kör, melynek normálisa $\vec{n}$. ∂S_ρ és S_ρ koherensen irányítottak.



4.25. ábra. Ábra a curl$F$ fizikai jelentése fejezethez.

Legyen $K_\rho = \partial S_\rho$. Ha ρ nagyon kicsi, akkor $curl\left(\vec{F}\right)$ közelítőleg egyenlő $curl\left(\vec{F}(P)\right)$ az S_ρ-n. Tehát $|\vec{n}| = 1$.

$$\iint\limits_{S_\rho} curl\left(\vec{F}\right) d\vec{A} \approx \iint\limits_{S_\rho} curl\left(\vec{F}(P)\right) \cdot \vec{n} d\vec{A} = curl\left(\vec{F}(P)\right) \cdot \vec{n} \cdot terület\,(S_\rho)\,.$$

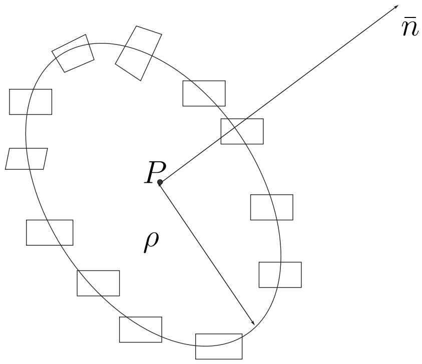
Tehát a Stokes-tételből: $\int\limits_{K_\rho} \vec{F} d\mathbf{r} = \int\limits_{\partial S_\rho} \vec{F} d\mathbf{r} = \iint\limits_{S_\rho} curl\left(\vec{F}\right) d\vec{A} \approx curl\left(\vec{F}(P)\right) \cdot$ $\vec{n} \cdot terület\,(S_\rho)$.Ebből következik, hogy

$$\vec{n} \cdot curl\left(\vec{F}(P)\right) \approx \frac{\int\limits_{K_\rho} \vec{F} d\mathbf{r}}{terület\,(S_\rho)}.$$

Pontosabban:$\frac{\int\limits_{K_\rho} \vec{F} d\mathbf{r}}{terület(S_\rho)}$, ahol $|\vec{n}| = 1$.

Vagyis a *curl* $\left(\vec{F}\right)$-nek az $\vec{n}$-re eső merőleges vetülete egyenlő (közelítőleg, ha $\rho > 0$, kicsi) az $\vec{F}$ által a K_ρ-n való elmozdulás során végzett munka, osztva az S_ρ területével.

62. PÉLDA: Legyen $\vec{F}(x, y, z) = (z^2, x + x^2 + z^2, y^2 + x)$ egy folyadék sebességtere, ami időben állandó. Elhelyezünk egy lapátkereket a folyadék áramlásának az útjába. A lapátkerék centruma a $P(1,1,1)$, síkjának normálvektora $\vec{n} = (-2, 5, -1)$. Lenézünk a lapátkerékre $-\vec{n}$ irányból.



4.26. ábra. Nagyon kicsi lapátkerék

1. Kérdés: Forog-e a lapátkerék, és ha igen, az óramutató járásával egyező vagy azzal ellentétes irányba?

Válasz: *curl* $\left(\vec{F}\right) = (2y - 2z, 2z - 1, 2x + 1)$, így *curl* $\left(\vec{F}(P)\right) = (0, 1, 3)$, ahol $P = (1,1,1)$ volt. Ekkor *curl* $\left(\vec{F}\right)$-nek az $\vec{n} = (-2, 5, -1)$-re való vetülete: $(0,1,3) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (0,1,3) \cdot \frac{(-2,5,-1)}{\sqrt{4+25+1}} = \frac{2}{\sqrt{30}} > 0$. Tehát az $\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot curl\left(\vec{F}(P)\right) \approx \frac{\int_{K_\rho} \vec{F} d\mathbf{r}}{terület(S_\rho)}$ összefüggésből az $\vec{F}$ pozitív munkát végez a K_ρ-n, tehát a folyadék pozitív, azaz az óramutató járásával ellentétes irányba forgatja a lapátkereket.

2. Kérdés: Ha a lapátkerék centruma a $P(1,1,1)$ pontban van rögzítve, akkor hogyan kell választani az $\vec{n}$ vektort ahhoz, hogy a lapátkerék

a. egyáltalán ne forogjon;

b. a leggyorsabban forogjon az óramutató járásával egyező (negatív) irányba?

Válasz az "a" kérdésre: A lapátkerék akkor nem forog, ha az $\vec{F}$ erőtér nem végez rajta munkát, vagyis, ha $\int\limits_{K_\rho} \vec{F} d\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Használva, hogy

$$curl\left(\vec{F}(P)\right)\cdot\vec{n} \approx \frac{\int\limits_{K_\rho} \vec{F} d\mathbf{r}}{terület\,(S_\rho)}$$

ez akkor következik be, ha $curl\left(\vec{F}(P)\right) \perp \vec{n}$. Tehát a lapátkerék nem forog, ha $\vec{n}$ egy tetszőleges olyan vektor, ami merőleges a $curl\left(\vec{F}(P)\right) = (0,1,3)$-ra.

Például: $\vec{n} = (0,-3,1)$ és $\forall\vec{n}\perp(0,1,3)$.

Válasz a "b" kérdésre: A $curl\left(\vec{F}(P)\right)\cdot\vec{n} \approx \frac{\int\limits_{K_\rho} \vec{F} d\mathbf{r}}{terület(S_\rho)}$ formula miatt leggyorsabban forog a kerék az óramutató járásával megegyező irányba, ha legnagyobb abszolút értékű negatív munkát végez a folyadékáramlás rajta. Ez akkor következik be, ha a $curl\left(\vec{F}(P)\right)\cdot\vec{n}$ a lehető legnagyobb abszolút értékű negatív szám. Tehát $\vec{n}$ a $-curl\left(\vec{F}(P)\right)$ irányába mutató egységvektor. Vagyis $\vec{n} = \frac{(0,-1,-3)}{\sqrt{1+9}} = \frac{1}{\sqrt{10}}(0,-1,-3)$.

4.3.5. Green-tétel

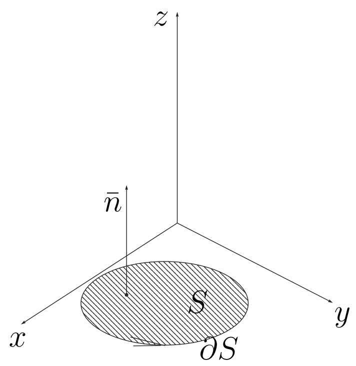
A Stokes-tétel speciális eseteként kapjuk a Green-tételt!

Legyen S egy xy síkbeli tartomány, melynek határa a ∂S egyszerű zárt görbe, és az $\vec{F}$ *minden parciális deriváltja az* S *minden pontjában létezik!*

Ekkor ha $\vec{F}$ egy xy síkbeli vektortér, vagyis

$$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y), Q(x,y), 0),$$

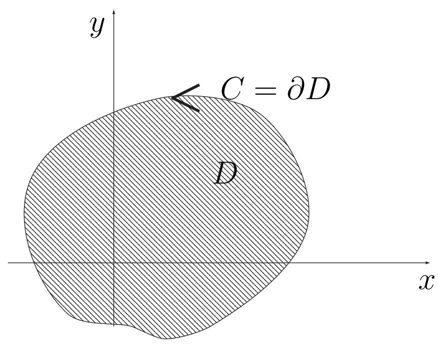
akkor $curl\left(\vec{F}\right) = \left(0,0,Q'_x - P'_y\right)$. Ezért a Stokes-tételből kapjuk, hogy $\int\limits_{\partial S} \vec{F} d\mathbf{r} = \iint\limits_S curl\left(\vec{F}\right) d\vec{A} = \iint\limits_S \vec{n}\cdot curl\left(\vec{F}\right) dxdy = \iint\limits_S Q'_x - P'_y dxdy.$



4.27. ábra. Az S egy xy síkbeli tartomány

Mivel a fenti állításban mind az $\vec{F}$ vektortér, mind az S tartomány az xy síkban van, ezért megfogalmazhatjuk egy síkbeli állításként a tételt:

31. TÉTEL: (Green-tétel) Legyen D egy olyan tartomány a síkon, melynek határa a C egyszerű zárt görbe.



4.28. ábra. D egy tartomány mely nem tartalmaz lyukat.

(D nem tartalmaz lyukakat!) Továbbá az $\vec{F}$ síkbeli vektortér, minden parciális deriváltja a D minden pontjában értelmezett akkor, ha $\vec{F}(x, y) =$

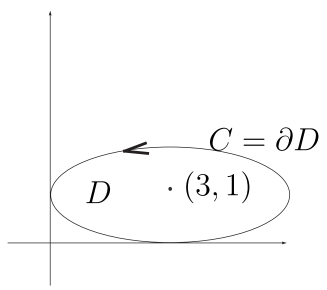
$(P(x,y), Q(x,y)):$

$$\int_C \vec{F} d\mathbf{r} = \iint_D \left(Q'_x - P'_y\right) dxdy$$

63. PÉLDA: Legyen $\vec{F}(x,y) = (2y, x)$ és C az $(x-3)^2 + 9(y-1)^2 = 9$ ellipszis pozitív irányítással. Mivel egyenlő az $\int_C \vec{F} d\mathbf{r}$?

Megoldás: $P(x,y) = 2y$, $Q(x,y) = x$, így $Q'_x = 1$ és $P'_y = 2$. Tehát $Q'_x - P'_y = -1$. Vagyis:

$$\int_C \vec{F} d\mathbf{r} = \iint_D \left(Q'_x - P'_y\right) dxdy = -\mathit{terület}(D) = -\pi \cdot 3 \cdot 1 = -3\pi.$$



4.29. ábra. A 63. feladat ellipszise

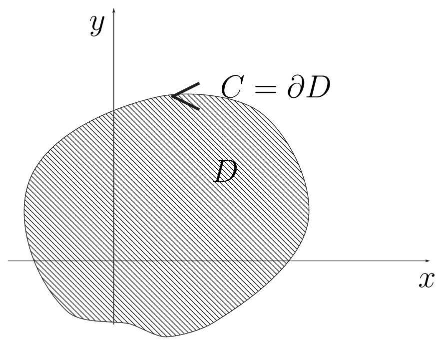
Területszámítás. Ha $P(x,y) \equiv 0$ és $Q(x,y) = x$, vagy $P(x,y) = -y$ és $Q(x,y) \equiv 0 \Rightarrow Q'_x - P'_y \equiv 1$.

Tehát a fenti esetben: $\mathit{terület}(D) = \int_C xdy - \int_C ydx$. Itt használtuk azt a jelölést, hogy az $\vec{F} = (F_1, F_2)$ vektortérre:

$$\int_\gamma (F_1 dx + F_2 dy) := \int_\gamma \vec{F} d\mathbf{r}$$

Innen azonnal adódik, hogy

$$terület\,(D) = \frac{1}{2}\int\limits_{C} xdy - ydx. \tag{4.8}$$



4.30. ábra. D egy tartomány mely nem tartalmaz lyukat.

Tekintsük azt a speciális esetet amikor a fenti C görbe

$$r = r(\varphi),\ \text{ahol } a \leq \varphi \leq b$$

alakban adott. Ekkor

$$x\,(\varphi) = r\,(\varphi)\cos\varphi,\ y\,(\varphi) = r\,(\varphi)\sin\varphi.$$

Tehát a 4.8 jobb oldalán az integrandusz:

$$\begin{aligned} xdy - ydx &= (x\,(\varphi)\cdot\dot{y}\,(\varphi) - y\,(\varphi)\cdot\dot{x}\,(\varphi))\,d\varphi \\ &= r^2\,(\varphi)\left[\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right]d\varphi = r^2\,(\varphi)\,d\varphi \end{aligned} \tag{4.9}$$

Vagyis a 4.8 alapján

$$Terület\,(D) = \frac{1}{2}\int\limits_{a}^{b} r^2\,(\varphi)\,d\varphi.$$

64. PÉLDA: Számoljuk ki az $r = \sin 3\varphi$ úgynevezett "háromlevelű lóhere" (l. 4.31. ábra) területét. (Amikor $\sin 3\varphi < 0$, akkor az r a formula szerint negatív lenne, ami lehetetlen, hiszen r jelöli az origótól vett távolságot. Ezt úgy oldjuk fel, hogy ekkor az $(|r|, \varphi + \pi)$ pontot ábrázoljuk.)

Megoldás: Elég az első síknegyedbe eső R területet meghatározni. Itt $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$. A fenti képlet miatt:

$Terület\,(R) = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}} r^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}} (\sin 3\varphi)^2\,d\varphi$, elvégezve a következő számításokat:

$$\begin{array}{l} \cos^2 3\varphi + \sin^2 3\varphi = 1 \text{ és} \\ \underline{\cos^2 3\varphi - \sin^2 3\varphi = \cos 6\varphi} \\ 2\sin^2 3\varphi = 1 - \cos 6\varphi \Rightarrow \sin^2 3\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 6\varphi), \text{ adódik:} \end{array}$$

$$Terület\,(R) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 6\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{4}\left[\varphi - \frac{1}{6}\sin 6\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12}.$$

A háromlevelű lóhere területe: $3\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$.

A következő feladat azért került ide mert eredményére szükségünk lesz az eggyel későbbi feladat megoldásához:

65. PÉLDA: Legyen C az az egyenes szakasz, melynek kezdőpontja (a,b), végpontja pedig (c,d). Mekkora az $\int\limits_C xdy - ydx$ értéke?

Megoldás: C egy paraméterezése a következő: $0 \leq t \leq 1$, $\mathbf{r}(t) = (a,b) + t\cdot(c-a, d-b) = (a + t(c-a), b + t(d-b))$, $\vec{F}(x,y) = (-y,x)$, tehát $\vec{F}(\mathbf{r}(t)) = (-b - t(d-b), a + t(c-a))$, $\dot{\mathbf{r}}(t) = (c-a, d-b)$. $\vec{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\dot{\mathbf{r}}(t) = -b(c-a) - t(d-b)(c-a) + a(d-b) + t(c-a)(d-b) = ad - bc$. Vagyis $\int\limits_C \vec{F}d\mathbf{r} = \int\limits_0^1 \vec{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\dot{\mathbf{r}}(t)\,dt = \int\limits_0^1 ad - bcdt = ad - bc$.

66. PÉLDA: Számoljuk ki a 4.32. ábrán látható poligon által közrezárt T területet!

Megoldás: Az első feladat eredményét és a Green-tételt használjuk. A Green-tételből tudjuk, hogy ha $C = \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$ akkor

$$Terület\,(t) = \tfrac{1}{2}\int\limits_C xdy - ydx = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{C_i} xdy - ydx = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i,$$

ahol $x_{n+1} = x_1$, és $y_{n+1} = y_1$. (Felhasználva az előző feladat során kapott eredményt, azt, hogy $\int\limits_{C_i} xdy - ydx = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i$.)

Vagyis:

$$\begin{aligned} Terület\,(t) &= \frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \ldots \\ &\quad + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + (x_ny_1 - x_1y_n)] \end{aligned}$$

Ez a képlet nemcsak akkor igaz, ha az (x_1, y_1), (x_2, y_2),$\ldots$ (x_n, y_n) pontok által meghatározott poligon *konvex*! A poligon lehet *konkáv* is! A képlet egy ciklus segítségével könnyen *programozható*!

4.4. Néhány feladat a vektoranalízisből

67. PÉLDA: Legyen $\vec{F} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ (ahol $\mathbf{r} = (x, y, z)$ és $r = |\mathbf{r}|$). Legyen S az $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ gömbfelülete kifelé mutató normálissal irányítva. Kérdés: $\iint\limits_S \vec{F} d\vec{A} = ?$

Megoldás: Mivel a gömbfelület minden pontjában az $\vec{F}(\mathbf{r})$ iránya a notmálvektor irányával egyezik meg, ezért az $\vec{F}$-nek normális irányú vetülete az $\vec{F}$ hosszával vagyis $\left|\vec{F}(\mathbf{r})\right| = \frac{|\mathbf{r}|}{r^3} = \frac{1}{r^2}$-el egyenlő. Mivel a b sugarú gömb felületén vagyunk, itt $r = b$ tehát a normális irányú vetület $\frac{1}{b^2}$ minden pontban, tehát konstans. Mint tanultuk (l. (4.6)), ekkor

$$\iint\limits_S \vec{F} d\vec{A} = \frac{1}{b^2} \cdot \text{gömbfelszín} = \frac{1}{b^2} 4b^2\pi = 4\pi$$

ami független a b-től.

68. PÉLDA: Számoljuk ki a $\iiint\limits_K div\left(\vec{F}\right) dxdydz$ integrált, ha K az origó középpontú, b sugarú gömb, ahol $\vec{F}$ ugyanaz mint az előző feladatban!

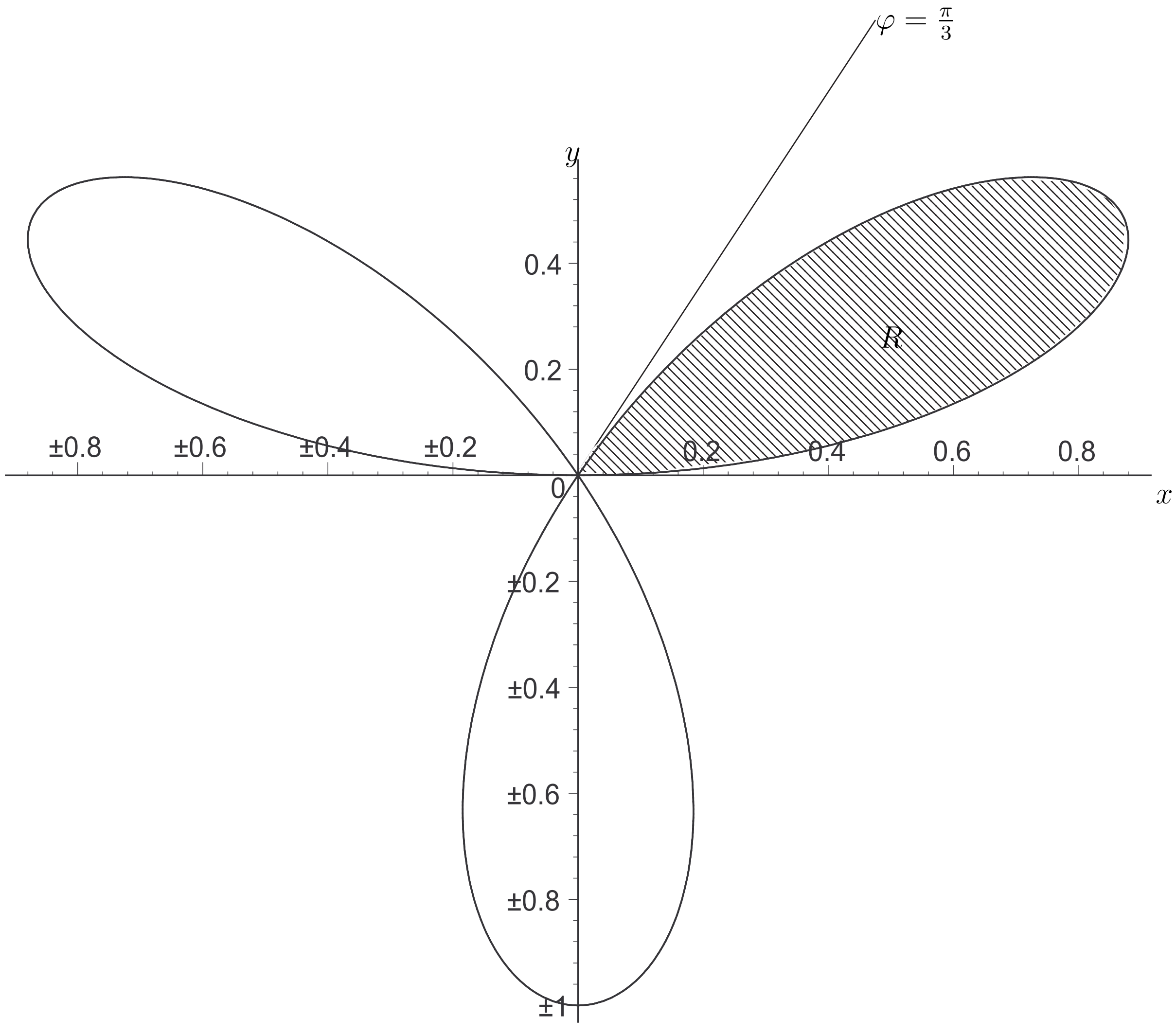
Megoldás: Először kiszámoljuk $div\left(\vec{F}\right)$-et. Mivel $\vec{F}\left(x,y,z\right)=\frac{\mathbf{r}}{r^3}=$

$$\left(\underbrace{\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}}_{F_1},\underbrace{\frac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}}_{F_2},\underbrace{\frac{z}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}}_{F3}\right)$$ és

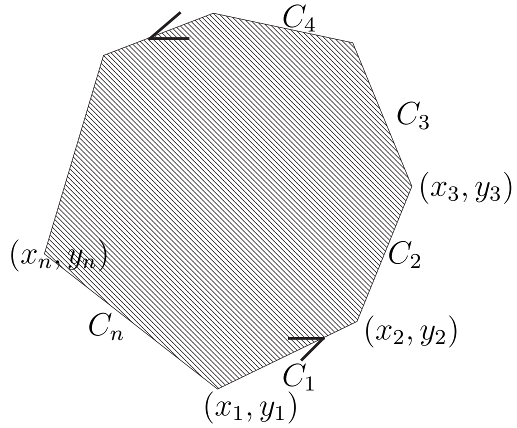
$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial x} &= \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 - x\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}\\ &= \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(y^2+z^2-2x^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}.\end{aligned}$$

Ugyanígy: $\frac{\partial F_2}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(x^2+z^2-2y^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$ és $\frac{\partial F_3}{\partial z}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(y^2+z^2-2z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$. Innen $div\left(\vec{F}\right)=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(y^2+z^2-2x^2x^2+z^2-2y^2+y^2+z^2-2z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}=0.$
Tehát $div\left(\vec{F}\right)\equiv 0$ és ezért $\iiint\limits_K div\left(\vec{F}\right)dxdydz=0.$

4. MEGJEGYZÉS: A fenti két feladatban szereplő integrálok a divergencia tétel két oldalán álló integrálok. Ezek különbözősége is mutatja, hogy a divergencia tételt csak akkor alkalmazhatjuk, ha az $\vec{F}$ vektor tér a K test minden pontjában értelmezve van. (Ez a fenti $\vec{F}=\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ és K esetén nyilván nem teljesül.)



4.31. ábra. Háromlevelű lóhere.



4.32. ábra. Poligon által közrezárt tartomány

Irodalomjegyzék

[1] Bukszár József: Matematikai Feladatagyűjtemény.

[2] CURJEL R. Caspar: Math 324, Advanced Multivariable Calculus I. University of Washington (1996).

[3] CURJEL R. Caspar: Excercises in Multivariable and Vector Calculus, McGraw-Hill, Inc (1990).

[4] Kálovics Ferenc: Matematikai Analízis Mérnökhallgatóknak. Miskolci egyetemi Kiadó. 2001.

[5] Raisz Péterné: Közönséges differenciál egyenletek. Tankönyvkiadó, Budapest 1990.

[6] Reiman József:Matematika II/1. Tankönyvkiadó Budapest 1989.

[7] W. Rudin: A matematikai Analízis alapjai, Műszaki könyvkiadó Budapest 1978.

[8] Scharnitzky Viktor: Diffrenciálegyenletek. Műszaki Könyvkiadó Budapest