B2 jegyzet építőmérnök és környezet mérnök hallgatóknak
2003.02.13. változat

Simon Károly

2003.02.13

Lektorálta: Dr. Sándor Csaba egyetemi adjunktus

Előszó

Ez a jegyzet Dr. Simon Károlynak a BME Építőmérnök és Környezet mérnök hallgatóinak tartott előadásai anyagát tartalmazza. A jegyzetnek ez a **második** változata, ami biztos, hogy még sok javításra szorul. Kérem, hogy észrevételeiket küldjék el az email címemre.

Köszönetnyilvánítás: Köszönet illeti Dr. Simonné Bakos Erzsébetet a jegyzet nagy részének gépeléséért és Csordás Helga építőmérnök hallgatót, aki mint demonstrátor sok hasznos észrevétellel és tanáccsal segített a jegyzet készítésében.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Sorok

1.1. Valós számsorok

+

1. PÉLDA: (A pattogó labda) Tegyük fel, hogy egy 2 méter magasból leejtett labda minden pattanás után az előző magasság 3/4-éig megy fel. Kérdés mekkora s utat tesz meg ez a labda összesen? Válasz: a labda az első földet érésig 2 m-et megy. Ezután a 2 m-nek a 3/4-éig emelkedik azaz 6/4 m-ig megy fel majd ugyanennyit esik a másik földetérésig. Tehát az első és második földetérés között 3 m megy. Ebből következik, hogy az n-edik és $n+1$-edik földetérések között $3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ m-t megy a labda. Vagyis a labda által összesen megtett út: $s = 2 + 3 + 3\ \frac{3}{4} + 3\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \ldots$ végtelen összeggel adható meg (feltéve, hogy a labda végtelen hosszú ideig pattoghat). Használva a középiskolában a geometriai sorozat első n elemére tanult

$$a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \tag{1.1}$$

képletet láthatjuk, hogy $s = 2 + \lim_{n\to\infty} 3\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}} = 2 + 3\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 14$. A labda által megtett utat úgy számoltuk ki, hogy megnéztük mekkora a megtett út az $n+1$-ig pattanásig. Legyen ez s_n. Nyilvánvalóan az $\{s_n\}$ sorozat határértéke adja s-et.

2. PÉLDA: (A részeges és lusta kötéltáncos esete) Képzeljünk el egy halhatalan kötéltáncost aki nem veti meg az italt és ráadásul lusta is.

Hősünk rálép a kötél bal oldali végére és 1 m-t ugrik előre a kötél jobb oldali vége felé, de mert most sem józan, elveszti az orientációját és 1/2 m-t visszalép A pillanatnyi megingás után megembereli magát megfordul és megint a kötél jobb vége felé lép de mostmár csak 1/3 m-t (hiszen lusta így egyre kevesebbet mozog). Ekkor azonban újra az ital hatása kerekedik felül és most megint megfordulva visszalép 1/4 m-t a kötél bal oldali vége felé. Ezt az ingadozó mozgást folytatja az idők végéig (halhatatlan). Kérdés van-e olyan pont, amely körül oszcillál a barátunk vagy elmegy a végtelenbe? Válasz: legyen s_n az a hely ahol a kötéltáncos n lépés után van. Könnyen látható, hogy $s_{2k} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$ és $s_{2k-1} = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \ldots + \left(-\frac{1}{2k-2} + \frac{1}{2k-1}\right)$ ahol $k \geq 1$. Mivel az s_{2k} előállításában minden zárójelben pozitív szám áll ezért $s_{2k} > 0$ teljesül és az $\{s_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ sorozat monoton növő. Másrészt, mivel az s_{2k-1} összes zárójeleiben negatív számok állnak ezért az $\{s_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ sorozat monoton csökkenő. Így aztán ha $j < i$ tetszőleges természetes számok $s_{2i} < s_{2i+1} < s_{2j+1}$ mivel minden páratlan indexű tag pozitív. Hasonlóan, ha $j > i$, akkor $s_{2i} < s_{2j} < s_{2j+1}$. Tehát az $\{s_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ sorozat bármely eleme kisebb mint az $\{s_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ sorozat bármely eleme. Tehát az $\{s_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ sorozat egy monoton növő és korlátos sorozat (ugyanis van egy monoton csökkenő sorozat melynek minden tagja nagyobb nála), így létezik a határértéke, amit nevezzünk α-nak. Hasonlóan az $\{s_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ sorozat monoton csökkenő és alúról korlátos így neki is létezik hatérértéke amit hívjunk β-nak. Mivel $\frac{1}{2k} = s_{2k} - s_{2k-1}$, ezért $\beta - \alpha < \frac{1}{2k}$ teljesül minden k-ra vagyis $\alpha = \beta$, tehát a $\lim\limits_{k\to\infty} s_k$ létezik és egyenlő α-val. Vagyis létezik egy olyan érték ami körül oszcillál a részeges kötéltáncos barátunk. Finomabb módszerekkel ki lehet mutatni, hogy ez a pont $\ln 2$-vel egyenlő.

3. PÉLDA: (A józan, de lusta kötéltáncos esete) Tegyük fel, hogy a 2. példabeli kötéltáncosunk ikertestvére is ugyanezt a foglalkozást űzi. Abban is hasonlítanak, hogy a kötélen haladva az n-edik lépésben a lépéshossz nála is $\frac{1}{n}$ méter (hiszen ő is lusta), de ő következetes és józan életű ezért mikor rálép a kötélre (amelyről most feltételezzük, hogy végtelen hosszú) mindig azonos irányban halad, sohasem fordulva vissza. Kérdés, hogy ha az idők végezetéig meg nem áll, akkor kiballag-e a végtelenbe, vagy mert a lépéseinek hossza rohamosan csökken, lesz-e olyan távolság amit végtelen sok idő alatt sem fut be? Ez a kérdés azért merülhet fel egyáltalán mert, ha a fenti kötéltáncosunk olyan lajhár lenne, hogy az n-edik lépésben nem $\frac{1}{n}$-et lépne hanem csak $\frac{1}{2^n}$-et haladna, ami **sokkal kevesebb,** akkor az idők végezetéig sem tenne meg összesen 1 m-t hiszen a (1.1) képletet használva ezen szuper lusta kötéltáncos n lépés után $\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}<1$ métert tenne meg. Így azután jogos a kérdés: kiballag-e a végtelenbe az n-edik lépésben $\frac{1}{n}$-et lépő kötéltáncosunk, vagy megmarad egy korlátos intervallumon belül? Mielőtt belekezdenénk a kérdés megválaszolásába diszkutáljunk egy kicsit: Legyen s_n az a pont ahol a kötéltáncos n lépés után éppen áll. Minthogy a kötéltáncos mindig egy irányba halad ezért s_n monoton növekvő. Ha nem megy el a végtelenbe akkor korlátos és így mint monoton korlátos sorozat konvergens is. Tehát két lehetőség van: a kötéltáncos vagy elmegy a végtelenbe vagy konvergál egy véges értékhez. Ahhoz, hogy lássuk melyik az igaz, vegyük észre, hogy az $s_n=1+\ldots+\frac{1}{n}$ megfelel az 1.1. ábrán (14.oldal) látható síkidom területének. Ez pedig az $f(x)=\frac{1}{x}$ függvény integráljával alulról becsülhető: $s_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}>\int\limits_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(n+1)\to\infty$. Tehát a kötéltáncos lassan ugyan de elmegy a végtelenbe.

1.1.1. Definíciók

Most megfogalmazzuk pontosan azt, amit az előző példákból tanultunk, de ehhez előbb kell néhány nagyon fontos definíció:

1. DEFINÍCIÓ: Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ valós számsorozat elemeiből képzett

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

röviden

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

alakú kifejezést (formális összeget) **számsornak,** vagy rövidebben **sor**nak hívjuk. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ sor első n elemének összegét s_n-el jelöljük és a sor n**-edik részletösszegének** nevezzük. Tehát

$$s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

Ha az n-edik részletösszegekből álló $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sorozat* konvergens és határértéke a véges A, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ sor konvergens és ebben az esetben a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ definíció szerint egyenlő A-val, azaz $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A$.

Ha $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor **divergens** és azt mondjuk, hogy az **összege** ∞. Ha az $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak sem véges sem végtelen határértéke nincs akkor azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor **divergens.**

Tehát a fenti példák közül a 1-ben tekintett $1+\frac{3}{4}+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^n+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ és a 2. példában tekintett $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ sorok konvergensek, míg a 3. példában tekintett $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$sor (úgy hívják, hogy harmónikus sor) divergens és összege ∞. Tehát $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$. Tekintsünk a következő sort:

4. PÉLDA: Legyen $a_n=(-1)^n$, ekkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n=-1+1-1+1-1+1\ldots+(-1)^n+\ldots$. Könnyű látni, hogy

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k=\begin{cases}-1 & \text{ha } n \text{ páratlan}\\ 0 & \text{ha } n \text{ páros}\end{cases}$$

Tehát az $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat nem konvergens, vagyis a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ sor divergens. Ennek a sornak semmilyen módon nem tulajdoníthatunk összeget.

Tehát összeségében azt mondhatjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ éppen csak egy kifejezés, aminek vagy van összege vagy nincs. Ha nincs (mint a 4.példában) akkor mi nem tudunk semmit sem csinálni. Ha a sor konvergens, tehát van véges összege, akkor teljesen jogos a kérdés, hogy milyen módon határozhatjuk meg a sor összegét. Erre az a válasz, hogy eltekintve néhány fontos de nagyon speciális esettől (melyek közül néhányat alább megemlítünk) a konvergens sorok összegét csak számítógéppel tudjuk közelíteni. Ebben a fejezetben megtanulunk néhány szabályt (konvergencia-kritériumok), melyek segítenek eldönteni, hogy egy sor konvergens-e. Hiszen, ha tudjuk, hogy a sor konvergens akkor érdemes számítógéppel közelíteni az összegét, míg ha a sor divergens, akkor az összegnek semmi értelme sincs, tehát számítógéppel sem számolható ki. Mielőtt tehát a konvergenciakritéritériumokra térnénk nézünk egy példát sorokra, melyek összegét könnyű kiszámolni, aztán felsoroljuk a konvergens sorok néhány fontos tulajdonságát, majd felbontjuk a konvergens sorokat két ellentétes természetű osztályra és végrehajtunk némi diszkussziót.

5. PÉLDA: (Geometriai sor) Tekintsük a

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots$$

ú.n. *geometriai sort.* Az (1.1) képletet használva azonnal látható, hogy ha $a \neq 0$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \begin{cases} \frac{a}{1-q} & \text{ha } |q| < 1 \\ \text{divergens} & \text{ha } |q| \geq 1 \end{cases} \tag{1.2}$$

Ez (1.1)-ból következik felhasználva, hogy ha $|q| < 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ és ha $|q| > 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} |q|^n = \infty$.

Nagyon fontos egy életre megjegyezni tehát, hogy egy *geometriai sor akkor és csak akkor konveregens, ha a kvóciense abszolut értékben egynél kisebb!*

1.1.2. Konvergens sorok alapvető tulajdonságai

1. TÉTEL: A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha tetszőleges K-ra $\sum\limits_{n=K}^{\infty} a_n$ konvergens.

A tétel azt mondja, hogy véges sok tag elhagyása nem befolyásolja a sor konvergens vagy divergens mivoltát. Természetesen, ha konvergens sorból véges sok tagot elhagyunk az összeg általában más lesz!

Bizonyítás. Legyen s_n a $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ sor és s'_n a $\sum\limits_{i=K}^{\infty} a_i$ sor n-edik részletösszege és legyen $U = \sum\limits_{j=1}^{K-1} a_j$. Ekkor

$$s_{n+K-1} = U + s'_n. \tag{1.3}$$

Ezért $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens $\Longleftrightarrow$ ha $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergens $\Longleftrightarrow$ ha $\{s'_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergens $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=K}^{\infty} a_n$ konvergens. ■

A következő tétel segítségével néhány esetben azonnal láthatjuk, hogy egy esetleg bonyolultan megadott sor divergens. Például az, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)$ sor divergens a következő tételből ránézésre látszik.

2. TÉTEL: Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergens akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bizonyítás. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$. Mivel $a_n = s_n - s_{n-1}$ és $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = A$, ezért $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = A - A = 0$. ■

(Vagyis az előző állítás megfordítása nem igaz).

Azt már a fenti 3.Példában (a józan, de lusta kötéltáncos esete) láttuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens, és mivel $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, ezért előfordulhat, hogy sor általános tagja 0-hoz tart, de a sor divergens. A fenti tételtelt tehát nem használhatjuk annak megállapítására, hogy egy sor konvergens, hanem éppen ellenkezőleg, annak kimutatására használhatjuk némely esetben, hogy a sor divergens.

6. PÉLDA: (A $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)$ sor.) Emlékezzünk arra, hogy általában amikor azt írjuk, hogy $\sin(x)$, akkor azt x-et mindig radiánban értjük. Ha valaki emlékszik arra, hogy a középiskolában hogyan definiálták egy szög szinuszát, azt is azonnal látja, hogy a $\{\sin(n)\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat nem konvergens, tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)$ sor általános tagjaiból képzett sorozat nem konvergál a 0-hoz. Így aztán az előző tételből azonnal adódik, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)$ sor divergens.

1. FELADAT: Mutassuk meg, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{k^2}{1+k^2} + \frac{1}{k(k+1)}\right]$ sorok divergensek!

Emlékezzünk arra, hogy az első félévben tanultuk sorozatokra a Cauchy-féle konvergencia kritériumot. Ez azt mondta ki, hogy egy $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N$ úgy, hogy ha $m > n \geq N$ akkor $|s_m - s_n| < \varepsilon$. Mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens $\Longleftrightarrow$ ha a $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat konvergens, ezért a sorozatokra vonatkozó Cauchy- kritériumból azonnal adódik a sorokra vonatkozó Cauchy-kritérium:

3. TÉTEL: (Cauchy-kritérium) A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens $\Longleftrightarrow$ ha $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N$ úgy, hogy ha $m > n > N$, akkor $|a_m + \cdots + a_n| = |s_m - s_{n-1}| < \varepsilon$.

Ennek a tételnek az a nagyon fontos következménye számunkra, hogy

4. TÉTEL: Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergens akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens.

Bizonyítás. Használjuk a Cauchy-féle konvergencia-kritériumot! Eszerint, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergens akkor $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N$ úgy, hogy ha $m > n > N$, akkor $|a_m| + \cdots + |a_n| < \varepsilon$. Ezért $|a_m + \cdots + a_n| \leq |a_m| + \cdots + |a_n| < \varepsilon$. Vagyis megint csak a Cauchy-kritériumot (most a másik irányba) használva kapjuk, hogy: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens. ∎

Nagyon fontos, hogy az állítás fordítottja nem igaz, vagyis abból, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens még nem következik, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ is konvergens lenne. Erre példa a bevezetőben említett $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ sor amely, mint a 2. példában tárgyaltuk konvergens, de az abszolut értékeiből álló $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens (mint ezt a 3. példában tárgyaltuk.) Ezzel a jelenséggel foglalkozik a következő fejezet is.

1.1.3. Konverges sorok osztályzása

2. DEFINÍCIÓ: Egy konvergens $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sort **abszolút konvergensnek** nevezünk, ha az $|a_n|$-ból képzett $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor is konvergens. Azokat a konvergens sorokat melyek nem abszolút konvergensek **feltételesen konvergens** soroknak hívjuk.

Az 1-nél kisebb kvóciensű geometriai sor abszolút konvergens, ami rögtön látszik (1.2)-ből. A 2. példabeli $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ sor mint beláttuk konvergens, de az abszolút értékeiből képzett $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n\frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ sor divergens (mint azt a 3. példában beláttuk) ezért az eredeti $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ sor feltételesen konvergens. Az abszolút és feltételesen konvergens sorok között nagyon fontos különbség van: nevezetesen véges sok szám összegzésénél megszoktuk, hogy az összeg tagjait tetszésünk szerint átrendezve az összeg ugyanaz marad. Ez a tulajdonság a végtelen sorok esetében akkor és csak akkor marad érvényben, ha a sor abszolút konvergens.

5. TÉTEL: Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ sor abszolút konvergens és, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ sort úgy kapjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ sor tagjait valamely más sorrendben adjuk össze. Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ sor is abszolút konvergens és összege megegyezik a $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ sor összegével.

Ha a sor feltételesen konvergens akkor mindig átrendezhetjük akár úgy, hogy divergens legyen akár úgy, hogy az összege egy tetszőlegesen általunk megadott szám legyen. Például: belátható, hogy

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots=\ln(2) \tag{1.4}$$

de a ha a fenti sort úgy rendezzük át, hogy annak két pozitív tagját kövesse egy negatív akkor az így kapott sor összege $\frac{3}{2}\ln(2)$ lesz:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{8}+\frac{1}{17}+\cdots=\frac{3}{2}\ln(2). \tag{1.5}$$

Látható, hogy mind a (1.4) mind a (1.5) beli sorokban a tagok a természetes számok reciprokai, mégpedig a párosak negatív, a páratlanok pedig pozitív előjellel. Csak míg a (1.4)-beli sorban a pozitív és negatív tagok egymást váltva fordulnak elő, addig a (1.5) sorban két pozitív után jön egy negatív, és ez már azt eredményezi, hogy a sor összege más lesz. Ez a fejezet nagyon fontos lesz a valószínűségszámításban a diszkrét valószínűségi változók várható értékének létezésével kapcsolatban.

2. FELADAT: Adjunk meg olyan átrendezését a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ sornak, melyre a részletösszegek $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozata annyira nem konvergens, hogy ezen sorozat torlódási pontjaként előáll az összes valós szám.

1.1.4. Konvergenciakritériumok

Először is az integrálkritériumot tanuljuk meg. Ezt már tulajdonképpen láttuk amikor a 3.Példában kimutattuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ sor divergens. Most ugyanazt az ötletet amit ott egy speciális sorra alkalmaztunk, terjesztjük ki a pozitív és csökkenő tagú sorok családjára.

6. TÉTEL: (Integrálkritérium) Legyen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ egy pozitív sorozat. Tegyük fel, hogy az $f(x)$ egy az $x \geq 1$ halmazon értelmezett monoton csökkenő és folytonos függvény, továbbá

$$f(n) = a_n.$$

Ekkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens akkor és csak akkor ha az $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergens (ami itt azzal ekvivalens, hogy az improprius integrál véges hiszen $f(x) > 0$).

Bizonyítás. Mivel az $f(x)$ függvény monoton csökkenő és pozitív ezért mint az 1.1. ábra mutatja:

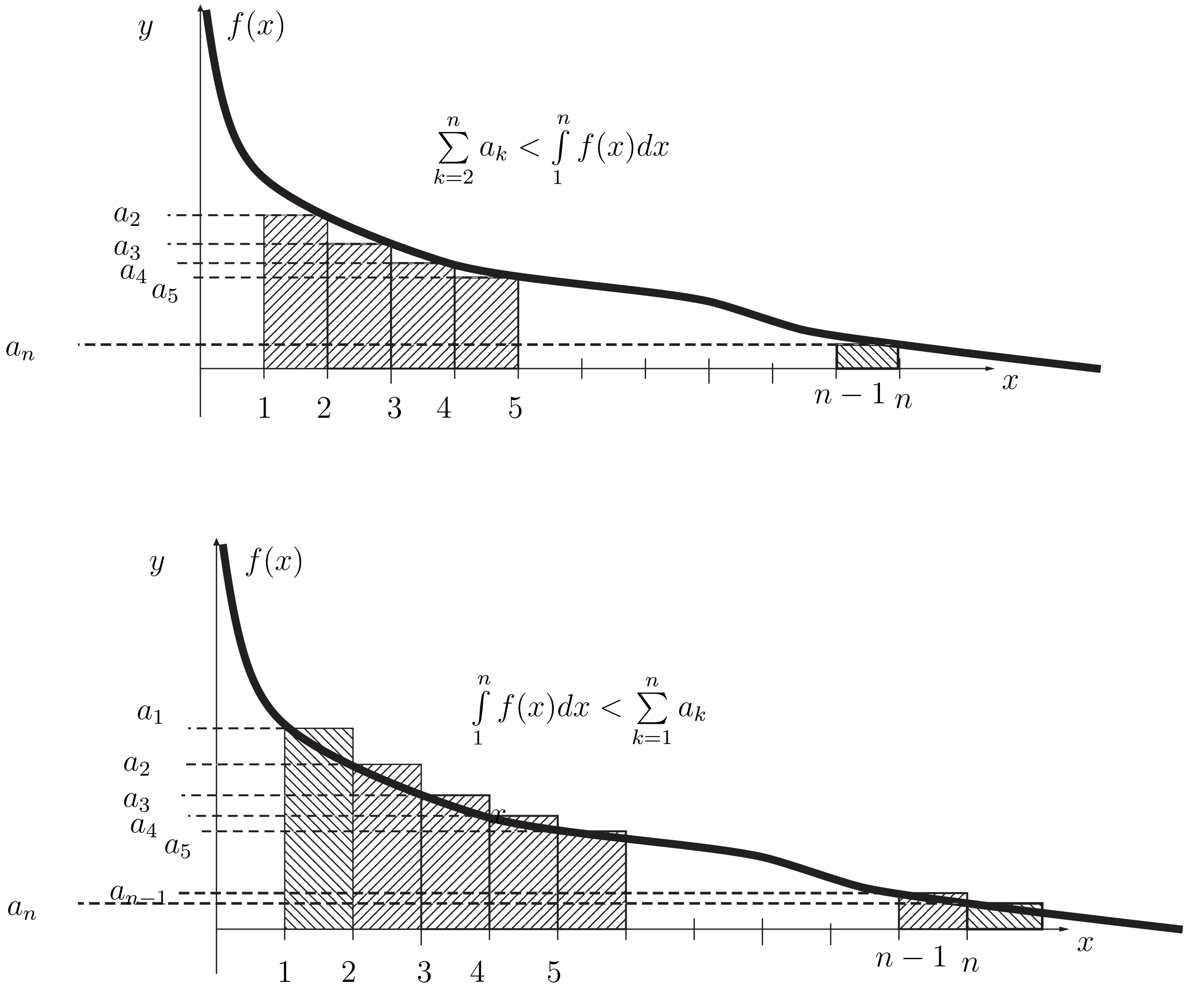
$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ebből az állítás nyilvánvaló. ■

Ennek számunkra legfontosabb következménye az a tétel, melyet a későbbiekre nagyon fontos fejben tartani

7. TÉTEL: (p-szabály) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{konvergens} & \text{ha } p > 1 \\ \text{divergens} & \text{ha } p \leq 1 \end{cases}$.

Ez a tétel az integrálkritériumnak az $f(x) = \frac{1}{x^p}$ függvényre történő alkalmazásából azonnal adódik. Tehát $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergens, hiszen a p-szabály



1.1. ábra. Az integrált (fv. alatti területet) a beírt és körülírt téglalapok területével becsüljük alúról ill. felüről. $a_n = f(n)$

alkalmazható $p = 2$-re. Ellenben, az integrálkritériumnak az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ függvényre való alkalmazása azt mutatja, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sor divergens.

7. PÉLDA: A $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ sor divergens. Ugyanis a sor tagjai pozitívak, és az $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ függvényre: $f(n) = \frac{1}{n\ln(n)}$. Mivel $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln^2 x}\right) < 0$ az $x \geq 2$ tartományon ezért monoton csökkenő (vegyük észre, hogy itt a tételbeli 1 szerepét a 2 veszi át), így az integrálkritérium alkalmazható. Tehát $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ akkor konvergens, ha $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{x\ln(x)}dx$ véges. Ez az integrál azonban végtelen, ugyanis $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{x\ln(x)}dx = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{2}^{R} \frac{1}{x\ln(x)}dx = \lim\limits_{R\to\infty} [\ln\ln x]_2^R = \infty$. Tehát a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ sor divergens.

8. PÉLDA: A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$ sor konvergens. Ugyanis, a sor tagjai pozitívak, és az $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$ az $x \geq 1$ halmazon folytonos függvényre $\frac{n}{e^{n^2}} = f(n)$, továbbá az $f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$ derivált függvény az $x > 1$ intervallumon negatív és ezért ezen az intervallumon az $f(x)$ függvény monoton csökkenő. Az integrálkritérium tehát alkalmazható. Ennek értelmében $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$ akkor és csak akkor konvergens, ha az $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$ -re a $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}}dx$ véges. Mivel $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}}dx = \frac{1}{2e}$ ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$ sor konvergens.

Ez utóbbi feladatot sokkal egyszerűbben is megoldhattuk volna az ú.n. összehasonlító kritérium segítségével.

8. TÉTEL: (Összehasonlító kritérium) Legyenek a_n és b_n **nemnegatív** tagú sorok. Tegyük fel, hogy létezik olyan N, hogy minden $n > N$-re $a_n \leq b_n$ teljesül. Ekkor:

1. Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ is divergens.
2. Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens.

Bizonyítás. Legyen s_n a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és s'_n a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor n-edik részletösszege. Mivel $a_n \leq b_n$, ezért $s_n \leq s'_n$ teljesül. Minthogy mind a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mind a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok pozitívtagúak, az n-ik részletösszegek sorozata mindkét esetben monoton növő. Használva azt a tételt, hogy egy monoton növő sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha felülről korlátos, kapjuk, hogy mind a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mind a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok akkor és csak akkor konvergensek, ha n-edik részletösszegeik sorozata felülről korlátos. A tétel első felében feltettük, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens. Ebből tehát az következik, hogy az $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat nem korlátos felüröl, ezért az $\{s'_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat sem lehet felülről korlátos, hiszen tudjuk, hogy $s_n \leq s'_n$. Ezért aztán a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor is divergens. A tétel második felének bizonyítása ugyanígy megy. ■

A fenti tétel talán a leghasznosabb konvergencia kritérium. Ennek segítségével, ha tudjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < 1$ a nemnegatív tagú $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorokra akkor a tétel feltételében szereplő N nyilván létezik és így az összehasonlító kritérium alkalmazható. Emlékezzünk a nagyságrendekre:

$$\ln(n) \ll n^a \ll b^n \ll n! \ll n^n \tag{1.6}$$

ahol $a > 0$, $b > 1$ és $a_n \ll b_n$ azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 < 1$. Ezért abból, hogy a 5. példában beláttuk, hogy $b > 1$-re $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^n}$ konvergens, használva (1.6)-ot kapjuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ sorok is konvergensek. Hasonlóan, a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ sor is konvergens mert $\frac{n}{e^n} \ll \frac{1}{2^n}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergens, hiszen egy geometriai sor, melynek kvociense egynél kisebb abszolút értékben. Így aztán az összehasonlító kritérium miatt a 8. példában vizsgált $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$ sorról is azonnal látjuk, hogy konvergens, hiszen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ konvergens és $\frac{n}{e^{n^2}} \ll \frac{n}{e^n}$. Vezessük be a következő jelölést:

3. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy az a_n és b_n azonos nagyságrendűek, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ határérték létezik, véges és nem nulla. Jelben: $a_n \sim b_n$,

Az összehasonlító kritériumból azonnal adódik, hogy:

9. TÉTEL: Ha az $a_n \sim b_n$ akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens.

Ez a tétel azt mutatja, hogy egy nem negatív tagú sor estén először is meg kell értenünk, hogy mi az általános tag nagyságrendje és ez a nagyságrend dönt arról, hogy a sor konvergens vagy divergens.

9. PÉLDA: Legyen $a_n = \frac{n^2+1}{n^3+n-100}$ és legyen $b_n = \frac{n+1}{n^3+n-100}$. Kérdés konvergensek-e a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok? Válasz: a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ viszont konvergens. Ugyanis, $a_n \sim \frac{1}{n}$ és tudjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens, amíg a $b_n \sim \frac{1}{n^2}$ és tudjuk, (a p-szabályból), hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

Nagyon fontos, hogy az összehasonlító kritériumban nemnegatív tagú sorokkal dolgozunk. A következő példa mutatja, hogyan használhatjuk ezt a kritériumot bizonyos esetekben pozitív és negatív előjelű tagokat egyaránt tartalmazó sorokra:

10. PÉLDA: Konvergens-e a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$ sor? A sor általános tagja bizonyos n-ekre negatív bizonyos n-ekre pozitív. Viszont a sor tagjainak abszolút értékéből képzett $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{n^2}$ sor pozitív tagú és minden tagja kisebb mint $\frac{1}{n^2}$, ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{n^2}$ sor konvergens és így (4) tételből következik, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$ sor is konvergens.

Tehát előfordulhat, hogy váltakozó előjelű sorokra is tudjuk alkalmazni az összehasonlító kritériumot, de csak akkor, ha abszolút konvergensek. A 2.

példában láttuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ sor konvergens, de ezt az eredményt az összehasonlító kritériumból nem tudtuk volna levezetni, mert az általános tag abszolút értéke $\frac{1}{n}$ nagyságrendű és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmónikus sor divergens.

A pozitív tagú sorokra vonatkozóan még két konvergenciakritériumot tárgyalunk. A bizonyításuk megfelelő geometriai sorokkal való összehasonlításon át az összehasonlító kritériumból adódik, de mi itt nem részletezzük.

10. TÉTEL: (Hányadoskritérium) Legyen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ egy pozitív tagú sor. Tegyük fel, hogy a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$$

határérték létezik. Ekkor:
(a) Ha $\alpha < 1$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens.
(b) Ha $\alpha > 1$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens.
(c) Ha $\alpha = 1$, akkor a hányadoskritérium nem alkalmazható.

11. TÉTEL: (Gyökkritérium) Legyen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ egy pozitív tagú sor. Tegyük fel, hogy a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \beta$$

határérték létezik. Ekkor:
(a) Ha $\beta < 1$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens.
(b) Ha $\beta > 1$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens.
(c) Ha $\beta = 1$, akkor a gyökkritérium nem alkalmazható.

Tehát a fenti két kritérium mindegyike pozitív tagú sorokra vonatkozik. Vegyük észre, hogy ha $\alpha > 1$ vagy $\beta > 1$ akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Ebből következik, hogy ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mind pozitív mind negatív előjelű tagokat tartalmazó sor továbbá a $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \beta$ határértékek léteznek:

1. Ha $\alpha < 1$ vagy $\beta < 1$ akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens.

2. Ha $\alpha > 1$ vagy $\beta > 1$ akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens.

3. Ha $\alpha = 1$ és $\beta = 1$ akkor sem a gyökkritérium sem a hányados kritérium nem alkalmazható.

A gyökkritérium erősebb mint a hányados kritérium. Vagyis, ha a gyökritériumot nem tudjuk alkalmazni akkor biztos, hogy a hányados kritériumot sem. A gyökrtitérum hiába gyengébb mégis hasznos hiszen egyes esetekben könnyebb ellenőrizni.

11. PÉLDA: Konvergens-e a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ sor? Persze az összehasonlító kritériumból azonnal látszik, hogy konvergens, hiszen $2^n \ll n!$ tehát $\frac{1}{n!} \ll \frac{1}{2^n}$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergens. Most próbáljuk ugyanezt belátni a hányados kritériummal! Itt $a_n = \frac{1}{n!}$, tehát $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1$, tehát beláttuk, hogy a sor konvergens a hányadoskritériummal. Most próbáljuk ugyanezt a gyökkritériummal! Mivel $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$ meg kell értenünk mekkora az $\sqrt[n]{n!}$ értéke, és ez nehezebb mint az eredeti kérdés. Hogy ezt megválaszolhassuk meg kell ismerkednünk a $n!$ pontos nagyságrendjét megadó ú.n. Stirling formulával (lásd [3, 204.o.]):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n} = 1 \tag{1.7}$$

ennek egy következménye (lásd [3, 209. o.]), hogy $n \geq 2$-re:

$$e^{\frac{7}{8}} < \frac{n!}{\sqrt{n}\,(n/e)^n} < e \tag{1.8}$$

így aztán azonnal látjuk, hogy $\sqrt[n]{n!}\frac{e}{n} \to 1$, vagyis $\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e} \to \infty$ tehát a gyökkritériumban szereplő $\beta = 0 < 1$ és így a sor konvergens.

12. PÉLDA: Konvergens-e a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ sor? A válasz igen mert a gyökkritériumot alkalmazva: $\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1$, tehát a sor konvergens.

13. PÉLDA: Legyen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ valamely $p > 0$-ra. Kérdés alkalmazható-e akár a gyök- akár a hányadoskritérium? A válasz negatív. Belátjuk, hogy a gyökkritérium nem alkalmazható és mivel ez erősebb a hányadoskritériumnál, a hányadoskritérium sem lesz alkalmazható! Használjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Ebből $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^p}} = 1$ tehát a gyökkritérium nem alkalmazható!

Az eddigi konvergencia kritériumok (amikor egyáltalán alakalmazhatóak) pozitív tagú sorokra vonatkoztak. Most egy olyan kritériumot fogunk látni ami váltakozó előjelű ún. alternálló sorokra vonatkozik.

12. TÉTEL: (Leibniz kritérium) Legyen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ váltakozó előjelű tagokból álló sorozat. Tehát, ha a_n pozitív akkor a_{n+1} negatív és a_{n+2} megint csak pozitív, de a_{n+3} újra negatív és így tovább. Tegyük fel továbbá, hogy az abszolút értékekből álló $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat monoton csökkenő és a 0-hoz konvergál. Ekkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens (de nem biztos, hogy abszolút konvergens).

A bizonyítás pontosan ugyanaz mint amit már láttunk a 2. példában. A Leibniz kritérium alkalmazására tehát triviális példa a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ sor.

3. FELADAT: Mutassuk meg a Leibniz kritériummal, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln n}$ sor konvergens!

4. FELADAT: Lehet-e a Lebniz kritériumot alkalmazni annak igazolására, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin(n)}$ sor konvergens?

1.2. Függvénysorok

Amikor egy sor tagjai nem számok hanem függvények akkor függvénysorról beszélünk. Jelben

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

A továbbiakban, ha mást nem mondunk feltesszük, hogy a függvénysor tagjai, az $f_n(x)$ függvények a valós számok halmazán, vagy annak valamely részhalmazán értelmezett, valós értékű függvények. Az ebben a fejezetben tárgyalt tételek általában változtatás nélkül igazak komplex változós komplex szám értékű függvényekre is.

4. DEFINÍCIÓ: A függvénysor értelmezési tartománya az a legbővebb halmaz melyen a sor minden tagja értelmezett. A függvénysor n-edik részletösszege az

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

A függvénysor *konvergencia tartománya* az a legbővebb halmaz, amelybe tartozó x-ekre az n-edik részletösszegek $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ függvénysorozata konvergál. Ha az n-edik részletösszegek $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *függvénysorozata* egyenletesen konvergál az értelmezési tartomány egy D részhalmazán, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor *egyenletesen konvergens* a D halmazon. Emlékeztetünk, hogy az $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ függvénysorozatról akkor mondjuk, hogy egyenletesen konvergál a D halmazon az $s(x)$ függvényhez, ha $\forall\varepsilon > 0$ ra létezik egy N, amely x-től független, hogy ha $n > N$, akkor minden $x \in D$-re: $|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$.

Az egyenletes konvergencia tehát abban erősebb feltétel mint a konvergencia, hogy az egyenletes konvergencia esetén bármelyik ε-hoz az **összes** x**-ben** ugyanaz a N küszöb szám tartozik. Tehát a küszöb szám természetesen függ az ε-tól, de nem függ az x-től az egyenletes konvergencia esetén. Ha csak konvergencia van, akkor a küszöbszám mind az ε-tól, mind az x-től is függ.

14. PÉLDA: Tekintsük a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ függvénysort. Ez minden x-re egy geometriai sor. Tehát minden x-re értelmezett és pontosan akkor konvergens, ha $|x| < 1$. Tehát ez a függvénysor konvergencia tartománya. Az összegfüggvény: $s(x) = \frac{1}{1-x}$. Az n-edik részletösszeg $s_n(x) = 1 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$. Kérdés egyenletesen konvergens-e a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ függvénysor a $(-1, 1)$ nyílt intervallumon? Hogy ezt megválaszolhassuk, látnunk kell, hogy az $|s(x) - s_n(x)|$ kicsi lesz-e "x-ben egyenletesen" ha n elég nagy? Mivel $|s(x) - s_n(x)| = |\frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x}| = |\frac{x^n}{1-x}|$. Könnyen látható, hogy bármely rögzített n-re $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n}{1-x} = \infty$. Tehát nem lesz x-ben egyenletesen kicsi az $|s(x) - s_n(x)|$, vagyis a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ sor a $(-1,1)$ intervallumon konvergens, de NEM egyenletesen konvergens.Azonban, ha egy $0 < u < 1$ számot lerögzítünk és vizsgáljuk a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ sort egyenletes konvergencia szempontjából a $D = [-u, u]$ intervallumon, akkor azt kapjuk, hogy minden $x \in D$-re $|s(x) - s_n(x)| = |\frac{x^n}{1-x}| \le \frac{u^n}{1-u}$ (hiszen $x \to \frac{x^n}{1-x}$ egy növekvő függvény). Az u definíciójából adódóan $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u^n}{1-u} = 0$. Tehát ha n elég nagy az $\frac{u^n}{1-u}$ értéke elég kicsi. Vagyis $\forall\varepsilon > 0$-hoz találhatunk N-et, hogy ha $n > N$ akkor $\frac{u^n}{1-u} < \varepsilon$. Ezen N választásra és tetszőleges $n > N$-re és $\forall x$-re: $|s(x) - s_n(x)| = |\frac{x^n}{1-x}| \le \frac{u^n}{1-u} < \varepsilon$. Tehát a konvergencia egyenletes a $[-u, u]$ intervallumon tetszőleges $0 < u < 1$-re de a konvergencia nem egyenletes a $(-1,1)$ intervallumon.

15. PÉLDA: Tekintsük az $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ függvénysort. Ez a függvénysor minden x-re értelmezett. Belátjuk, hogy konvergens is $\forall x$-re. Ez a 3. tételből, az u.n. Cauchy-féle konvergencia kritériumból adódik. Legyen x egy tetszőleges szám és rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$-át. Mivel a $\sin(x)$ függvény abszolút értékben sohasem haladja meg az 1-et, ezért tetszőleges $n < m$-re $|\frac{\sin nx}{n^2} + \cdots + \frac{\sin mx}{m^2}| \le |\frac{\sin nx}{n^2}| + \cdots + |\frac{\sin mx}{m^2}| \le \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{m^2}$. Mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ számsor konvergens ezért az ε-hoz található N, hogy ha $N < n < m$, akkor $\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} < \varepsilon$. Ekkor ugyanerre a N-re $|\frac{\sin nx}{n^2} + \cdots + \frac{\sin mx}{m^2}| < \varepsilon$ teljesül $\forall x$-re, tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ függvénysor konvergens, sőt egyenletesen konvergens a számegyenesen. Tehát ez esetben a konvergencia és az egyenletes konvergencia tartomány maga a számegyenes. Az előző példával ellentétben, most nem látjuk, hogy mi az $s(x)$ összegfüggvény, ezért a Cauchy-kritériumot használtuk az okoskodásunkban. Ennek az az előnye, hogy úgy mutat ki konvergenciát, hogy az összegfüggvényről szót sem ejt, tehát, ha nem ismert az összegfüggvény, akkor is alkalmazható.

A függvénysorok közül mi a hatványsorokkal és a Fourier-sorokkal foglalkozunk.

1.2.1. Hatványsorok

5. DEFINÍCIÓ: Legyen az x_0 egy rögzített szám. Ekkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = b_0 + b_1 (x - x_0) + b_2 (x - x_0)^2 + b_3 (x - x_0)^3 + \cdots$$

alakú függvénysorokat hatványsoroknak nevezzük.

A hatványsor formálisan olyan mint egy végtelen fokszámú polinom.

16. PÉLDA: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x-2)^n$ egy hatványsor (itt a 0-adik tag $b_0 = 0$ és $b_n = \frac{1}{n}$ továbbá $x_0 = 2$. Nyilván minden x-re értelmezett. Kérdés mely x-ekre konvergál? Vegyünk egy x-et és vizsgáljuk meg milyen feltételnek kell teljesülnie, hogy a sor konvergens legyen x-ben. Mivel a hatványsor n-edik tagja $\frac{1}{n} (x-2)^n$ egy n-edik hatvány magától érthető, hogy érdemes a gyökkritériummal probálkozni: ehhez meg kell vizsgálni a $\beta(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} |x-2|^n}$ határértéket. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, ezért a fenti határértékre $\beta(x) = |x-2|$ adódik. A gyökkritérium szerint a sor biztos, hogy abszolút konvergens, ha $\beta(x) < 1$ vagyis minden x-re amelyre $|x-2| < 1$ vagyis ha $1 < x < 3$. Továbbá, szintén a gyökkritérium szerint a sor divergens, ha $\beta(x) > 1$ vagyis, ha $x < 1$ vagy ha $x > 3$. Azt viszont, hogy mi történik az $x = 1$ és $x = 3-ban$ vagyis a konvergenciatartományt jelentő intervallum végpontjaiban, a gyökkritériumból nem találhatjuk ki. Ezt úgy kell eldönteni, hogy behelyetesítjük mind a két végpontot külön-külön a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x-2)^n$ sorba és az így keletkező számsorokat megvizsgáljuk konvergencia szempontjából. Tehát $x = 1$-et helyettesítve kapjuk: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1-2)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n$ sort amelyről tudjuk, hogy konvergens, de csak feltételesen. Másrészt az $x = 3$-at helyettesítve kapjuk a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (3-2)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sort, amely viszont divergens. Tehát a bal végpont az $x = 1$ a konvergencia tartományba tartozik, de a jobb végpont az $x = 3$ már nem. Tehát a konvergencia tartomány az $[1, 3)$ intervallum. Az abszolút konvergencia tartománya viszont csak a $(1, 3)$.

Általánosan egy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ hatványsorra a konvergencia tartomány - mint fent - a gyökkritériumból határozható meg követve a fenti gondolatmenetet. Először is definiáljuk a konvergencia sugár fogalmát:

6. DEFINÍCIÓ: A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ hatványsor konvergencia sugara:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|b_n|}}.$$

ha a határérték létezik.

Ha $x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$ akkor a hatványsor abszolút és egyenletesen konvergens. Ha $x < x_0 - \rho$ vagy ha $x > x_0 + \rho$, akkor a hatványsor divergens. Azt, hogy az $x = x_0 - \rho$ és az $x = x_0 + \rho$ pontokban a hatványsor konvergens-e úgy dönthetjük el, hogy ezen értékeket behelyettesítjük (mint a fenti példában) a hatványsorba és az így keletkező két számsort külön-külön megvizsgáljuk konvergencia szempontjából.

17. PÉLDA: Mely x-ekre konvergens a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+4)^n$ hatványsor? Válasz: Mint fent láttuk ehhez a $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}}$ konvergencia sugarat kell meghatározni. Vagyis $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$. Most meg kell találni a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$ értékét! A Stirling-formulából (1.7) adódik, hogy $\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e} \to \infty$. Tehát $\rho = \infty$, vagyis a hatványsor minden x-re konvergál.

A hatványsorokat arra használjuk, hogy függvényeket közelítsünk velük. Vagyis a feladat némileg fordított mint eddig: nem egy sor összegfüggvényét keressük, hanem egy adott függvényre akarunk találni egy hatványsort melynek ez az adott függvény az összege. Miért teszük mindezt? Gondoljunk egy nagyon fontos függvényre az $f(x) = \sin(x)$-re. Ennek az értékét ki tudjuk számítani néhány nevezetes pontban, de ha meg kellene határoznunk mennyi $\sin(1)$ értéke akkor erre a legtöbben azt válaszolnák, a zsebszámológép ezt azonnal megadja sok tizedesjegy pontossággal. Az viszont keveseknek jut eszébe, hogy a zsebszámológép honnan tudja? Talán beprogramozta valaki, de akkor az honnan tudta? Ha meg akarjuk válaszolni, hogy milyen, módszerrel lehet kiszámolni a $\sin(1)$ értékét, akkor az hamarosan arra a kérdésre vezet, hogy mit tudunk mi egyáltalán kiszámolni? Hát a polinomok helyettesítési értékét biztos ki tudjuk számolni, hiszen egy polinom kiértékelése nem más mint szorzások és összeadások egymás utáni sorozata, amit el tudunk végezni. Ezek után tehát az a feladatunk, hogy találjunk olyan polinomot amely legalább is az $x = 1$ körül jól megközelíti a

$\sin(x)$ értékét és ezután ezt a polinomot az $x = 1$-ben kiértékelve kapjuk a $\sin(1)$ egy közelítését. Persze minden polinom csak egy korlátos intervallumon belül közelíti meg jól a $\sin(x)$ függvényt hiszen a $\sin(x)$ minden x-re -1 és 1 között van, a polinom pedig a végtelenekhez közeledve abszolút értékben a végtelenbe tart. Ha tehát nem csak egy intervallumon belül akarjuk közelíteni a $\sin(x)$-et hanem az egész számegyenesen akkor nem polinomra (ami egy véges összeg), hanem hatványfüggvények számszorosainak végtelen összegére lesz szükségünk. Ezért szeretnénk találni egy hatványsort aminek összegfüggvénye a $\sin(x)$. Ezt a $\sin(x)$ Taylor-sorának fogjuk hívni amit a Taylor-tétel segítségével határozunk meg.

Legyen általánosan az $f(x)$ valamely $[a, b]$ intervallumon értelmezett végtelen sokszor differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy van az $[a, b]$ intervallumnak egy olyan x_0 eleme amelyben mind az $f(x_0)$ értéke mind minden n-re az n-edik derivált $f^{(n)}(x_0)$ értéke könnyen meghatározható. Ekkor érdemes a Taylor-tételt alkalmazni, amely szerint:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x).$$

ahol $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(u)}{n!}(x - x_0)^n$, ahol u az x és x_0 között van. Legyen $s_n(x)$ az n-ed fokú Taylor polinom, azaz:

$$s_n(x) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Vegyük észre, hogy ez éppen az $n+1$-edik részletösszege a $f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ hatványsornak.

7. DEFINÍCIÓ: A fenti

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

hatványsort az f függvény, x_0 ponthoz tartozó **Taylor-sorának** hívjuk.

Tehát a Taylor-tételből következik, hogy $s_n(x) \to f(x)$ pontosan akkor, ha $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

18. PÉLDA: Noha a mérnök hallgatók életében előforduló esetekben az $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ feltétel a legtöbbször teljesül, vagyis a Taylor-sor az Önök életében előforduló függvények esetében általában előállítja a függvélnyt, mégis meg lehet konstruálni olyan $h(x)$ végtelen sokszor differenciálható függvényt, melynek Taylor-sora ugyan konvergens, de nem a $h(x)$-hez, hanem az azonosan 0 konstans függvényhez tart. Ilyen függvény például a

$$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x \geq 0; \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

1.2.2. Fourier-sorok

Adott egy $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ függvény, amire igaz, hogy mind az $f(x)$, mind az $f^2(x)$ Riemann integrálható a $[-\pi, \pi]$ intervallumon.

8. DEFINÍCIÓ: *Trigonometrikus polinomnak* hívjuk az $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$ alakú kifejezéseket. Például: $1 + \cos 3x$; $\sin x + \cos x - \sin 3x$; $4 + \cos x - \sin x + \cos 2x - \sin 2x$.

Észrevétel: Tekintsük a következő függvényeket:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx.$$

Ha $f(x)$ és $g(x)$ ezen függvények közül bármely két különböző függvény, akkor $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx = 0$, továbbá minden $1 \leq k$-ra $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi$.

5. FELADAT: Határozzuk meg az $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ együtthatókat, amelyekre az

$$E(a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) = \int_{-\pi}^{\pi} (a_0 + a_1 \cos x + \cdots + b_n \sin nx - f(x))^2\, dx$$

értéke minimális!

Megoldás: Az E-nek szélsőértéke ott lehet, ahol az E-nek minden, az a_0 az $a_1, b_1, \ldots, b_n$ szerinti ú.n. parciális deriváltjai 0-val egyenlőek.

Ha az a_0 szerint deriváljuk az E-t, akkor:

$0 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 2\left(a_0 + a_1 \cos x + \cdots + b_n \sin x - f(x)\right) dx \Rightarrow$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

Ha a_1 szerint deriváljuk az E-t:

$0 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 2\left(a_0 + a_1 \cos x + \cdots + b_n \sin nx - f(x)\right) \cos x dx \Rightarrow$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx$$

Ha b_1 szerint deriválunk:

$0 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 2\left(a_0 + a_1 \cos x + \cdots + b_n \sin nx - f(x)\right) \sin x dx \Rightarrow$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx$$

Ennek alapján:

9. DEFINÍCIÓ: Legyen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$, $f(-\pi) = f(\pi)$, vagy $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 2π szerint periodikus f a $[-\pi, \pi]$. Tegyük fel, hogy $f(x)$ és $f^2(x)$ Riemann-integrálható a $[-\pi, \pi]$ intervallomon. Ekkor az f függvény *Fourier-során* az $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots$ függvénysort értjük, ahol

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx; \; a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \end{aligned}$$

Kérdés: Milyen feltételek mellett lesz az f Fourier-sora *konvergens*, és milyen feltételek mellett lesz *egyenletesen konvergens.*

13. TÉTEL: Ha egy 2π szerint periodikus $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvénynek csak véges sok szakadáspontja van a $[-\pi, \pi]$ intervallumon, és a függvény a szakadáspontoktól eltekintve differenciálható, akkor az $f(x) - t$ a Fourier-sora minden folytonossági helyen előállítja. Továbbá, ha a szakadási pontokban az $f(x)$ függvény féloldali érintői léteznek, és **nem** függőlegesek, akkor

$$\begin{aligned} s_n(x_0) &\to \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}, \text{ ahol} \\ s_n(x) &= a_0 + a_1 \cos x + \cdots + b_n \sin nx. \end{aligned}$$

Az $f(x_0+0)$ jelenti az $f(x)$ függvény jobboldali határértékét az x_0 helyen. Ha az $f(x)$-nek szakadása van az x_0-ban, akkor még a jobb- és baloldali határérték létezhet. A fenti tétel azt mondja ki, hogy egy ilyen pontban, a tétel feltételeinek teljesülése esetén, a Fourier-sor a jobb- és baloldali határértékek átlagához konvergál.

14. TÉTEL: Ha az $f(x)$ folytonosan differenciálható, és 2π szerint periodikus, akkor a Fourier-sora egyenletesen konvergál $f(x)$-hez.

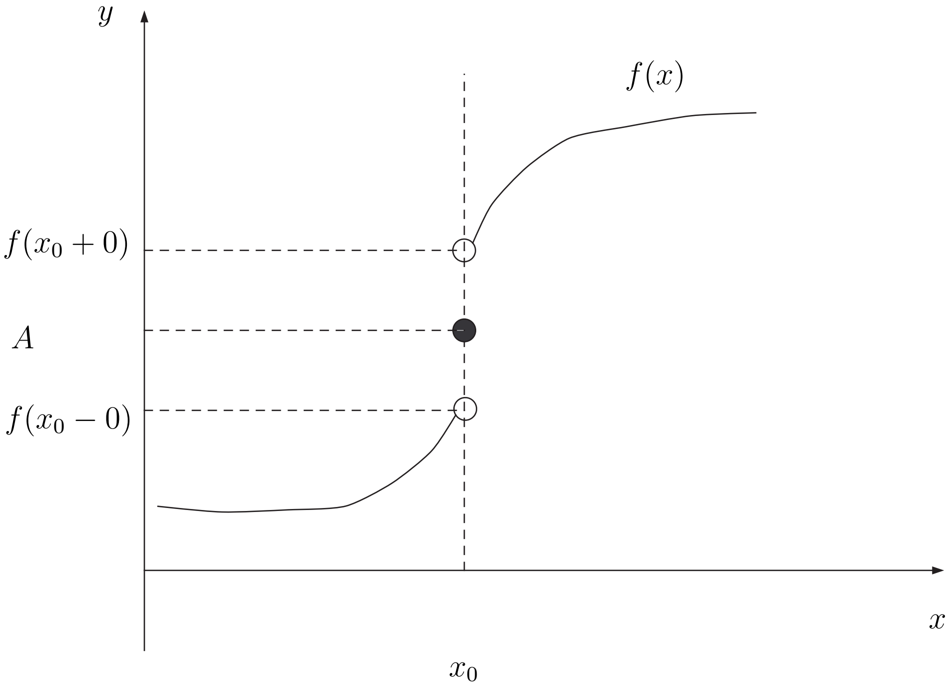
Páros és páratlan függvények Fourier-sora. Legyen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ páros függvény, és 2π szerint periódikus. Ekkor az f Fourier- sorának *összes szinusos tagja 0.* Ugyanis

$$\begin{aligned} \pi b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \int_{-\pi}^{0} f(x) \sin nx dx + \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ \int_{-\pi}^{0} f(x) \sin nx dx &= \begin{bmatrix} y=-x, & x & -\pi & 0 \\ dy=-dx, & y & \pi & 0 \end{bmatrix} = -\int_{\pi}^{0} f(-y) \sin n(-y)\, dy \end{aligned}$$

$$= -\int_{\pi}^{0} f(y) \sin ny dy,$$

ahol $f(-y) = f(y)$ és $\sin n(-y) = -\sin ny$.

Tehát $\pi b_n = \int_{\pi}^{0} f(y) sin(ny) dy - \int_{\pi}^{0} f(y) sin(ny) dy = 0$ teljesül $\forall n \geq 1$-re.



1.2. ábra. Ilyenkor a Fourier-sor az $f(x)$ fv. x_0-ban vett jobb és baloldali határértékeinek átlagához (vagyis A-hoz) konvergál

Legyen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ páratlan, és 2π szerint periodikus függvény. Ekkor $f(x)$ Fourier sora **csak** szinusos részekből áll. Nyilván

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0 \\
a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\
\int_{\pi}^{0} f(x)\cos nx dx &= \begin{bmatrix} -y = x, & x & -\pi & 0 \\ -dy = dx, & y & \pi & 0 \end{bmatrix} \\
&= -\int_{\pi}^{0} f(-y)\cos n(-y)\,dy = -\int_{0}^{\pi} f(y)\cos ny dy, \\
\text{ahol } f(-y) &= -f(y) \text{ és } \cos n(-y) = \cos ny. \\
\text{Tehát } a_n &= \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx - \int_{0}^{\pi} f(y)\cos ny dy = 0.
\end{aligned}$$

19. PÉLDA: Legyen $f(x)$ az a 2π szerint periodikus függvény, melyet a $[-\pi, \pi]$ intervallumon a következőképpen értelmezünk:

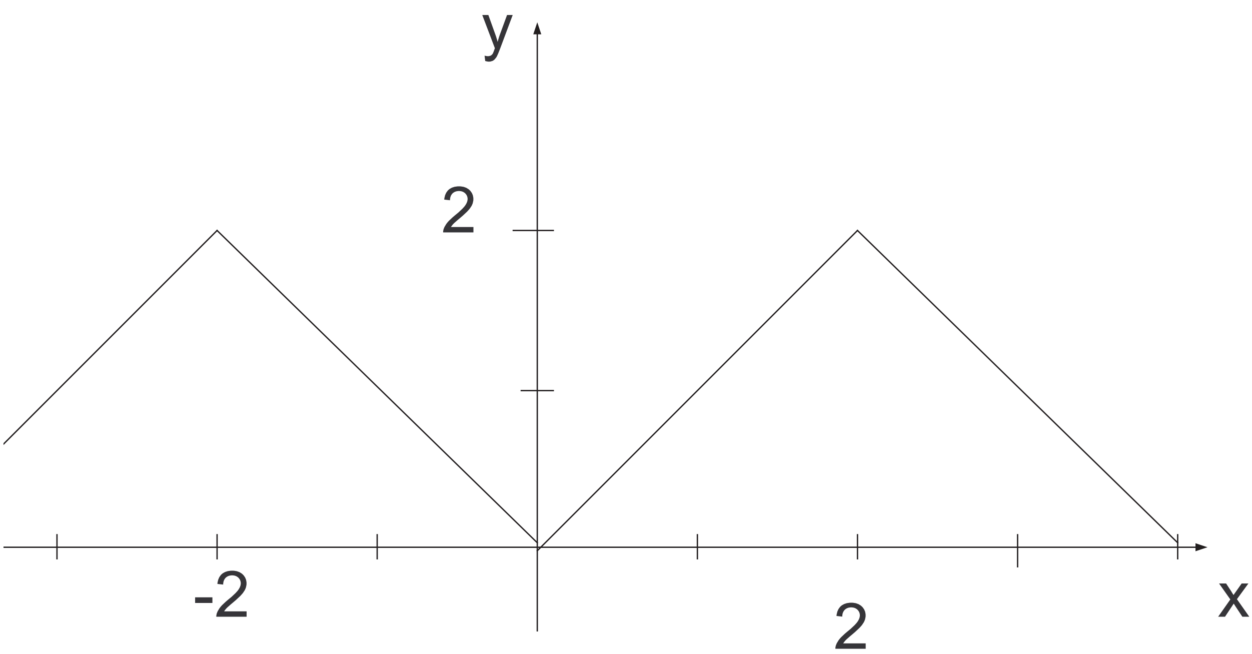
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < \pi; \\ 0, & \text{ha } x = -\pi \text{ vagy } x = 0 \text{ vagy } x = \pi; \\ -1, & \text{ha } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Mivel f páratlan, ezért **csak** szinusos tagok lehetnek.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(x)\sin(nx)dx \\
&= \left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páros;} \\ \frac{4}{n\pi}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

It felhasználtuk azt a hasznos összefüggést, hogy:

$$\cos(n\pi) = (-1)^n.$$



1.3. ábra. Amikor a periódus nem 2π

A 13 tétel miatt a Fourier-sor előállítja a függvényt:

$$f(x) = \underbrace{\frac{4}{\pi}\sin x + \frac{4}{3\pi}\sin 3x + \frac{4}{5\pi}\sin 5x + \cdots}$$

$x = \frac{\pi}{2}$ helyettesítéssel:

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) \Rightarrow 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Amikor a periódus NEM 2π. Legyen $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $2p$ szerint periodikus, és a $[-p,p]$ intervallumon az $f^2(x)$ Riemann integrálható. Az f Fourier sora:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1\cos\left(\frac{\pi}{p}x\right) + b_1\sin\left(\frac{\pi}{p}x\right) + a_2\cos\left(\frac{2\pi}{p}x\right) \\ +b_2\sin\left(\frac{2\pi}{p}x\right) + \cdots + a_n\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right) + \cdots, \end{aligned} \tag{1.10}$$

ahol

$$a_0 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx;\quad a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx$$

és

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx.$$

20. PÉLDA: Nézzük a következő függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} |x|, \text{ ha } |x|\le 2 \\ f(x+4) \text{ egyébként} \end{cases}.$$

Mivel ez páros függvény, így $b_n = 0$, $\forall n$-re, és a $[0,2]$ intervallumon vett integrálját **kétszer** vesszük.

$$a_0 = \frac{1}{2\cdot 2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x\,dx = 1,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx = \int_0^2 x\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx = \ldots \\ &= \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, \text{ ha } n \text{ páros} \\ -\frac{8}{n^2\pi^2}, \text{ ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.11}$$

$(\cos(n\pi) = (-1)^n)$

A Fourier-sor előállítja az $f(x)$-et a következő módon:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1-\frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi}{2}x+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi}{2}x+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi}{2}x+\cdots\right) \\ x &= 0 \text{ helyettesítésre:} \\ 0 &= 1-\frac{8}{\pi^2}\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right] \Rightarrow 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

Fourier sor komplex alakja. Komplex szám exponenciális alakja:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i\sin x,\ \ x\in\mathbf{R} \\ e^{a+ib} &= e^a\underbrace{(\cos b+i\sin b)}_{e^{ix}},\ \ \text{a,b}\in\mathbf{R} \end{aligned}$$

Bizonyítás. Az első állítást látjuk csak be. Felírjuk mindkét oldal Taylor-sorfejtését és látjuk, hogy azok egybeesnek. A jobb oldal sorfejtése:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

$$+i\sin x = ix - i\frac{x^3}{3!}+i\frac{x^5}{5!}-i\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$\cos x + i\sin x = 1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+i\frac{x^5}{5!}-i\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

A baloldal sorfejtése:

$e^{ix}=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\frac{(ix)^5}{5!}+\frac{(ix)^6}{6!}+\frac{(ix)^7}{7!}+\cdots=$
$=1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+i\frac{x^4}{4!}+i\frac{x^5}{5!}-i\frac{x^6}{6!}-i\frac{x^7}{7!}+\cdots$ Ez pedig ugyanaz mint amit fent a jobb oldalra kaptunk. ■

Ezt felhasználva:

$e^{ix}+e^{-ix}=\cos x+i\sin x+\cos(-x)+i\sin(-x)=\cos x+i\sin x+\cos x-i\sin x=2\cos x$ és hasonlóan: $e^{ix}-e^{-ix}=2i\sin x$

Innen pedig kapjuk a gyakran használt

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2};\quad \sin(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

összefüggéseket. Ezekben x helyett nx-re alkalmazva:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \qquad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Ezeket beírjuk az $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ Fourier sorba:

$\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} - ib_n \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2} \right)$

$= \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

ahol: $n \geq 1$-re $c_0 = \frac{a_0}{2}; c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$; $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2.}$.

10. DEFINÍCIÓ: A Fourier-sor komplex alakja : $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

Mivel minden n-re: $c_n = e^{-inx}$, ezért
a Fourier sor komplex alakját közvetlenül is felírhatjuk a

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ segítségével.}$$

2. fejezet

Vektorok

11. DEFINÍCIÓ: *Vektoron* irányított szakaszt értünk és általában $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$-vel jelöljük. Az $\mathbf{a}$ vektor hosszát az $\mathbf{a}$ vektor abszolútértékének hívjuk és $|\mathbf{a}|$-vel jelöljük. *Egységvektornak* nevezzük azon vektorokat, melyek hossza *egy.* Két vektor *azonos*, ha irányuk és hosszuk is azonos.

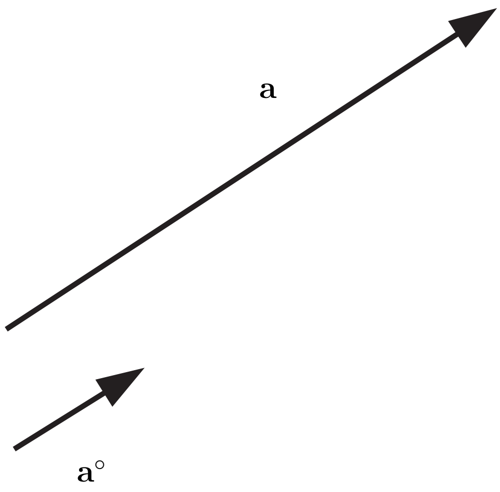
Ha egy $\mathbf{a}$ vektort megszorzunk saját hosszának reciprokával, egységvektort kapunk, hacsak $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Az $\mathbf{a}$ vektorral azonos irányú egységvektort $\mathbf{a}^0$-val jelöljük. Azaz $\mathbf{a}^0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$.

12. DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}_{1,\dots,}\mathbf{a}_r$ vektorok egy *lineáris kombinációjának* nevezzük az $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k\mathbf{a}_k$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbf{R})$ összeget. Itt az $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ valós számokat tetszőlegesen választhatjuk. Például: $\mathbf{a}_1 = (2, 3, 4)$; $\mathbf{a}_2 = (-1, 0, 5)$; $\alpha_1 = 3$; $\alpha_2 = 4$, akkor

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 = 3 \cdot (2, 3, 4) + 4 \cdot (-1, 0, 5) = (2, 9, 32)\,.$$

13. DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}_{1,\dots,}\mathbf{a}_k$ vektorok *lineárisan függetlenek*, ha egyik sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. Az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorokat *lineárisan függőnek* hívjuk, ha valamelyik kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként.

15. TÉTEL: Az $\mathbf{a}_{1,\dots,}\mathbf{a}_k$ vektorok lineárisan függetlenek, akkor és csak akkor, ha $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ csak abban az esetben lehetséges, ha $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.



2.1. ábra. Az $\mathbf{a}$ irányú egységvektor.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathbf{a}_{1,\dots,}\mathbf{a}_k$ lineárisan függetlenek, és $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$. Ekkor, ha volna $1 \leq i \leq k$, amire $\alpha_i \neq 0$, akkor

$$\mathbf{a}_i = \frac{1}{\alpha_i}\left(-\alpha_1\mathbf{a}_1 - \cdots - \alpha_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} - \alpha_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} - \cdots - \alpha_k\mathbf{a}_k\right),$$

azaz

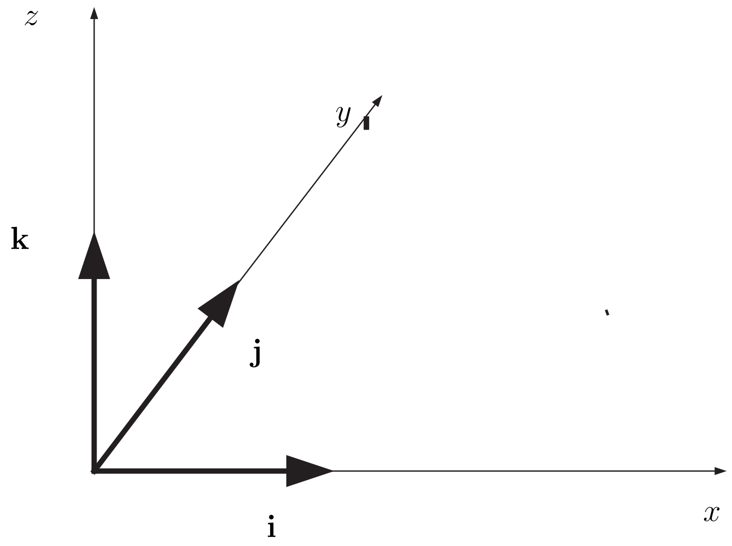
$$\mathbf{a}_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\mathbf{a}_1 - \cdots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\mathbf{a}_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\mathbf{a}_{i+1} - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha_i}\mathbf{a}_k$$

lenne, ami ellentmond azzal, hogy egyik vektor sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. Tehát ha $\mathbf{a}_{1,\dots,}\mathbf{a}_k$ lineárisan függetlenek, akkor a $\mathbf{0}$ vektor az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$-ból csak a triviális módon, csupa 0 együtthatókkal áll elő. Másrészt, ha igaz, hogy $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\mathbf{a}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_i = 0$, $\forall i = 1, \dots, k$-ra, akkor az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ lineárisan függetlenek. Ugyanis, ha lineárisan függőek lennének, akkor valamelyik vektor, tegyük fel hogy az $\mathbf{a}_i$, előállna mint a többi lineáris kombinációja:

$$\mathbf{a}_i = \beta_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \beta_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} + \beta_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} + \cdots + \beta_k\mathbf{a}_k,$$

ekkor viszont

$$\beta_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \beta_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} - \mathbf{a}_i + \beta_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} + \cdots + \beta_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0},$$



2.2. ábra. A koordináta egységvektorok.

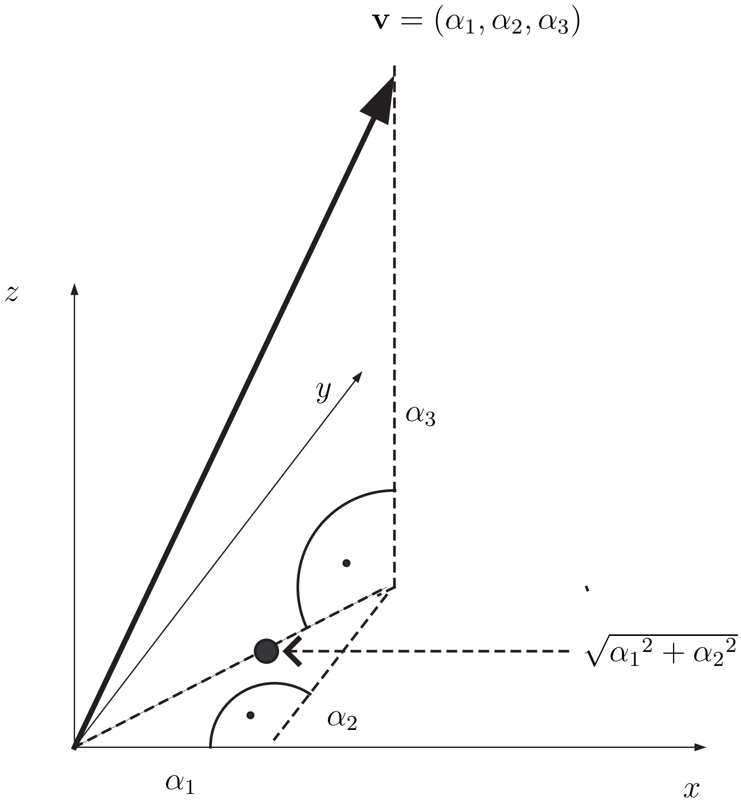
ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{0}$ vektort előállítottuk **nem** csupa 0 együtthatókkal, hiszen $-\mathbf{a}_i$ vektor együtthatója -1. Ez ellentmond a $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_i = 0$, $\forall i = 1, \ldots, k$-ra feltételnek. ■

6. FELADAT: Bizonyítsuk, be, hogyha az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektorok valamelyike a $\mathbf{0}$ vektor, akkor az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektor rendszer semmi esetre sem lehet lineárisan független.

Az x, y, z tengely irányú koordináta egységvektorokat $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$-val jelöljük.
Térben $\forall \mathbf{v}$ vektor egyértelműen előállítható a következő alakban:
$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k}$. Az $\alpha_1, \alpha_2 \alpha_3$ számokat a $\mathbf{v}$ **koordinátáinak** nevezzük.
Sokszor a $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k}$ helyett csak $\mathbf{v} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$-t írunk.

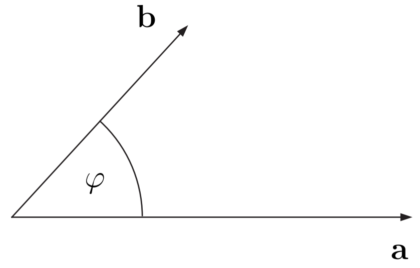
16. TÉTEL: Térbeli Pitagorasz tétel: A $\mathbf{v}$ hossza:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \alpha_3^2} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$$



2.3. ábra. A **v** hossza a két derékszögű háromszögben felírt Pitagorasz tételből kapható meg.

14. DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$ (ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorok *három* komponensű vektorok, azaz *térbeli* vektorok), vagy $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^2$ esetén $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok *skaláris szorzatán* az $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\varphi$ mennyiséget értjük, és $\mathbf{ab}$-vel jelöljük.

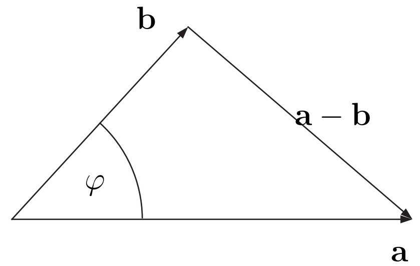


2.4. ábra. az **a** és a **b** vektorok

A skaláris szorzat eredménye egy *szám.* Ha $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, akkor az $\mathbf{aa} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{a}|\cos 0 = |\mathbf{a}|^2$-t kapjuk. Tehát $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$. Ha $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, akkor $\varphi = \frac{\pi}{2}$, vagyis $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\underbrace{\cos\varphi}_{0} = 0$. Fordítva, ha $\mathbf{ab} = 0$, az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ vektorokra, akkor $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. A skaláris szorzatot felírhatjuk a vektor koordinátáiból.

17. TÉTEL: Legyen $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ és $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, ekkor

$$\mathbf{ab} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$



2.5. ábra. az **a** és a **b** vektorok által kifeszített háromszög

Bizonyítás. A cosinus-tétel szerint $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2\underbrace{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\varphi}_{\mathbf{ab}}$, $2\mathbf{ab}=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2$, $|\mathbf{a}|^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2$; $|\mathbf{b}|^2=\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2$, ezeket felhasználva $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2=(\alpha_1-\beta_1)^2+(\alpha_2-\beta_2)^2+(\alpha_3-\beta_3)^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2-2\alpha_1\beta_1-2\alpha_2\beta_2-2\alpha_3\beta_3$, így $2\mathbf{ab}=2\alpha_1\beta_1+2\alpha_2\beta_2+2\alpha_3\beta_3$, vagyis

$$\mathbf{ab}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3.$$

■

21. PÉLDA: Számítsuk ki az $\mathbf{a}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$ és a $\mathbf{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ vektorok által közbezárt szöget!

Megoldás: $\mathbf{ab}=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\varphi$, így

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}+0}{\underbrace{\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+2}}_{\sqrt{3}}\underbrace{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+0}}_{1}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}1}=\frac{1}{2},$$

tehát $\cos\varphi=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=60^0$.

22. PÉLDA: Számítsuk ki a $\mathbf{v}=\left(-1,\sqrt{2},1\right)$ vektor és az x,y,z tengelyek közötti szögeket!

Megoldás: $\mathbf{v}^0=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$, így az t tengely és $\mathbf{v}$ közötti α szögre:

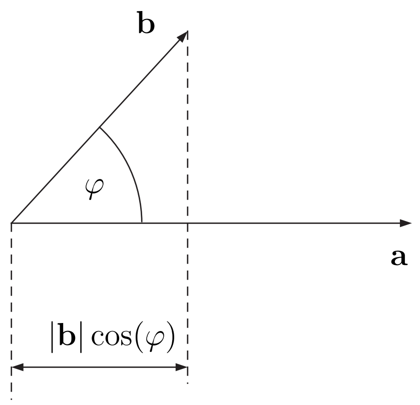
$$\cos\alpha=\mathbf{iv}^0=-\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=120^0.$$

Az y tengely és a $\mathbf{v}$ vektor közötti β szögre:

$$\cos\beta=\mathbf{jv}^0=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\beta=45^{0.}.$$

A z tengely és a $\mathbf{v}$ vektor közötti γ szögre:

$$\cos\gamma=\mathbf{kv}^0=\frac{1}{2}\Rightarrow\gamma=60^0.$$



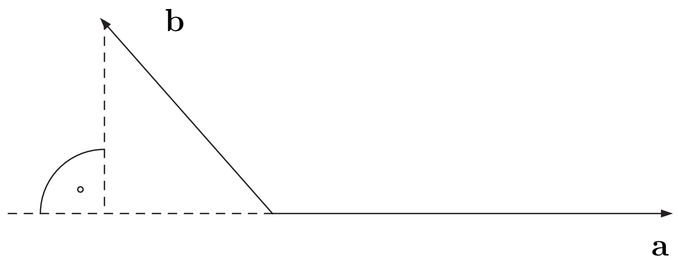
2.6. ábra. a **B**-nak az **a** vektor egyenesére eső merőleges vetületének előjeles hossza

Egy vektornak egy másik vektor egyenesére eső merőleges vetülete:

A **b** vektornak az **a** vektor irányába eső merőleges vetületét a következő képpen határozzuk meg:

A **b** vektornak az **a** vektor irányába eső merőleges vetületének előjeles hossza= $|\mathbf{b}|\cos(\varphi) = |\mathbf{b}| \underbrace{|\mathbf{a}^0|}_{1} \cos\varphi = \mathbf{b}\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|}$ (l. 2.6. ábra).

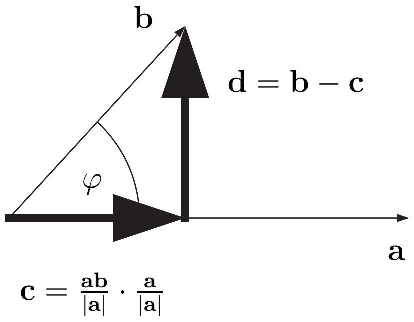
Ha ez negatív, akkor **b**-nek a vetülete az **a**-val ellentétes irányba esik.



2.7. ábra. az Amikor a **b** vektornak az **a**-ra eső vetülete negatív

23. PÉLDA: Bontsuk fel a $\mathbf{b}$ vektort az $\mathbf{a}$-val párhuzamos, és az $\mathbf{a}$-ra merőleges vektorok összegére! Jelöljük $\mathbf{c}$-vel az $\mathbf{a}$-val párhuzamos és $\mathbf{d}$-vel az $\mathbf{a}$-ra merőleges összetevőt.

Megoldás: Mivel $\mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$, ezért elég $\mathbf{c}$-t meghatározni (2.8. ábra). $\mathbf{b}$-nek



2.8. ábra. a $\mathbf{b}$-nek az $\mathbf{a}$-ra való merőleges vetület vektota

az $\mathbf{a}$ irányába eső vetületének előjeles hossza: $\frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|}$ az $\mathbf{a}$ irányú egységvektor: $\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$. Az $\frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|}\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ szorzat ad egy $\mathbf{a}$-val párhuzamos vektort, ami a $\mathbf{b}$ vektornak az $\mathbf{a}$ egyenesére eső merőleges vetület vektora: $\mathbf{c} = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$.

15. DEFINÍCIÓ: Egy 2×2-es számtáblázatot, azt 2×2-es *mátrix*-nak hívunk.

Például: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$. Az A determinánsa: $\det(A) = 2 \cdot (-1) - 5 \cdot 3 = -17$. Általában, ha $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, akkor

$$\det(A) = ad - bc.$$

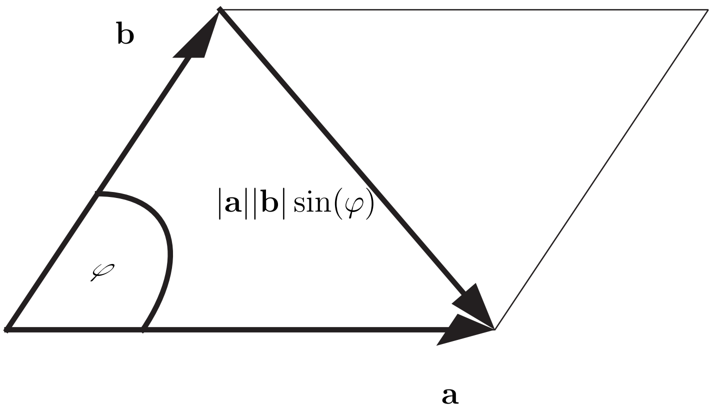
Legyen A egy 3×3-as mátrix. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, ekkor $\det(A) = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{23}$.

Például: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ -1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$, $\det(A) = 1 \cdot 6 \cdot 2 + 2 \cdot 7 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 \cdot 8 - [(-1) \cdot 6 \cdot 3 + 8 \cdot 7 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \cdot 2]$.

2.1. Vektoriális szorzat

16. DEFINÍCIÓ: Legyen $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$. (Azaz térbeli vektorok.) Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorok *vektoriális szorzata* egy vektor (jele: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$), aminek

hossza: $|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}| \sin\varphi$, vagyis az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe.



2.9. ábra. az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok

iránya: $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b} \end{array} \right\}$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *jobbsodrású* rendszert alkot.

Ebből következik, hogy: $\mathbf{a} \| \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

1. LEMMA: Ha $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ és $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, akkor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

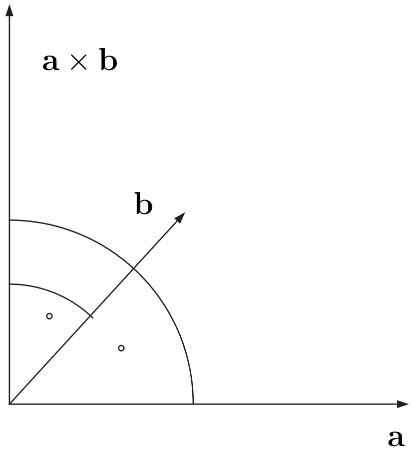
.

Bizonyítás.

A következő szorzó táblát bárki azonnal leellenőrizheti:

$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$

$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$; $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$; $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$



2.10. ábra. az **a** és a **b** vektoriális szorzata

$\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}$; $\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$; $\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}$.
Ezt használva:
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k})\times(\beta_1\mathbf{i}+\beta_2\ \ \mathbf{j}+\beta_3\mathbf{k})=$
$\alpha_1\beta_2\mathbf{k}-\alpha_1\beta_3\mathbf{j}-\alpha_2\beta_1\mathbf{k}+\alpha_2\beta_3\mathbf{i}+\alpha_3\beta_1\mathbf{j}-\alpha_3\beta_2\mathbf{i}=$

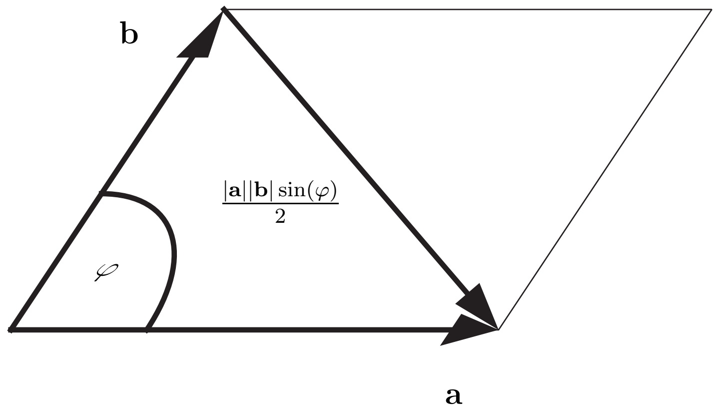
$$(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\,\mathbf{i}-(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)\,\mathbf{j}+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\,\mathbf{k}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\\ \beta_1&\beta_2&\beta_3\end{vmatrix}.\ \blacksquare$$

24. PÉLDA: Számítsuk ki az $\mathbf{a}=(2,-1,3)$ és a $\mathbf{b}=(1,0,7)$ vektorok által kifeszített háromszög területét!

Megoldás: Tudjuk, hogy $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ éppen az **a** és **b** által kifeszített paralelogramma területe. Tehát az **a** és **b** által kifeszített háromszög területe: $\frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}{2}$.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ 2&-1&3\\ 1&0&7\end{vmatrix}=-7\mathbf{i}-11\mathbf{j}+\mathbf{k}=(-7,-11,1)\,.\ \text{Tehát}\ \frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}{2}=$$
$\frac{\sqrt{171}}{2}$.

18. TÉTEL: (Kifejtési tétel) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{ac})\,\mathbf{b}-(\mathbf{ab})\,\mathbf{c}$.



2.11. ábra. az **a** és a **b** által kifeszített háromszög

2.2. Vegyes szorzat

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok ilyen sorrendben vett *vegyes szorzata* $\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c}$. Ha ezt koordinátás alakban kiszámoljuk, akkor kapjuk:

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ ha } \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \\ \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \end{array} \right. .$$

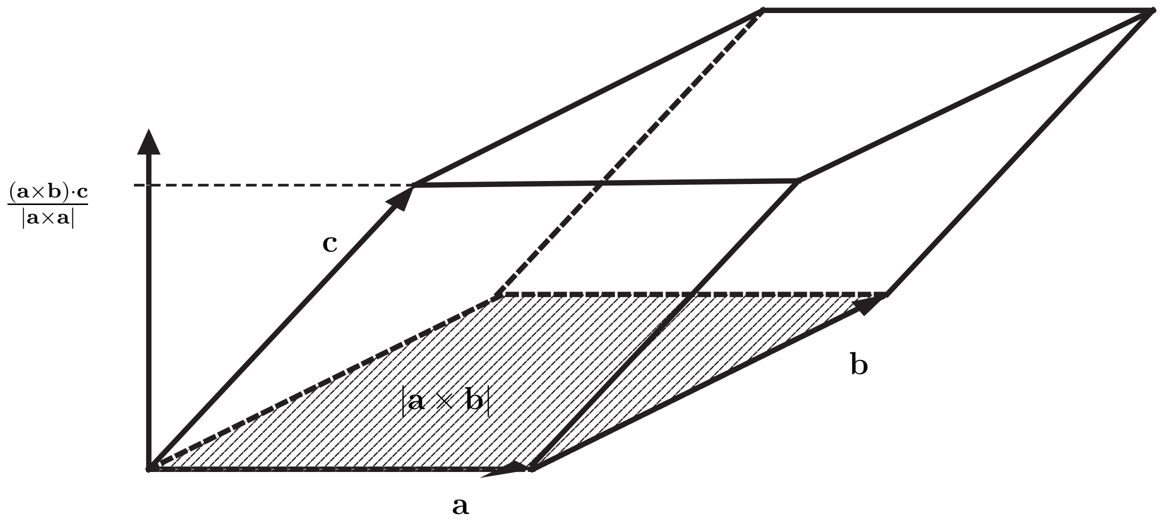
19. TÉTEL: Az $\mathbf{abc}$ vegyes szorzat *abszolútértéke* az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok által kifeszített *paralelepipedon térfogatával* egyenlő.

Bizonyítás. A paralelepipedon térfogata=alapterület szorozva a magassággal (1.2.12. ábra). Az alapterület: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. A magasság pedig: a $\mathbf{c}$ vektornak az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorra vett merőleges vetülete, vagyis: $\frac{|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}|}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}$ Tehát:

$$\text{paralepipedon térfogat} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \frac{|(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c}|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c}| = |\mathbf{abc}|$$

■

Következmény: Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok a tér ugyanazon síkjában vannak (közös kezdőpontból felmérve), *akkor és csak akkor*, ha $\mathbf{abc} = 0$. Ez azért van így, mert $\mathbf{abc} = 0 \Leftrightarrow$ ha az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ által kifeszített paralelepipedon térfogata $\mathbf{0} \Leftrightarrow$ ha az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ által kifeszített paralelepipedon elfajult, azaz $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ egy síkban van.



2.12. ábra. A paralepipedon térfogata

25. PÉLDA: Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{a} = (7, -3, 2)$ a $\mathbf{b} = (3, -7, 8)$ és a $\mathbf{c} = (1, -1, 1)$ vektorok egy síkban vannak!

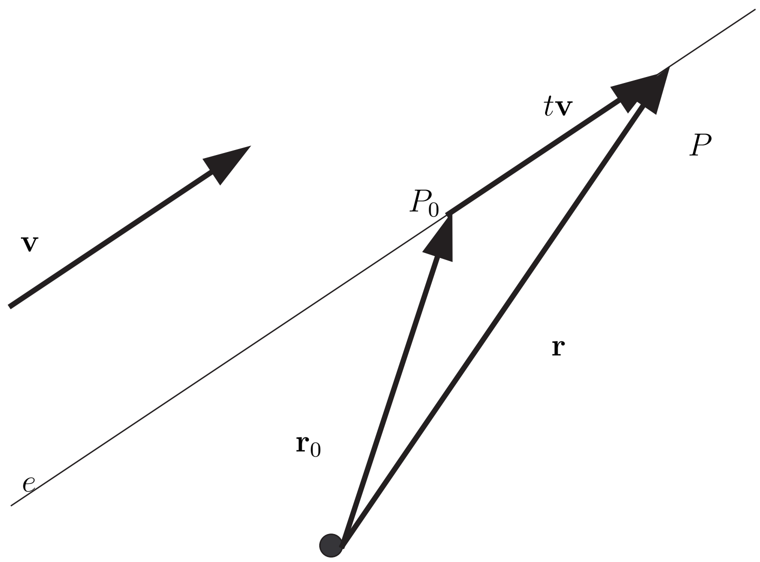
$$\textit{Megoldás: } \mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.3. Az egyenes egyenletei

Legyen $\mathbf{v}$ egy tetszőleges vektor, amely az e egyenessel párhuzamos.

Ekkor a $\mathbf{v}$ az e egyenes egy irányvektora. Legyen az e egyenes egy pontja P_0, és a P_0 pont helyvektora $\mathbf{r}_0$. Ekkor az $\mathbf{r}$ helyvektorú P pont az e egyenesen van *akkor és csak akkor,* ha $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \| \mathbf{v}$, azaz $\exists t$, hogy $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$. Ez adja az egyenes *vektoros egyenletét*:

$$\mathbf{r}\,(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$



2.13. ábra. Az egyenes vektoros egyenlete $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$

26. PÉLDA: Írjuk fel az egyenes vektoros egyenletét, ha egy pontjának koordinátái: $P_0\,(0,2,5)$, és egy irányvektora: $\mathbf{v} = (5,-1,2)$!

Megoldás: $\mathbf{r}\,(t) = (0,2,5) + t\,(5,-1,2)$, azaz $\mathbf{r}\,(t) = (5t, 2-t, 5+2t)$, $t \in \mathbf{R}$.

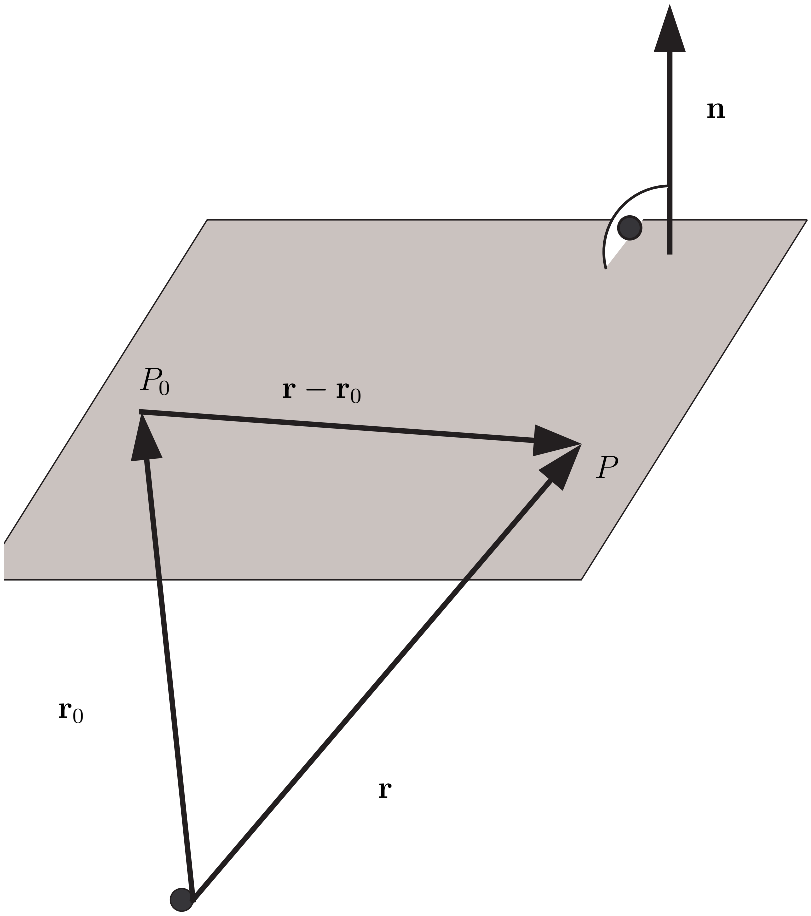
Ha az egyenes vektoros egyenletében $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$; $\mathbf{r} = (x,y,z)$; $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, akkor az egyenes *paraméteres egyenletrendszere* $\left\{\begin{array}{c} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{array}\right\} \Rightarrow t = \frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$, feltéve, hogy $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$ és $v_3 \neq 0$.

27. PÉLDA: Ha az egyenes az $x = -y = \frac{1}{3}z + 4$ egyenlettel adott, akkor határozzuk meg egy pontját és egy irányvektorát !

Megoldás: $\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z+12}{3}$. Innen $\mathbf{v} = (1,-1,3)$ és $P = (0,0,-12)$.

2.4. A sík egyenletei

A sík egyenletén olyan egyenletet értünk, melyet a sík minden pontjának koordinátái kielégítenek, de más pontok nem.



2.14. ábra. A paralepipedon térfogata

Legyen $\mathbf{n}$ egy vektor, ami merőleges az S síkra.Ha az r_0 helyvektorú P_0 az S sík egy pontja, akkor az $\mathbf{r}$ helyvektorú, P pont az S síkban van, abban az esetben, ha $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\mathbf{n}=0$. $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\mathbf{n}=0$ *a sík vektoros egyenlete.*

Ugyanis ha az $\mathbf{r}$ helyvektor végpontja az S síkban van, akkor $\mathbf{n}\perp(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})$, hiszen ekkor $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ is az S síkban van és $\mathbf{n}$ merőleges az S sík minden vektorára, így $\mathbf{n}$ merőleges $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$-ra is. Tehát $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\mathbf{n} = 0$. Másrészt, ha $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\mathbf{n} = 0$, akkor $(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})\perp\mathbf{n}$. Viszont ekkor az $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ vektor az $\mathbf{r}_0$ kezdőponttal az S síkban van, így $\underbrace{\mathbf{r}_0+(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}_{\mathbf{r}}$ helyvektor az S síkba mutat.

Legyen $\mathbf{r}=(x,y,z)$; $\mathbf{r}_0 = (x_0,y_0,z_0)$; $\mathbf{n}=(n_1,n_2,n_3)$ az $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\mathbf{n}=0$, ekkor $(n_1,n_2,n_3)\,(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$. Vagyis a sík egyenlete:

$$n_1x+n_2y+n_3z = n_1x_0+n_2y_0+n_3z_0.$$

28. PÉLDA: Legyen $\mathbf{n}=(2,3,5)$ a sík normálvektora, és $P_0=(1,-1,3)$ a sík egy pontja. Írjuk fel a sík egyenletét!

$$\begin{array}{llllllllll} & n_1 & n_2 & n_3 & & n_1x_0+ & n_2y_0+ & n_3z_0 & & \\ \textit{Megoldás:} & 2x+ & 3y+ & 5z & = & 2\cdot1- & 3\cdot1+ & 5\cdot3 & = & 14 \\ & 2x+ & 3y+ & 5z & = & 14 & & & & \end{array}$$

2.4.1. A sík kétparaméteres egyenlete

Legyen P_0 az S sík egy pontja, és $\mathbf{u},\mathbf{v}$ vektorok az S síkkal párhuzamosak, de egymással **nem**. Ekkor (l. 2.15. ábra) létezik t,τ, hogy: $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0 = t\mathbf{u}+\tau\mathbf{v}$, így a sík paraméteres egyenletet:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{u}+\tau\mathbf{v},$$

ahol $t,\tau\in\mathbf{R}$ a paraméterek.

29. PÉLDA: Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P_0 = (-1,3,2)$ ponton, és párhuzamos az $\mathbf{u}=(1,2,-1)$, és a $\mathbf{v}=(5,0,1)$ vektorokkal!

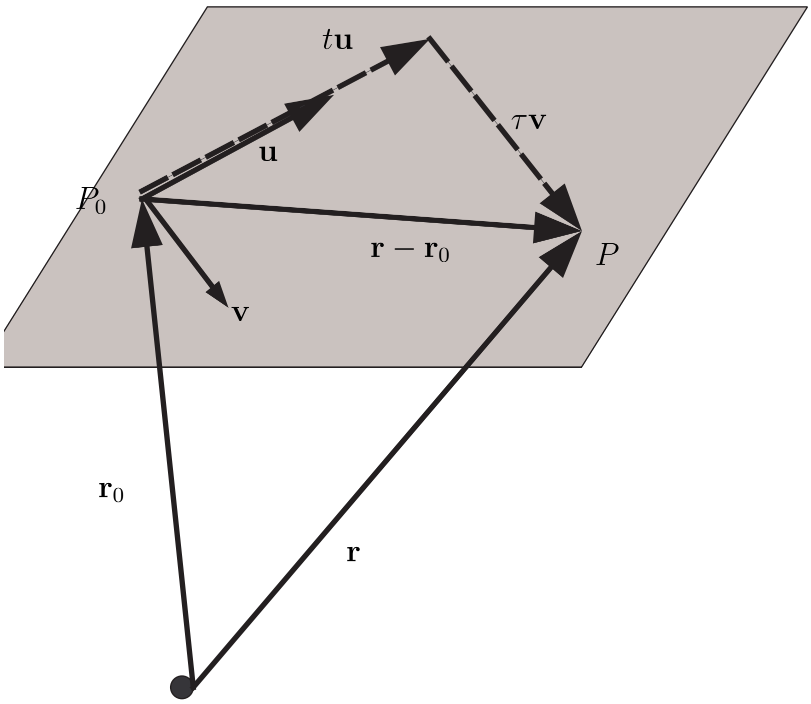
Megoldás: $\mathbf{r}\,(t,\tau) = (-1,3,2)+t\,(1,2,-1)+\tau\,(5,0,1)$, azaz a kétparaméteres egyenlet: $\mathbf{r}\,(t,\tau) = (-1+t+5\tau, 3+2t, 2-t+\tau)$.

Ezen sík egyenletének vektoros alakja.

A vektoros egyenlethez szükségünk van egy normálvektorra:

$$\mathbf{n}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 5 & 0 & 1\end{vmatrix}=(2,-6,-10),$$ tehát $\mathbf{n}\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0$, azaz

$$\begin{aligned}2x-6y-10z &= -2-18-20=-30\\ 2x-6y-10z &= -30\end{aligned}$$

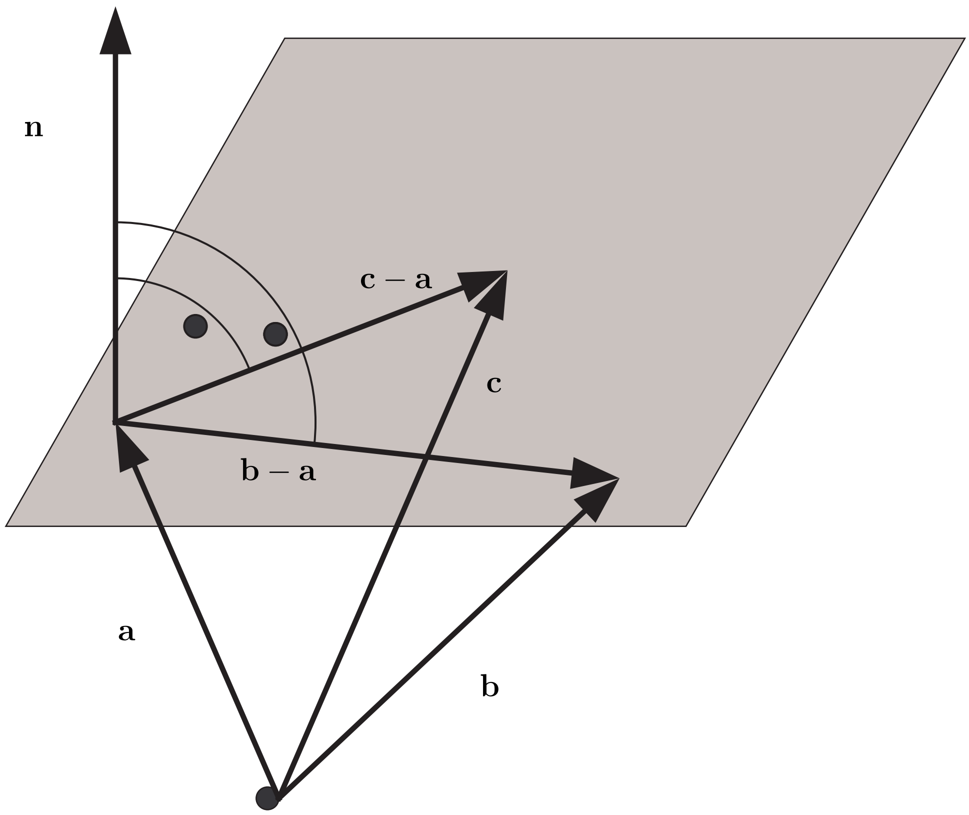


2.15. ábra. A sík paraméteres egyenlete

30. PÉLDA: Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az $A\,(-3,0,1)$, $B\,(-1,2,4)$ és a $C\,(0,-1,1)$ pontokon!

Megoldás: $\mathbf{n}=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})$, mivel $\begin{matrix}\mathbf{b}-\mathbf{a}=(2,2,3)\\ \mathbf{c}-\mathbf{a}=(3,-1,0)\end{matrix}$, így $\mathbf{n}=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & -1 & 0\end{vmatrix}=(3,9,-8)$, azaz

$$3x+9y-8z=-9-8=-17 \text{ azaz } 3x+9y-8z=-17$$



2.16. ábra. Sík egyenletének meghatározása, ha adott három pontja.

Két pont távolsága: Pitagorasz-tétel szerint ha $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, akkor $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$.

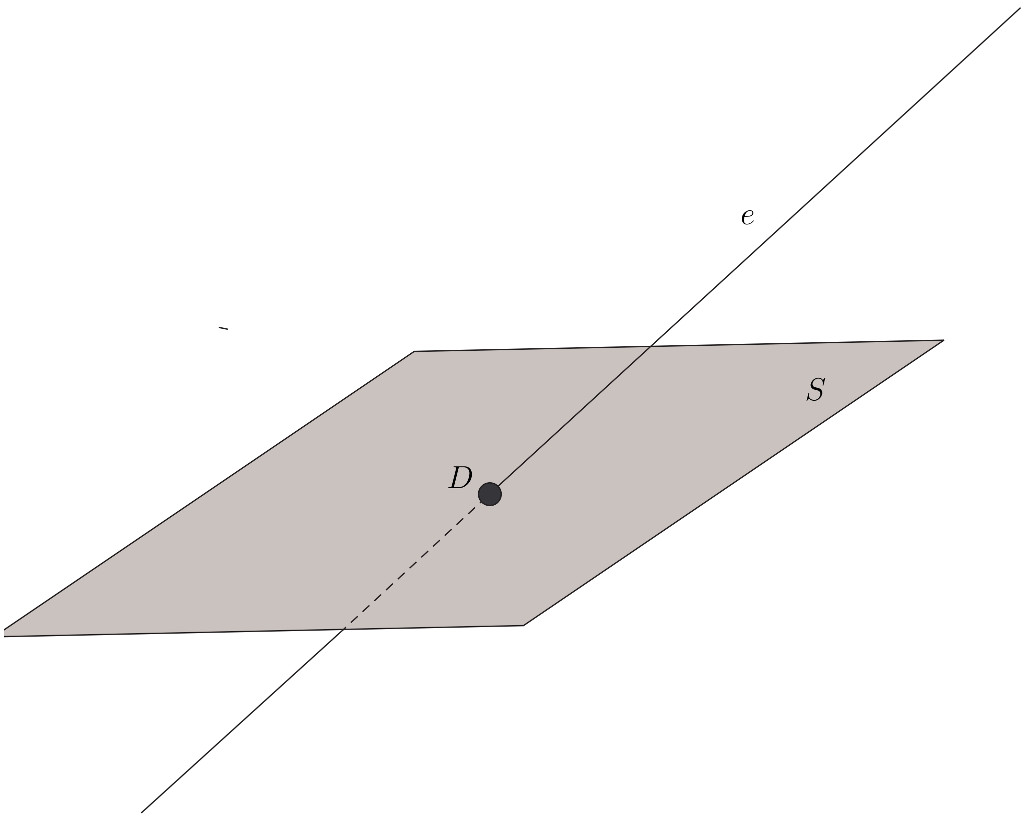
31. PÉLDA: Számítsuk ki az $A\,(5, 2, -7)$ és a $B\,(-1, 8, 3)$ pontok távolságát!

Megoldás: Ha az A helyvektora $\mathbf{a} = (5, 2, -7)$ és a B helyvektora $\mathbf{b} = (-1, 8, 3)$, akkor az A, B pontok távolsága: $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{36 + 36 + 100} = \sqrt{172}$.

Egyenes és sík döféspontja

Adott egyenes és sík döféspontjának meghatározását egy példán keresztül mutatjuk be:

32. PÉLDA: Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = (3, -2, 1) + t(-1, 3 - 4)$ egyenes és a $2x - 5y + 2z = -7$ sík D döféspontját! (l.2.17. ábra)



2.17. ábra. Egyenes és sík döféspontja.

Megoldás: Behelyettesítjük az $\left.\begin{array}{c} x = 3 - t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 - 4t \end{array}\right\}$ kifejezéseket a $2x - 5y + 2z = -7$ egyenletbe, és kapjuk, hogy $2(3 - t) - 5(-2 + 3t) + 2(1 - 4t) =$

$-7 \Rightarrow t = 1$. A t értékét visszaírva az $\left.\begin{array}{c} x = 3 - t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 - 4t \end{array}\right\}$ kifejezésekbe adódik,hogy $\left\{\begin{array}{c} x = 3 - 1 = 2 \\ y = -2 + 3 = 1 \\ z = 1 - 4 = 3 \end{array}\right\}$, azaz a döféspont koordinátái: $D\,(2, 1, -3)$.

Pont és sík távolsága

Az $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ vektornak az $\mathbf{n}$ normálvektorra eső merőleges vetülete **egyenlő** a P pontnak az S síktól való távolságával (l. 2.18).

33. PÉLDA: Adott az $x+2y-z = 3$ sík és a $P\,(1, 1, 2)$ pont. Milyen távol van a P pont a síktól?

Megoldás: $\mathbf{n} = (1, 2, -1)$ a sík egy pontja $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = -3$. $\mathbf{r}_0 = (0, 0, -3)$; $\mathbf{r} = (1, 1, 2)$. Tehát az $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (1, 1, 5)$ vektornak az $\mathbf{n}$-re való merőleges vetületét kell kiszámolni. Ez pedig: $\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 5 \cdot 1}{\sqrt{1+4+1}} = -\frac{2}{\sqrt{6}}$. Tehát a távolság $\frac{2}{\sqrt{6}}$.

Két sík által közrezárt szög

Az S_1 és az S_2 síkok által közrezárt szög az $\mathbf{n}_1$ és a $\mathbf{n}_2$ normálvektorok közrezárt szögével egyenlő (merőleges szárú szögek).

34. PÉLDA: Legyen $S_1 : x + y - z = 5$ és $S_2 : 2x + 3y + 4z = 6$ két sík. Mekkora szöget zár be ez a két sík?

Megoldás: $\mathbf{n}_1 = (1, 1, -1)$; $\mathbf{n}_2 = (2, 3, 4)$. Az $|\mathbf{n}_1| = \sqrt{3}$; $|\mathbf{n}_2| = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}$. Ha α a közrezárt szög, akkor

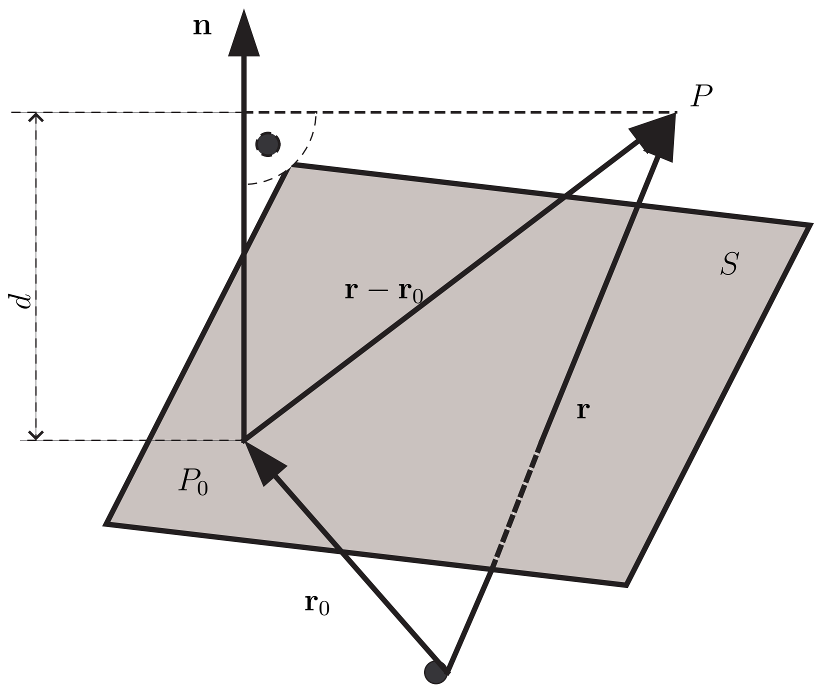
$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\,|\mathbf{n}_2|} = \frac{2 + 3 - 4}{\sqrt{3}\sqrt{29}} = \frac{1}{\sqrt{87}}$$

$$\cos\alpha = 0,1072 \Rightarrow \alpha = 1,4633 \text{ radián}$$

Egyenes és sík szöge

Legyen e' az e egyenesnek az S síkban vett vetülete. Ekkor az e egyenes és az S sík közötti szögén az e és az e' egyenesek szögét értjük (l. 2.20. ábra).

Ez viszont $\frac{\pi}{2} - \alpha$, ahol α az $\mathbf{n}$ normálvektor és a $\mathbf{v}$ irányvektor szöge.

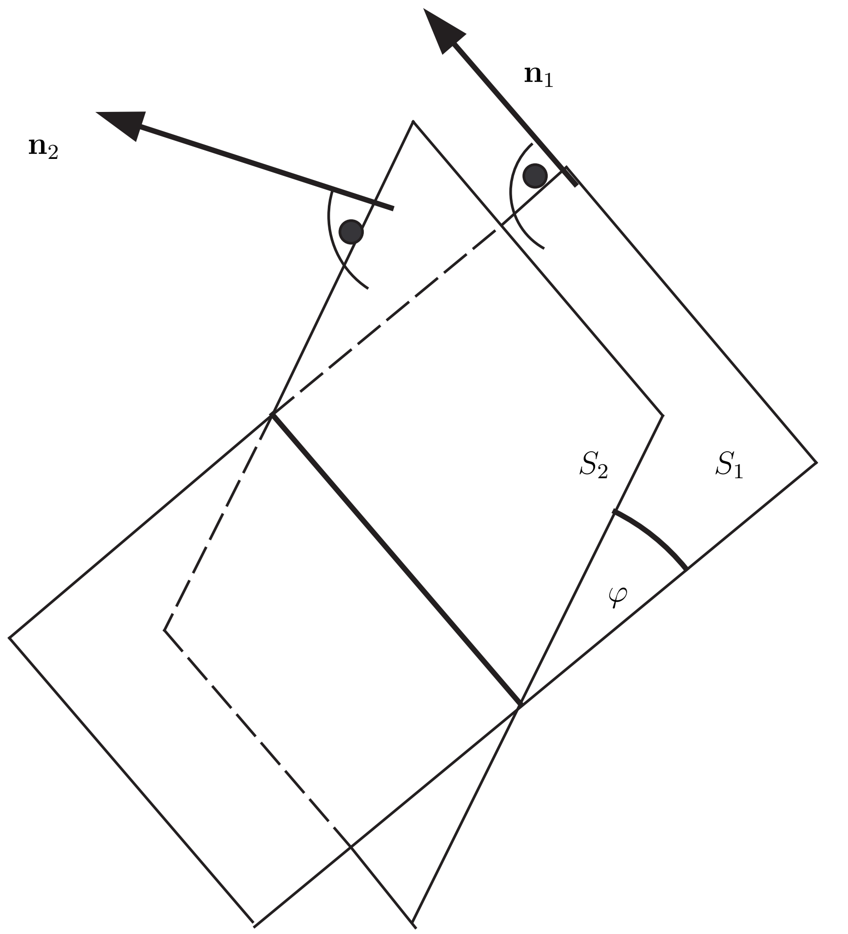


2.18. ábra. Pontnak síktól való távolsága.

35. PÉLDA: Számoljuk ki az $x+2y+3z = 5$ sík és az $\mathbf{r}(t) = (2+2t, -t, 1+t)$ szögét!

Megoldás: $\mathbf{n} = (1, 2, 3)$ és $\mathbf{v} = (2, -1, 1)$. $|\mathbf{n}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ és $|\mathbf{v}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$. Ezeket felhasználva adódik a következő: $\cos\alpha = \frac{\mathbf{nv}}{|\mathbf{n}||\mathbf{v}|} = \frac{1\cdot 2 - 1\cdot 2 + 3\cdot 1}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{87}} = 0,3273 \Rightarrow \alpha = 1,237$ radián. Tehát a sík és az egyenes szöge: $\frac{\pi}{2} - \alpha = 0,334$.

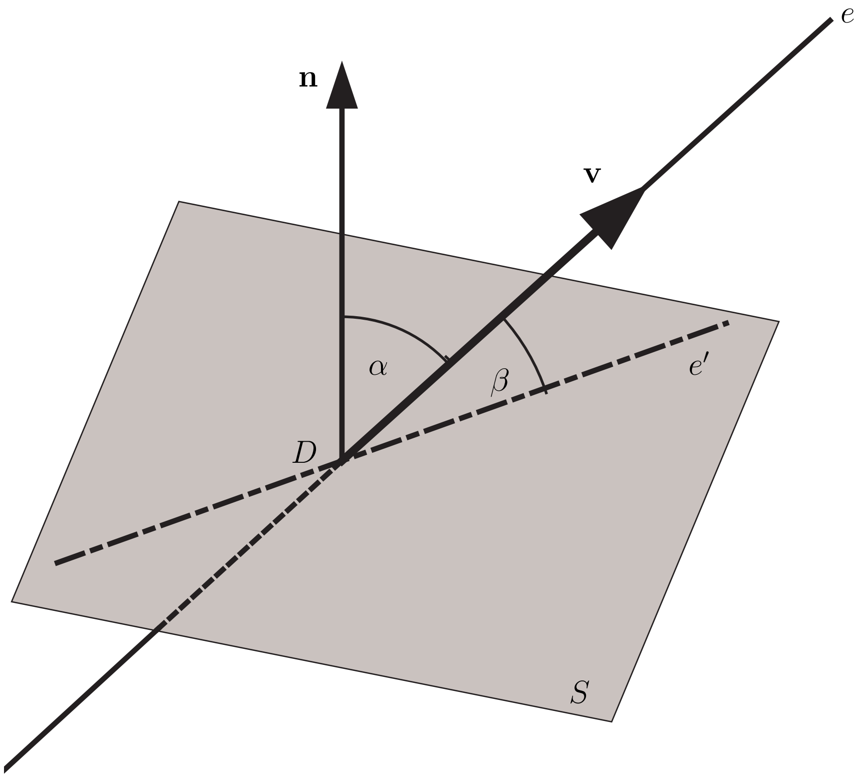
Kitérő egyenesek távolsága



2.19. ábra. A síkok által bezárt szög φ megegyezik az $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$ normálvektorok szögével.

Ha $\mathbf{v}$ az e, és $\mathbf{w}$ az f egyenes irányvektora, akkor $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ a *transzverzális egyenes* irányvektora (l. 2.21. ábra).

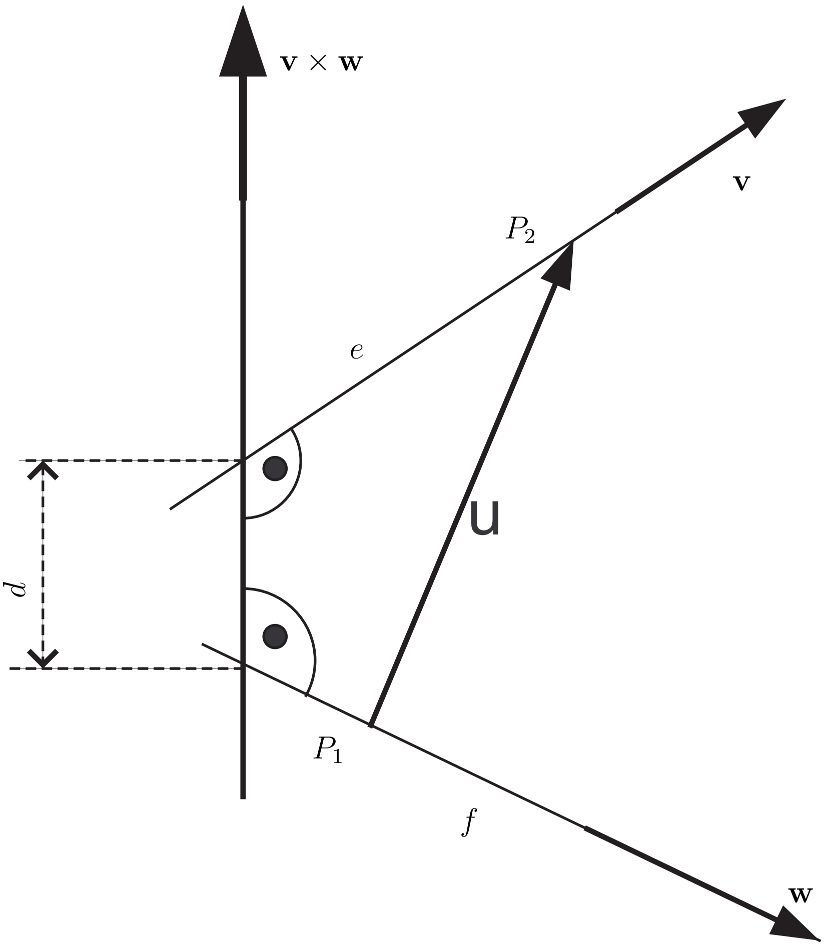
Ekkor az f egyenes egy tetszőleges P_1 pontját, az e egyenes egy tetszőleges P_2 pontjával összekötő $\mathbf{u}$ vektornak a transzverzálisra eső merőleges



2.20. ábra. Az e egyenes és az S síkszöge a $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

vetületének abszolútértéke az e és az f egyenesek közötti távolság. Tehát

$$\text{az } e \text{ és az } f \text{ távolsága: } = \left| \frac{\mathbf{u}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{w})}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|} \right|.$$



2.21. ábra. Az e és f kitérő egyenesek d távolsága az $\mathbf{u}$-nak az $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$-re eső merőleges vetületének a hossza.

36. PÉLDA: Határozzuk meg az $e : \mathbf{r}_e(t) = (t, -t, 1+t)$ és az $f : \mathbf{r}_f(\tau) = (2+\tau, 1+\tau, \tau)$ egyenesek közötti távolságot!

Megoldás: Leellenőrizzük, hogy az e és az f egyenesek metszik-e egymást. Ha metszenék egymást, akkor lenne olyan t_0 és τ_0, amire $\mathbf{r}_e(t_0) = \mathbf{r}_f(\tau_0)$, azaz $\left\{\begin{array}{c} t_0 = 2 + \tau_0 \\ -t_0 = 1 + \tau_0 \\ 1 + t_0 = \tau_0 \end{array}\right.$, ebből $\left.\begin{array}{c} t_0 = 2 + \tau_0 \\ -t_0 = 1 + \tau_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \tau_0 = -\frac{3}{2} \\ t_0 = \frac{1}{2} \end{array}\right.$, de ez nem elégíti ki az $1 + t_0 = \tau_0$ egyenletet, tehát az e és az f egyenesek kitérő egyenesek.

Az e egyenes egy irányvektora: $\mathbf{v} = (1, -1, 1)$.

Az f egyenes egy irányvektora: $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$.

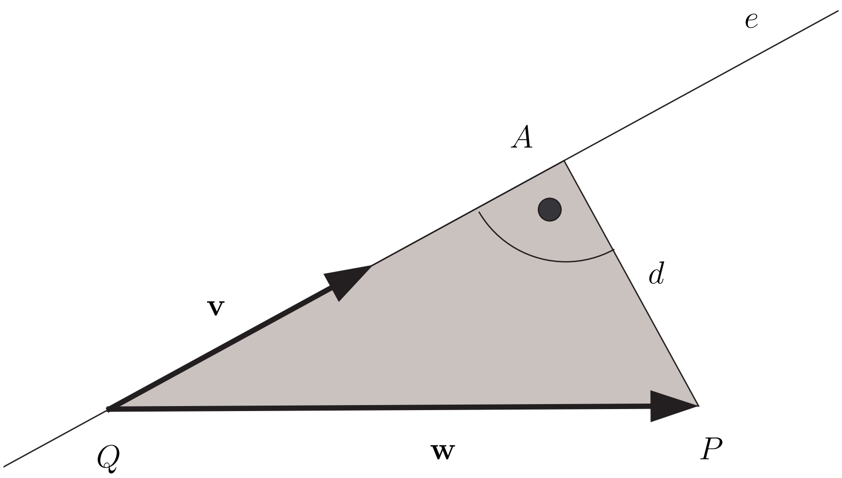
$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 0, 2)$. P_1 egy pont az f egyenesről: $P_1 = (2, 1, 0)$, P_2 egy pont az e egyenesről: $P_2 = (0, 0, 1)$, az $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = (2, 1, -1)$. Az $\mathbf{u}$ vektornak az $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$-vel vett merőleges vetületének a hossza (vagyis az e és az f egyenesek távolsága): $\left|\frac{\mathbf{u}(\mathbf{v}\times\mathbf{w})}{|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|}\right| = \left|\frac{(2,1,-1)(-2,0,2)}{\sqrt{8}}\right| = \left|\frac{-4-2}{\sqrt{8}}\right| = \frac{6}{\sqrt{8}} \approx 2,1213\ldots$

Pontok egyenestől való távolsága

Adott az e egyenes irányvektora, $\mathbf{v}$, és egy az egyenesen kívül fekvő P pont. Milyen messze van a P pont az e egyenestől?

Megoldás: Legyen Q az e egyenes egy tetszőleges pontja, és legyen $\mathbf{w} = \overrightarrow{QP}$. A $\mathbf{w}$ vektornak az e egyenesre eső merőleges vetületének a hossza: $\left|\frac{\mathbf{wv}}{|\mathbf{v}|}\right|$ (l. 2.22. ábra).

Ekkor az ábrán szereplő háromszögből Pitagorasz tételének felhasználásával kapjuk a P pontnak az e egyenestől való távolságát, ami: $d = \sqrt{|\mathbf{w}|^2 - \left|\frac{\mathbf{wv}}{|\mathbf{v}|}\right|^2}$.



2.22. ábra. A P-nek az e egyenestől vett d távolságát az AQP háromszögből számoljuk ki Pitagorasz-tétellel.

3. fejezet

Lineáris algebra

3.1. Az $\mathbf{R}^n$ és alterei

17. DEFINÍCIÓ: $\mathbf{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}\ 1 \le i \le n\}$. Vagyis az $\mathbf{R}^n$ a rendezett valós szám n-esek halmaza.

Ha adott egy koordinátarendszer, akkor a sík pontjai leírhatók a számpárok segítségével. Tehát a sík azonosítható az $\mathbf{R}^2$-nel. Hasonlóan a tér azonosítható az $\mathbf{R}^3$-nal. Az $\mathbf{R}^n$ $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ és $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ vektorai között ugyanúgy mint a síkban vagy a térben értelmezhetjük az *összeadást:* $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$. A *számmal való szorzás*: $5\mathbf{x} = (5x_1, \ldots, 5x_n)$ vagy $-3,5\mathbf{x} = (-3,5x_1, \ldots, -3,5x_n)$. A *skaláris szorzás:* $\mathbf{xy} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{x}$ vektor *merőleges* az $\mathbf{y}$ vektorra, ha $\mathbf{xy} = 0$ (jele: $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$).

18. DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{R}^n$ egy *lineáris alterének* hívjuk az $L \subset \mathbf{R}^n$-et, ha abból hogy $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in L$ következik, hogy az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ vektorok *összes* lehetséges lineáris kombinációja is L-ben van.

37. PÉLDA: A legegyszerűbb lineáris altér az, ami az origóból áll, $L = \{(0, \ldots, 0)\}$ és az, amikor $L = \mathbf{R}^n$ maga a teljes tér. Ezeket *triviális lineáris altereknek* nevezzük.

38. PÉLDA: A sík *nem triviális alterei* az origón átmenő egyenesek.

39. PÉLDA: A tér *nem triviális lineáris alterei* az összes origón átmenő egyenesek és az összes origót tartalmazó síkok.

19. DEFINÍCIÓ: Egy $L \subset \mathbf{R}^n$ lineáris altér egy *bázisa* $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k \in L$, ha a

1. $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$ vektorok lineárisan *függetlenek*.
2. $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$ vektorok összes lehetséges lineáris kombinációi kiadják az L összes vektorát.

40. PÉLDA: Az $\mathbf{R}^2$ egy bázisát adja bármely két *nem* párhuzamos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ vektor.

Az $\mathbf{R}^3$ egy bázisát adja bármely három *nem* egy síkba eső vektor (úgy értve, hogyha közös kezdőpontból mérjük fel őket).

20. TÉTEL: Ha $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$ vektorok az $L \subset \mathbf{R}^n$ altér egy bázisa, akkor az L altérnek bármely másik bázisának ugyancsak k vektora van.

20. DEFINÍCIÓ: Ha az $L \subset \mathbf{R}^n$ altérnek a bázisai k vektorból állnak, akkor azt mondjuk, hogy az L altér *dimenziója* k. Jele: $\dim(L) = k$.

21. TÉTEL: Ha $\dim(L) = k$, akkor bármely lineárisan független k vektor bázist alkot.

Tehát például, ha L az $\mathbb{R}^3$-nak kétdimenziós altere (vagyis L egy olyan sík, amely az origón átmegy), akkor L-nek bázisa minden olyan $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, ahol $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$ tetszőleges $\mathbf{0}$-tól különböző nem párhuzamos vektorok.

3.2. Lineáris egyenletrendszerek

Ebben a fejezetben egyenletrendszeren **mindig** lineáris egyenletrendszert értünk.

41. PÉLDA:
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 4 \\ x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & = & 5 \end{array}$$
ekkor az egyenletrendszer *kiegészített mátrixának* hívjuk a következőt:
$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$
Az egyenletrendszer *mátrixa*:
$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása során az adott egyenletrendszert helyettesíthetjük egy másik egyenletrendszerrel, melynek ugyanazok a megoldásaik, de amelyet könnyebb megoldani. A helyettesítés során lépések egy sorozatát hajtjuk végre. Ezek a lépések a következők lehetnek:

1. Valamely egyenletét a rendszernek megszorozzuk egy nem nulla számmal.
2. Valamelyik két egyenletet felcseréljük.
3. Az egyik egyenlet valahányszorosát egy másik egyenlethez adjuk.

Az egyenletrendszer kiegészített mátrixában a fenti lépések a következő műveleteknek felelnek meg:

1. Egy sort megszorzunk egy nem nulla számmal.
2. Két sort felcserélünk.
3. Az egyik sor számszorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz.

21. DEFINÍCIÓ: A fenti három műveletet *elemi sortranszformációnak* nevezzük.

3.2.1. Gauss-elimináció

A Gauss-eliminációt a lineáris egyenletrendszerek megoldására használjuk. Két lépésből áll:

1. lépés: Az egyenletrendszer kiegészített mátrixát ú.n. *sor-echelon* alakra hozzuk elemi sortranszformációk alkalmazásával.

2. lépés: A sor-echelon alakból megkapjuk az egyenletrendszer megoldását.

22. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy a lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa sor-echelon alakban van, ha:

1. a csupa nullából álló sorok (ha vannak a mátrixban egyáltalán) a mátrix utolsó sorai,
2. ha egy sornak van nem nulla eleme, akkor az első nem nulla elem egyes,

3. két egymás utáni sor mindegyike tartalmaz nem nulla elemet, akkor az első nem nulla elem (ami szükségszerűen egyes) az alsó sorban, jobbra van a felső sor első nem nulla elemétől (ami szintén egyes).

42. PÉLDA: Sor-echelon alakú mátrixok:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A sor-echelon alakra hozás módszerének **első lépése**:
Adott a következő mátrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Kiválasztjuk balról az *első nem csupa nulla* oszlopot.

2. Megcseréljük az első két sort úgy, hogy az előbb kiválasztott oszlop tetején *ne nulla* legyen:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Elosztjuk az első sort *kettővel*, hogy a mátrix bal felső sarkában lévő szám *egy* legyen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Az első sor egy megfelelő konstans szorosát adjuk a többi sorhoz, hogy az első oszlop *minden* eleme *nulla* legyen *kivéve* a bal felső sarokban lévő *egyet.* Ezért az első sor -2-szeresét adjuk a harmadik sorhoz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

5. Most takarjuk le a mátrix első sorát, és a maradékon ismételjük meg a fenti eljárást. A második sort elosztjuk -2-vel, hogy a harmadik oszlop második eleme 1 legyen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

A következő lépésben a második sor -5-szörösét adjuk a harmadik sorhoz, hogy a harmadik oszlop harmadik eleme *nulla* legyen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Ezután a harmadik sornak vesszük a 2-szeresét, hogy az ötödik oszlop utolsó eleme 1 legyen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Az eredmény egy *sor-echelon alak*. Innen az egyenletrendszer megoldása: $x_5 = 2$; $x_3 - \frac{7}{2}2 = -6 \Rightarrow x_3 = 1$; $x_1 + 2x_2 - 5 \cdot 1 + 3x_4 - 6 \cdot 2 = 14$

vagyis: $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & -2x_2 & - & 3x_4 & + & 31 \\ x_3 & = & 1 & & & & \\ x_5 & = & 2 & & & & \end{array}$. Ez azt jelenti, hogy *végtelen sok* megoldás van, amit úgy kapunk, hogy az x_2 és x_4 értékét tetszőlegesen választjuk ezután $x_1 = -2x_2 - 3x_4 + 31$, a $x_3 = 1$, és az $x_5 = 2$.

Tehát az egyenletrendszer egy megoldása:
ha $x_2 = 1$ és $x_4 = 3$, akkor $x_1 = 20$ és $x_3 = 1$, és $x_5 = 2$.

3.2.2. Cramer-szabály

23. DEFINÍCIÓ: Legyen $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Legyen B_i az a mátrix, amit úgy kapunk, hogy az A mátrixból kidobjuk az

első sort, és az i-edik oszlopot: $\begin{bmatrix} a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, ez egy B_i $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix.

Ekkor az A mátrix determinánsát definiálhatjuk a kisebb méretű B_i mátrixok determinánsával , azaz

$$\det(A) = a_{11}\det(B_1) - a_{12}\det(B_2) + a_{13}\det(B_3) - \dots + (-1)^{n+1} a_{1n}\det(B_n).$$

A B_i $(1 \leq i \leq n)$ mátrixok determinánsait a még kisebb méretű mátrixokkal definiálhatjuk a fenti elv szerint. Így végül a méretek minden lépésben való csökkentésével eljutunk a 2×2-es mátrixok determinánsához, amit már definiáltunk a következő módon: $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, akkor $\det(D) = ad - bc$.

22. TÉTEL: (Cramer-szabály): Tegyük fel,hogy az

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

lineáris egyenletrendszer $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ mátrixának determinánsa nem egyenlő nullával.

Legyen $A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_2 & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, a $b_1, b_2, \dots, b_n$ az i-edik oszlopban van. Ekkor az egyenletrendszer megoldása egyértelmű:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}; \ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}; \ \dots; \ x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}.$$

A Cramer-szabály olyan egyenletrendszerekre alkalmazható, ahol az ismeretlenek száma megegyezik az egyenletek számával, és az egyenletrendszer mátrixának determinánsa **nem egyenlő nullával.**

Ezt a tételt akkor érdemes alkalmazni, mikor n *kicsi*, azaz $n = 2, 3$. *Nagyobb* n-ekre a sok $(n+1)$ determináns kiszámítása nagyon sok műveletet igényel. *Nagy* n-ekre a Cramer-szabálynak elméleti jelentősége van, ugyanis a Cramer-szabály garantálja, hogyha $\det(A) \neq 0$, akkor létezik és egyértelmű a megoldás.

43. PÉLDA: Oldjuk meg Cramer-szabállyal az alábbi lineáris egyenletrendszert: $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & & & + & 4x_3 & = & -3 \end{array} \right.$.

$$\textit{Megoldás: } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \ \det(A) = 6 \neq 0,$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \ \det(A_1) = 6; \ A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \ \det(A_2) = 0$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \ \det(A_3) = -12. \text{ Tehát}$$

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 1; \ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = 0; \ x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = -2.$$

<u>A Cramer-szabály egy fontos következménye:</u>

Tekintsük a következő ún. homogén lineáris egyenletrendszert:

$$\left\{ \begin{array}{lccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{array} \right. .$$

Ennek az egyenletrendszernek legalább egy megoldása **mindig** van. Nevezetesen az $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. A Cramer-szabály szerint ha az egyenletrendszer $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ determinánsa nem nulla, akkor a megoldás egyértelmű. Tehát, ha $\det(A) \neq 0$, akkor az

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{array}$$

egyenletrendszernek **csak a triviális**

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 \text{ a megoldása.}$$

A fentiek egy alkalmazása:

Adottak az $\left.\begin{array}{c} \mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}), \\ \mathbf{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathbf{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn}) \end{array}\right\}$ vektorok.

Hogyan dönthetjük el, hogy az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorrendszer lineárisan független-e?

Megoldás: Definíció szerint az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan független ha abból, hogy

$$x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

következik, hogy $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Felírva az $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ kifejezést koordinátákkal kapjuk:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{array}\right\}$$

már láttuk, hogy ennek a lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van a triviális $x_1 = \cdots = x_n = 0$ megoldástól különböző megoldása, ha $\det(A) = 0$.

Tehát, ha $\det(A) = 0 \Rightarrow$ az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ rendszer *lineárisan függő.*

Ha $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ rendszer *lineárisan független.*

Probléma: Adottak a következő vektorok:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}; \ \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \ \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ és}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Előállítható-e a $\mathbf{b}$ vektor az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ vektorok lineáris kombinációjaként?

Megoldás: A $\mathbf{b}$ vektor akkor áll elő az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha $\exists\ x_1, \ldots, x_4$, úgy hogy:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{b}.$$

Ezt koordinátákkal felírva adódik:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 0x_1 & + & 1x_2 & + & 0x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ 1x_1 & + & 1x_2 & + & 2x_3 & + & 0x_4 & = & 4 \\ 0x_1 & + & 6x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 1x_3 & + & 1x_4 & = & 2 \end{array}\right\},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \det(A) = -1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$0 + 2 \cdot 18 \neq 0$. Tehát a Cramer-szabály szerint létezik egyetlen megoldása a

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 0x_1 & + & 1x_2 & + & 0x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ 1x_1 & + & 1x_2 & + & 2x_3 & + & 0x_4 & = & 4 \\ 0x_1 & + & 6x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 1x_3 & + & 1x_4 & = & 2 \end{array} \quad \text{lineáris egyenletrendszernek.}$$

Tehát a $\mathbf{b}$ vektor előáll az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_4$ vektorok lineáris kombinációjaként.

24. DEFINÍCIÓ: Legyen $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbf{R}^n$. Az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektorok által kifeszített L (jele: $L(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$) altér azon $\mathbf{b}$ vektorokból áll, amelyek előállnak az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ lineáris kombinációiként.

2. LEMMA: $L(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ egy lineáris altere az $\mathbf{R}^n$-nek.

Bizonyítás Ha $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in L(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$, akkor $\exists \beta_1, \ldots, \beta_k$ és $\exists \gamma_1, \ldots, \gamma_k$, hogy $\beta_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \beta_k \mathbf{a}_k = \mathbf{b}$, és $\gamma_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \gamma_k \mathbf{a}_k = \mathbf{c}$, de akkor a $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok egy tetszőleges lineáris kombinációjára adódik, hogy $\delta\mathbf{b} + \eta\mathbf{c} = (\delta\beta_1 + \eta\gamma_1)\mathbf{a}_1 + \cdots + (\delta\beta_k + \eta\gamma_k)\mathbf{a}_k \in L(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$. Tehát $L(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ valóban egy lineáris altere $\mathbf{R}^n$-nek.

25. DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ rendszer *rangja* definíció szerint az $L(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ altér dimenziója.

3.3. Mátrixok

3.3.1. Mátrix rangja

Legyen A egy $s \times n$-es mátrix, (s sor és n oszlop):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

Az A mátrix n darab oszlop vektora:

$$\begin{array}{c} \mathbf{c}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{s1}) \\ \mathbf{c}_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{s2}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{c}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{sn}) \end{array}$$

és az A mátrix s darab sor vektora:

$$\begin{array}{c} \mathbf{b}_1 = (a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{1n}) \\ \mathbf{b}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{b}_s = (a_{1s}, a_{2s}, \ldots, a_{sn}) \end{array}.$$

23. TÉTEL: Bármi legyen is az A mátrix, a sorvektorok $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s$ rendszerének rangja ugyanaz az r szám, mint az oszlopvektorok $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$ rendszerének rangja. Vagyis $r = \dim L(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n) = \dim L(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s)$.

Ezt az r számot az A mátrix *rangjának* hívjuk.

Mátrix rangjának meghatározása.

1. A mátrix rangja megegyezik a mátrix sorvektoraiból álló rendszer rangjával.
2. Az elemi sortranszformációk bármelyikének végrehajtása után kapott új sorvektorok rendszerének rangja ugyanaz, mint az eredeti sorvektorok rendszerének rangja.
3. Emlékezzünk, hogy a sor-echelon alakot az eredeti mátrixból elemi sortranszformációk sorozatának eredményeként kaptuk!
4. A *sor-echelon alakban lévő* mátrix rangja a nem azonosan nulla sorok száma.

Konklúzió: Az A mátrix rangját úgy határozzuk meg, hogy elemi sortranszformációk segítségével az A mátrixot sor-echelon alakra hozzuk. Ezután a sor-echelon alakban a nem azonosan nulla sorok száma adja az A mátrix rangját.

44. PÉLDA: Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 12 & 11 \end{bmatrix}$ mátrix rangját!

Megoldás: Az A mátrixot sor-echelon alakra transzformáljuk elemi sortranszformációkkal a következő lépésekkel:

- Az első sort elosztjuk kettővel.
- Levonjuk az első sort a második, illetve a háromszorosát a harmadik sorból.
- A harmadik sorból a második sort kivonjuk.

Vagyis:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 12 & 11 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A megkapott sor-echelon alakban *kettő* nem azonosan nulla sor van, így az A mátrix rangja *kettő*.

24. TÉTEL: Az

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1}x_1 & + & a_{s2}x_2 & + & \cdots & + & a_{sn}x_n & = & b_s \end{array}\right\}$$

lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha az egyenletrendszer $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$ mátrixának és $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{bmatrix}$ kiegészített mátrixának rangja megegyezik.

Bizonyítás. Tekintsük az egyenletrendszer kiegészített mátrixát, és redukáljuk sor-echelon alakra elemi sortranszformációkkal. Ekkor ha a kapott sor-echelon alak legutolsó, nem csupa nulla sorában az első nem nulla elem (ami csak 1 lehet) az utolsó oszlopban van, akkor nincs megoldás, de ez csak akkor fordul elő, ha a kiegészített mátrix rangja nagyobb mint az egyenletrendszer mátrixának rangja. Például

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

3.3.2. Műveletek mátrixokkal

<u>**Mátrix szorzása számmal:**</u>

Egy A mátrixot úgy szorzunk meg egy $c \in \mathbf{R}$ számmal, hogy az A minden elemét megszorozzuk c-vel. Így kapjuk a cA mátrixot.

Példa: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, $c = 2$, akkor $2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 10 & 12 & 14 \end{bmatrix}$.

<u>**Mátrixok összeadása:**</u>

Csak azonos méretű A és B mátrixot lehet összeadni, úgy, hogy a megfelelő elemeket összeadjuk.

Példa: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, akkor $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}$; $A - B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$.

Mátrixok szorzása:

$$\underbrace{A = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}} \text{ és } B = \underset{3\times 4}{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}}}_{\text{a szorzat } 2\times 4\text{-es mátrix lesz}}$$

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}} \cdot \overset{B}{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}} = \overset{A\cdot B}{\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 26 & \cdots \end{bmatrix}},$$ a $(2,6,0)$ és a $(4,3,5)$ vektorok skaláris szorzata lesz 26, azaz $2\cdot 4 + 6\cdot 3 + 0\cdot 5 = 26$.

Az első sor negyedik elemét az $A\cdot B$ mátrixban úgy kapjuk, hogy vesszük az $(1,2,4)$ és a $(3,1,2)$ vektorok skaláris szorzatát: $1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 4\cdot 2 = 13$, azaz $$\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}} \cdot \overset{B}{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}} = \overset{A\cdot B}{\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & 13 \\ \cdots & \cdots & 26 & \cdots \end{bmatrix}}.$$

Ezt folytatva kapjuk, hogy $A\cdot B = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$.

Általában két mátrix csak akkor szorozható össze, ha a baloldali mátrix oszlopainak száma egyenlő a jobboldali mátrix sorainak számával. Tehát ha

$$\boxed{\begin{array}{cccc} A & B & \Rightarrow & A\cdot B \\ m\times r & r\times n & & m\times n \end{array}}.$$

Ha az A és a B mátrix összeszorozható $A\cdot B$ sorrendben az még **nem** jelenti azt, hogy fordított sorrendben is összeszorozhatók, hiszen lehetséges, hogy $n \neq m$.

Abban a speciális esetben, mikor mind az $A\cdot B$, mind a $B\cdot A$ értelmes (pl. mindkét mátrix 2×2-es), még mindig lehetséges, hogy $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Példa: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, akkor

$$\left.\begin{array}{l} A\cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ B\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow A\cdot B \neq B\cdot A.$$

Mátrix transzponáltja:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ és } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Könnyen ellenőrizhető a szorzat traszponáltjára vonatkozó összefüggés:

$$\boxed{(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T}$$

Mátrix inverze

25. TÉTEL: Legyen A és B $n \times n$-es (négyzetes) mátrix. Ekkor

$$|A \cdot B| = |A|\,|B|\,.$$

Tehát, ha akár az A, akár a B mátrix determinánsa nulla, akkor a szorzatmátrix determinánsa is nulla lesz.

26. DEFINÍCIÓ: Legyen A egy $n \times n$-es (négyzetes) mátrix. Tegyük fel, hogy $\det(A) \neq 0$. Ekkor azt az A^{-1} mátrixot, melyre $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$ teljesül, az A mátrix *inverz mátrixának* nevezzük, ahol

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ az ún. } \textit{egységmátrix.}$$

Ezt a mátrixot azért nevezzük egységmátrixnak mert ha A egy $n \times n$-es mátrix, akkor

$$AI = IA = A.$$

3. LEMMA: Semelyik A mátrixnak sem lehet egynél több inverze.

Bizonyítás. Ha B is és C is az A inverze, akkor

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

Tehát $B = C$. ■

Mátrix inverzének meghatározása. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Legyen továbbá M_{ij} az az $(m-1)$-ed rendű determináns, mely az A-ból az i-edik sor és a j-edik oszlop törlésével jön létre. Az a_{ij} elem *adjungáltja:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Az A mátrix adjungáltjának hívjuk az

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Figyelem: Az A^*-ban az i-edik sor j-edik eleme az a_{ji} adjungáltja és *NEM* az a_{ij} adjungáltja.

Az A mátrix inverze:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^* = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\det(A)} & \frac{A_{21}}{\det(A)} & \dots & \frac{A_{n1}}{\det(A)} \\ \frac{A_{12}}{\det(A)} & \frac{A_{22}}{\det(A)} & \dots & \frac{A_{2n}}{\det(A)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\det(A)} & \frac{A_{2n}}{\det(A)} & \dots & \frac{A_{nn}}{\det(A)} \end{bmatrix}.$$

45. PÉLDA: $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. Meg fogjuk határozni az A^{-1}-et. Némi számolással adódik, hogy $\det(A) = 5$, és $A_{11} = 5$; $A_{12} = 10$; $A_{13} = 0$; $A_{21} = 4$; $A_{22} = 12$; $A_{23} = 1$; A_{31}; $A_{32} = -3$; $A_{33} = 1$. Tehát az inverz mátrix:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Egy fontos speciális eset. Ha az A egy 2×2-es mátrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, akkor $A_{11} = d$; $A_{12} = -c$; $A_{21} = -b$; $A_{22} = a$. Tehát:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

46. PÉLDA: Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét!

Megoldás: $\Delta = -2$. $A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

26. TÉTEL: Legyenek A, B $(n \times n)$-es mátrixok, és tegyük fel, hogy $\det(A) \neq 0$, és $\det(B) \neq 0$. Ekkor

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Bizonyítás. $(B^{-1} \cdot A^{-1})(A \cdot B) = B^{-1} \cdot \overbrace{(A^{-1} \cdot A)}^{I} \cdot B = B^{-1} \cdot B = I$. Továbbá $(A \cdot B)(B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$. ■

A fenti bizonyításban felhasználtuk, hogy a mátrix szorzás átzárójelezhető (asszociatív), azaz $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

3.4. Áttérés egyik bázisról a másikra

Az $\mathbf{R}^n$ természetes bázisának hívjuk a $T = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ bázist, ahol

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \ldots \; \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{v}$ vektor természetes bázisban vett koordinátáit vagy $[\mathbf{v}]_T$-vel jelöljük vagy egyszerűen csak $\mathbf{v}$-t írunk.

Ha $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ egy tetszőleges bázisa az $\mathbf{R}^n$-nek, akkor $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ vektor egyértelműen felírható

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{u}_n$$

alakban. Ekkor azt mondjuk a B bázisban a $\mathbf{v}$ vektor koordinátái: $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$.

Jelben:

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

47. PÉLDA: Ha $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \end{bmatrix}$, akkor

$$\mathbf{v} = \mathbf{2u}_1 - 3\mathbf{u}_2$$

tehát $[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, ahol a $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ bázis.

27. TÉTEL: Ha $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ egy tetszőleges bázisa az $\mathbf{R}^n$-nek, akkor $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ vektorra:

$$[\mathbf{v}]_T = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] \cdot [\mathbf{v}]_B\,,$$

ahol $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ egy mátrix, melynek első oszlopa $\mathbf{u}_1$, második oszlopa $\mathbf{u}_2$, ... ,n-edik oszlopa $\mathbf{u}_n$. Ezt a jelölést később is használjuk.

Bizonyítás. Ha $[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, akkor $[\mathbf{v}]_T = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{u}_n =$ $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] \cdot [\mathbf{v}]_B$. ■

1. KÖVETKEZMÉNY: Egy $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ vektor koordinátáit a $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ bázisban a következő formula adja:

$$[\mathbf{v}]_B = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]^{-1} \cdot [\mathbf{v}]_T\,. \tag{3.1}$$

2. KÖVETKEZMÉNY: Ha $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ és $B' = \{\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_n\}$ bázisai az $\mathbf{R}^n$-nek és $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$, akkor

$$[\mathbf{v}]_{B'} = [\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_n]^{-1} \cdot [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] \cdot [\mathbf{v}]_B \tag{3.2}$$

27. DEFINÍCIÓ: A $[\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_n']^{-1} \cdot [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ mátrixot a B bázisról a B' bázisra való áttérés mátrixának hívjuk.

48. PÉLDA: Határozzuk meg a $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektor koordinátáit a $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ bázisban!

Megoldás: Legyen $P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. A 1. Következmény miatt $[\mathbf{v}]_B = P^{-1}\mathbf{v}$. Mivel $\det(P) = 10$, ezért $P^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Tehát

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ -0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.8 \\ -0.4 \end{bmatrix}.$$

49. PÉLDA: Adottak a következő bázisok:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \qquad B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \tag{3.3}$$

ha $\mathbf{w}$ vektor koordinátái a B-ben $[\mathbf{w}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ kérdés mik a $\mathbf{w}$ koordinátái a B'-ben?

Megoldás: Alkalmazhatjuk a (3.2) formulát:

$$[\mathbf{w}]_{B'} = [\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2']^{-1} \cdot [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \cdot [\mathbf{w}]_B. \tag{3.4}$$

Ehhez: Legyen $P := [\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2'] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Ekkor $\det(P) = 2$, tehát $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. Tehát $[\mathbf{w}]_{B'} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{35}{2} \\ -\frac{99}{2} \end{bmatrix}$.

3.5. Lineáris transzformációk

28. DEFINÍCIÓ: Az $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^s$ leképezést lineáris transzformációnak hívjuk, ha

a. $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$;

b. $\mathrm{F}(c\mathbf{u}) = cF(\mathbf{u})$; $\forall c \in \mathbf{R}$ és $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$.

50. PÉLDA: A sík és az egyenes lineáris transzformációi:

1. Számegyenes lineáris transzformációi az $F(x) = cx$ alakú függvények.
2. A sík lineáris transzformációi például az origó körüli forgatások, origón átmenő egyenesre tükrözések, vagy $F(x_1, x_2) = (2x_1, 3x_2)$. Erre ugyanis $F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = F(x_1+y_1, x_2+y_2) = (2(x_1+y_1), 3(x_2+y_2)) = (2x_1+2y_1, 3x_2+3y_2) = (2x_1, 3x_2) + (2y_1 + 3y_2) = F(\mathbf{x}) + F(\mathbf{y})$ és $F(c\mathbf{x}) = F(cx_1, cx_2) = (c2x_1, c3x_2) = c(2x_1, 3x_2) = cF(\mathbf{x})$.

Legyen $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ egy tetszőleges bázisa az $\mathbf{R}^n$-nek. Legyen

$$\mathbf{b}_1 = F(\mathbf{a}_1), \ldots, \mathbf{b}_n = F(\mathbf{a}_n).$$

Egy tetszőleges $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ vektor előállítható az $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ vektorok lineáris kombinációjaként egyértelműen:

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n.$$

Ekkor alkalmazzuk az F lineáris transzformációt a $\mathbf{v}$ vektorra. Mivel az F egy lineáris transzformáció, így az F lineáris kombinációt lineáris kombinációba visz azonos együtthatókkal. Vagyis:

$$F(\mathbf{v}) = \alpha_1 F(\mathbf{a}_1) + \cdots + \alpha_n F(\mathbf{a}_n) = \alpha_1\mathbf{b}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{b}_n.$$

Tehát a lineáris transzformációt teljesen meghatározza egy tetszőleges bázis vektorain felvett értékei.

Legyen $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$ $(s \times n)$-es mátrix. (B első oszlopa: $\mathbf{b}_1, \ldots,$ B utolsó oszlopa: $\mathbf{b}_n$.)

Ekkor $F(\mathbf{v}) = \alpha_1 F(\mathbf{a}_1) + \cdots + \alpha_n F(\mathbf{a}_n) = \alpha_1\mathbf{b}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{b}_n$ kifejezésből adódik, hogy

$$F(\mathbf{v}) = B\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \text{ ahol } \mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n.$$

Tehát azt kaptuk, hogy az F lineáris transzformációit *az* $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ *bázisban* előállíthatjuk a B mátrixszal való balról szorzás segítségével. Ezért azt mondjuk, hogy az F lineáris transzformáció mátrixa az $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ bázisban a B mátrix.

1. MEGJEGYZÉS: 1. Az F lineáris transzformációt más-más bázisban más-más mátrix állítja elő.

2. Az $\mathbf{R}^n$ ún. természetes bázisa az $\left\{ \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}_{\mathbf{e}_1}, \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}_{\mathbf{e}_2}, \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}_{\mathbf{e}_3}, \ldots \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix}}_{\mathbf{e}_n} \right\}$ bázis. Ha csak annyit mondunk, hogy az F lineáris transzformáció mátrixa B, de *nem specifikáljuk, hogy melyik bázisban*, az úgy értendő, hogy a fenti $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *természetes bázisban.*

51. PÉLDA: Határozzuk meg az origó körüli (pozitív irányú) 30°-os szöggel való forgatás mátrixát, majd ennek segítségével számítsuk ki a $\mathbf{v} = [1, 5]$ vektor 30°-os szöggel való elforgatásával kapott $\mathbf{w}$ vektort!

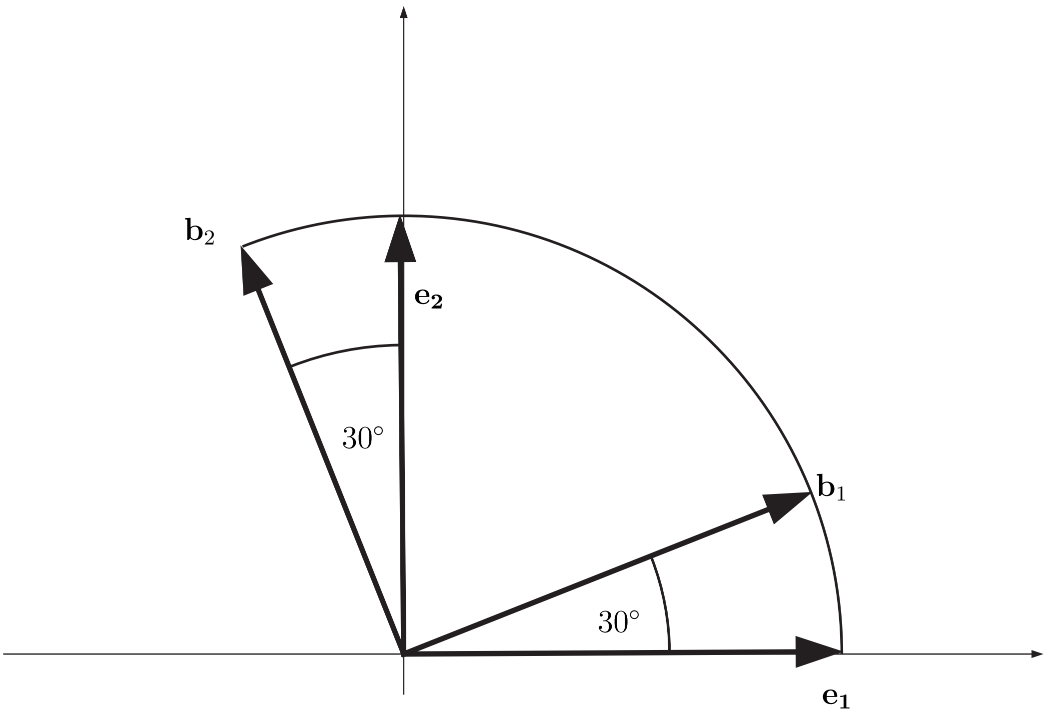
Megoldás: Mivel *nem* specifikáltuk, hogy melyik bázisról van szó, ezért az $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ természetes bázisban dolgozunk. Itt először meghatározzuk $\mathbf{b}_1 = F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ és $\mathbf{b}_2 = F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ értékeket, majd ezekből képezzük a $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$ mátrixot (l. 3.1. ábra).

$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ és $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$. Tehát $B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$. Ennek segítségével megkaphatjuk annak a $\mathbf{w}$ vektornak a koordinátáit, amit a $\mathbf{v} = (1, 5)$ vektor origó körüli (pozitív irányú) 30^0-os forgatásával kapunk:

$$\mathbf{w} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

52. PÉLDA: Legyen $T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$. Találjuk meg a T mátrixát:

a.) a természetes bázisban;



3.1. ábra. Origó körüli 30° forgatás.

b.) az $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ bázisban.

Megoldás:

a.) $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, így a T mátrixa a természetes bázisban: $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

b.) $T\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_1}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $T\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_2}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$, ahol $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ a koordináták a természetes bázisban.

$T(\mathbf{u}_1) = 2\mathbf{u}_1$; $T(\mathbf{u}_2) = 3\mathbf{u}_3$ és $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.
$[T(\mathbf{u}_1)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$; $[T(\mathbf{u}_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, így $[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

3.6. Sajátértékek, sajátvektorok

29. DEFINÍCIÓ: Adott egy A $n \times n$-es mátrix. Egy $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektort az A mátrix *sajátvektorának* nevezzük, ha az $A\mathbf{x}$ vektor az $\mathbf{x}$ vektornak valamilyen λ-szorosa. Azaz $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Ekkor a λ egy *sajátértéke* az A mátrixnak.

Vegyük észre, hogy

a. ha $\mathbf{x}$ egy sajátvektora az A mátrixnak, akkor $2\mathbf{x}$,$3\mathbf{x}$ és általában $c\mathbf{x}$, ahol $c \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$ is egy sajátvektora az A-nak,

b. abban az esetben is, ha az A összes eleme valós, mind a sajátértékek, mind a sajátvektorok komponensei lehetnek *komplex számok.*

53. PÉLDA: 1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, ekkor, ha $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ és $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, akkor $A\mathbf{u}_1 = \lambda_1\mathbf{u}_1$ és $A\mathbf{u}_2 = \lambda_2\mathbf{u}_2$. Vagyis $\mathbf{u}_1$ a λ_1-hez, $\mathbf{u}_2$ a λ_2-höz tartozó sajátvektorok.

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Legyen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ és $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ekkor látható, hogy $A\mathbf{u}_1 = \lambda_1\mathbf{u}_1$ és $A\mathbf{u}_2 = \lambda_2\mathbf{u}_2$, vagyis $\mathbf{u}_1$ egy a λ_1 sajátértékhez tartozó sajátvektor, és $\mathbf{u}_2$ egy olyan sajátvektor, ami a λ_2-höz tartozik.

Kérdés: Hogyan határozhatjuk meg egy A $n \times n$-es mátrix sajátértékeit és a sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat?

Válasz: Abból indulunk ki, hogy $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Használva az

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

egységmátrixot kapjuk : $\lambda\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$, vagyis $A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$, innen

$$(A - \lambda I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

A kapott homogén lineáris egyenletrendszernek az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$-tól különböző megoldása (mint ezt a Cramer-szabály egy következményeként láttuk) *pont* akkor van, ha

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Tehát az A mátrix sajátértékei a $\det(A - \lambda I) = 0$ egyenlet λ-ra történő megoldásai. A sajátvektorokat ezután az $(A - \lambda I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletből határozzuk meg.

54. PÉLDA: $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg a sajátvektorokat és a sajátértékeket!

Megoldás: A $\det(A - \lambda I) = 0$ egyenletet felhasználva, $0 = \det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 5 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(-3-\lambda) + 5 = \lambda^2 - 9 + 5 = \lambda^2 - 4$. Tehát $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = -2$.

Felhasználva az $(A - \lambda I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletet a λ_1 és a λ_2 értékekhez tartozó $\mathbf{u}_1$ és $\mathbf{u}_2$ sajátvektorok meghatározására.

$\underline{\lambda_1 = 2 \text{ esetén:}}$

$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 5 & -3-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$. Így $(A - \lambda I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ megoldása $x_1 = x_2$. Tehát egy, a λ_1-hez tartozó sajátvektor

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\underline{\lambda_2 = -2 \text{ esetén:}}$

$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 5 & -3-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$. Tehát $(A - \lambda I)\,\mathbf{x} = 0$ az $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ennek megoldása: $5x_1 = x_2$. Tehát egy, a $\lambda_2 = -2$-höz tartozó sajátvektor: $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

3.6.1. Az eddigiek alkalmazása

55. PÉLDA: Adott az $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ mátrix és a $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ vektor. Meg szeretnénk tudni hogyan viselkedik az

$$\mathbf{y}^n = A^n \mathbf{w}$$

vektor *nagy* n-nek esetén!

Megoldás: Állítsuk elő a $\mathbf{w}$ vektort a $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ bázisban. A természetes bázisból a B-be való átmenet mátrixa: $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

Tehát $[\mathbf{w}]_B = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix}$. Vagyis

$$\mathbf{w} = \frac{3}{4}\mathbf{u}_1 + \frac{5}{4}\mathbf{u}_2.$$

Innen $\mathbf{y}^n = A^n\mathbf{w} = \frac{3}{4}\underbrace{A^n\mathbf{u}_1}_{\lambda_1^n \mathbf{u}_1} + \frac{5}{4}\underbrace{A^n\mathbf{u}_2}_{\lambda_2^n \mathbf{u}_2} = \frac{3}{4}2^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{5}{4}(-2)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$. $\mathbf{y}^n = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3\,(2)^n & + & (-1)^n\, 2^n 5 \\ 3\,(2)^n & + & (-1)^n\, 2^n 25 \end{bmatrix} = \frac{2^n}{4}\begin{bmatrix} 3 & + & (-1)^n\, 5 \\ 3 & + & (-1)^n\, 25 \end{bmatrix}$ vagyis

$$\mathbf{y}^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 2^{n+1} \\ 7\,(2)^n \end{bmatrix}, & \text{ha } n \text{ páros} \\ \begin{bmatrix} -2^{n-1} \\ -11\,(2)^{n-1} \end{bmatrix}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

$\underline{n \text{ páros:}}$

$\frac{\mathbf{y}_2^n}{\mathbf{y}_1^n} = \frac{14}{4}$

$\mathbf{y}^n$ exponenciális sebességgel megy a végtelenbe, az $y = \frac{7}{2}x$ egyenes I. síknegyedbeli részén.

$\underline{n \text{ páratlan:}}$

Ekkor $\mathbf{y}^n$ exponenciális sebességgel megy az $y = 11x$ egyenes III. síknegyedbeli részén a végtelenbe.

1. FELADAT: Egy autókölcsönző társaságnak három telephelye van: P, Q, R. Egy bizonyos időben a P helyen p, a Q helyen q, és az R helyen r autó van. A tapasztalat szerint a P helyen tárolt autók 60%-át vagy nem kölcsönzik ki egy hét alatt, vagy vissza is viszik P-be. A 10%-át Q-ba, a 30%-át R-be viszik vissza.

A táblázat szemlélteti az autók helyét

	P-be visszahozott autók	Q-ba visszahozott autók	R-be visszahozott autók
P helyen lévő autók	60%	10%	30%
Q helyen lévő autók	10%	80%	10%
R helyen lévő autók	10%	20%	70%

Legyen $p = q = r = 200$. Hány autó lesz az egyes telephelyeken n hét múlva?

Megoldás: Legyen az egyes telephelyeken lévő autók száma k hét múlva $p(k); q(k); r(k)$. (Tehát $p(0) = q(0) = r(0) = 200$.) Ha $\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} p(k) \\ q(k) \\ r(k) \end{bmatrix}$ és $A = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,7 \end{bmatrix}$, akkor

$$\mathbf{x}(k+1) = A \cdot \mathbf{x}(k) \text{ és } \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \end{bmatrix}.$$

Könnyen látható, hogy az A mátrix sajátértékei és a megfelelő sajátvektorai:

$$\underbrace{\lambda_1 = 1; \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}}; \underbrace{\lambda_2 = 0,6; \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}; \underbrace{\lambda_3 = 0,5; \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ vektorok lineárisan függetlenek, így az $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \end{bmatrix}$ vektor kifejezhető az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként. $\mathbf{x}(0) = 30\mathbf{u}_1 - 15\mathbf{u}_2 - 80\mathbf{u}_3$.

$\mathbf{x}(k) = A^k x(0) = 30A^k\mathbf{u}_1 - 15A^k\mathbf{u}_2 - 80A^k\mathbf{u}_3 = 30\lambda_1^k\mathbf{u}_1 - 15\lambda_2^k\mathbf{u}_2 - 80\lambda_3^k\mathbf{u}_3 = 30\mathbf{u}_1 - 15\underbrace{(0,6)^k}_{\to 0}\mathbf{u}_2 - 80\underbrace{(0,5)^k}_{\to 0}\mathbf{u}_3$

Vagyis $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}(k) = 30\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 120 \\ 270 \\ 210 \end{bmatrix}$. Így nagyon sok hét múlva a P-ben 120, a Q-ban 270 és az R-ben 210 autó lesz. 10 hét múlva $(k = 10)$: $x_{10} = \begin{bmatrix} 120.078 \\ 270.171 \\ 210.751 \end{bmatrix}$, ami a végső állapot.

2. FELADAT: Tegyük fel, hogy egy farmon eladás céljából állatokat tartanak. A gazda tudni szeretné, hogyha minden évben az egy évesnél idősebb állatainak h-ad részét adja el, akkor ez hogyan befolyásolja az állatállomány létszámát n év múlva. Tegyük fel, hogy az állatok közül az egy évnél fiatalabbak (ezeket fiataloknak fogjuk hívni) nem reprodukálódnak, és nem is adják el őket. De $d_1 = 0,1$ részük elpusztul évente. Az egy évnél idősebb állatok $b = 0,9$ arányban reprodukálódnak évente, és $d_2 = 0,2$ részük pusztul el. Az idős állatokat milyen h arányban kell eladni ahhoz, hogy az állomány ne pusztuljon ki, és a lehető legnagyobb legyen a nyereség?

Megoldás: Ha $x_1(k)$ a fiatal állatok száma k év múlva, és $x_2(k)$ az öreg állatok száma k év múlva, akkor a fenti információkból a következő írható:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0,9x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) + x_2(k) - d_1x_1(k) - d_2x_2(k) - hx_2(k) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x_1(k+1) = 0,9x_2(k) \\ x_2(k+1) = 0,9x_1(k) + (0,8-h)\,x_2(k) \end{cases}, \text{ vagyis ha}$$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0,9 \\ 0,9 & 0,8-h \end{bmatrix}$, akkor $\mathbf{x}(k) = A\mathbf{x}(k-1)$, ahol $\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$.

Tehát $\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0$.

Ha az A mindkét sajátértéke kisebb mint **egy**, az állatállomány kihal.

Ha valamelyik sajátérték nagyobb abszolút értékben 1-nél, akkor az állatállomány száma exponenciálisan nő. A gazda legnagyobb haszna abból adódik, ha a nagyobbik sajátérték egyenlő 1.

$$0 = \det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 0,9 \\ 0,9 & 0,8-h-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (0,8-h)\lambda - 0,81.$$

Ha $\lambda_1 = 1$, akkor $0 = 1-(0,8-h)1-0,81 \Rightarrow h = 0,61$, amiből $\lambda_2 = -0,81$. Vagyis az optimális eladási arány 61%. Mi történik ekkor? $\lambda_1 = 1; \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \end{bmatrix}$ és $\lambda_2 = -0,81; \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ -9 \end{bmatrix}$.

Vagyis bármi is az $\mathbf{x}_0$ kiindulási állapot, találhatunk olyan α_1, α_2 számokat, melyekre

$$\mathbf{x}_0 = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2.$$

Ekkor
$\mathbf{x}(k) = A^k\mathbf{x}(0) = \alpha_1\underbrace{A^k\mathbf{u}_1}_{\mathbf{u}_1} + \alpha_2\underbrace{A^k\mathbf{u}_2}_{\lambda_2^k\mathbf{u}_2} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\underbrace{\lambda_2^k\mathbf{u}_2}_{\to 0}$. Ez azt jelenti, hogy sok idő múlva 9 fiatal állat jut 10 öregre.

3.7. Hasonló mátrixok

30. DEFINÍCIÓ: Legyenek A és B $n\times n$-es mátrixok. Azt mondjuk, hogy az A és B mátrixok *hasonlóak*, ha $\exists$ egy $n \times n$-es **nem szinguláris mátrix** S (ez azt jelenti, hogy $\det(S) \neq 0$), hogy $B = S^{-1}AS$ egyenlőség teljesül.

28. TÉTEL: Ha az A és B mátrixok hasonlóak, akkor ugyanaz a karakterisztikus polinomjuk. Speciálisan, az A és a B sajátértékei is azonosak.

Bizonyítás. A $B = S^{-1}AS$ mátrix karakterisztikus polinomja:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det\left(S^{-1}AS - \lambda I\right) = \det\left(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S\right) \\ &= \det\left(S^{-1}(A-\lambda I)S\right) = \det\left(S^{-1}\right)\det(A-\lambda I)\det(S) \\ &= \det(A-\lambda I) = \text{ az } A \text{ mátrix karakterisztikus polinomja.} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Fordítva azonban nem igaz. Ugyanis, ha pl. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$, akkor a karakterisztikus polinomja mindkét mátrixnak: $p(\lambda) = (1-\lambda)^2$, de az A és a B nem hasonlóak. Ugyanis, ha A és B hasonló lenne, akkor létezne egy nemszinguláris S mátrix, amire $B = S^{-1}AS$ egyenlőség teljesülne. Ekkor viszont $SB = S = AS$, vagyis $I = SS^{-1} = A$, ami nem teljesül.

Habár hasonló mátrixok sajátértékei megegyeznek a sajátvektorok általában nem ugyanazok.

A továbbiakban gyakran használjuk a diagonális mátrix fogalmát:

31. DEFINÍCIÓ: Egy mátrixot diagonalisnak nevezünk, ha a főátlóján (a bal felső sarokból induló átlóján) kívül mindenhol máshol csak 0-k lehetnek. Pl.

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ vagy } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

A főátlóban is lehet 0, a lényeg, hogy a főátlón kívül mindenütt csak 0 van.

32. DEFINÍCIÓ: Amikor egy A mátrix hasonló egy diagonális mátrixhoz, azt mondjuk, hogy az A *diagonizálható.*

29. TÉTEL: Egy $n \times n$-es A mátrix diagonizálható, akkor és csak akkor, ha A-nak van n lineárisan független sajátvektora, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$. Ekkor, ha $S = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ az $S^{-1}AS$ mátrix diagonális.

■

56. PÉLDA: Legyen $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$. Ekkor $\lambda_1 = 2$; $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\lambda_2 = -1$; $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. $S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Ezeket felhasználva $AS = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ és $S^{-1}(AS) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = D$. Ennek segítségével könnyen kiszámolható az A^{10} :

$$D^{10} = S^{-1}A^{10}S, \text{ innen } A^{10} = SD^{10}S^{-1}.$$

Használva, hogy: $D^{10} = \begin{bmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, kapjuk:

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2047 & -2046 \\ 1023 & -1022 \end{bmatrix}.$$

30. TÉTEL: Ha az A egy $n \times n$-es mátrix n különböző sajátértékekkel, akkor az A diagonizálható.

Bizonyítás. A bizonyítás azon alapul, hogy be kell látni, hogyha az A mátrix sajátértékei különbözőek, akkor a sajátvektorok rendszere független, és így az előző tétel alkalmazása adja ennek a tételnek az állítását. ■

Az állítás megfordítása nem igaz!

3.8. Ortogonális mátrixok

33. DEFINÍCIÓ: Egy **valós** $n \times n$-es Q mátrixot *ortogonálisnak* hívunk, ha

$$Q^{-1} = Q^T.$$

Vagyis, ha

$$Q^T Q = QQ^T = I.$$

Legyen $Q = [\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \ldots \mathbf{q}_n]$, ekkor $Q^T = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \mathbf{q}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n^T \end{bmatrix}$. A $Q^T Q$ mátrix (i,j)-edik helyén i

$$\begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{q}_i^T & \cdots \end{bmatrix} \begin{array}{c} j \\ \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{q}_j \\ \vdots \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \qquad\qquad j \\ \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots\cdots\cdots & \bullet \left(\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j\right) & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} \end{array} i.$$

Az (i,j)-edik helyen a $Q^T Q = I$ értéke $\begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$.

Tehát $\mathbf{q}_i \perp \mathbf{q}_j$, ha $i \neq j$ és $|\mathbf{q}_i| = 1$. Az ilyen tulajdonságú $\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ vektorrendszert *ortonormált rendszernek* nevezzük.

34. DEFINÍCIÓ: Egy $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$ vektor rendszer *ortonormált*, ha

- $\mathbf{q}_i \perp \mathbf{q}_j$ minden $i \neq j$-re és
- $|\mathbf{q}_i| = 1$ minden i-re.

Vagyis azt kaptuk, hogy egy mátrix ortogonális akkor és csakis akkor, ha az oszlopvektorok rendszere ortonormált. Ez viszont azt jelenti, ha egy mátrix ortogonális, és felcseréljük az oszlpovektorok sorrendjét, akkor az így kapott új mátrix is ortogonális lesz.

57. PÉLDA: Az $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix ortogonális, mivel $I^{-1} = I$ és $I^T = I$, így $I^{-1} = I^T$. Az előbbi megjegyzés miatt $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixok is ortogonálisak.

Miért szeretjük az ortogonális mátrixokat?

Azért szeretjük az ortogonális mátrixokat, mert a velük való szorzás *megőrzi* a *hosszat* és a *térfogatot.* Vagyis:

31. TÉTEL: Legyen Q egy $n \times n$-es ortogonális mátrix, és $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ tetszőleges vektorok.

(a) $|Q\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ megőrzi a hosszat,

(b) $(Q\mathbf{x})^T (Q\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$ megőrzi a szöget (hiszen megőrzi a skalárszorzatot is),

(c) $|\det(Q)| = 1$ megőrzi a térfogatot.

Bizonyítás. Csak az (a) részét bizonyítjuk a tételnek.

$|Q\mathbf{x}| = \sqrt{(Q\mathbf{x})^T (Q\mathbf{x})} = \sqrt{\mathbf{x}^T \underbrace{Q^T Q}_{I} \mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = |\mathbf{x}|$. ■

3.9. Szimmetrikus mátrixok diagonalizálása

Egy $n \times n$-es A mátrixot *szimmetrikusnak* nevezünk, ha az A szimmetrikus a főátlójára, azaz $a_{ij} = a_{ji}$, $\left(A^T = A\right)$.

A szimmetrikus mátrixok egy nagyon fontos tulajdonsága, hogy:

32. TÉTEL: Egy szimmetrikus mátrix minden sajátértéke valós

Ennek felhasználásával be lehet bizonyítani, hogy:

33. TÉTEL: Legyen az A egy $n \times n$-es szimmetrikus mátrix. Ekkor létezik olyan Q ortogonális mátrix, amelyre $Q^T AQ = D$, ahol D egy diagonális mátrix.

Bizonyítás. Ha az A egy $n \times n$-es valós szimmetrikus mátrix, akkor az A minden sajátértéke valós, de nem feltétlenül különböző. Az egynél nagyobb multiplicitású gyökökhöz tartozó sajátvektorok terében ki szeretnénk valasztani egy ortogonális bázist erre szolgál az ún. "ortogonalizációs eljárás" ■

Ortogonalizációs eljárás:

Legyen $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ az $\mathbf{R}^n$ tér lineárisan független vektorrendszere (nyilván $k \leq n$). Mint mindig, $L(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ jelöli a kifeszített alteret, vagyis az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektorokból képezhető összes lineáris kombinációk halmazát.

58. PÉLDA: Határozzuk meg az $L(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ egy ortonormált bázisát (azaz k db vektort az $L(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$-ban, melyek hossza 1 és páronként merőlegesek)!

Megoldás: Ha $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ lineárisan független, akkor először egy ortogonális $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$ bázisát adjuk meg az $L(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$-nak, majd a kívánt ortonormált rendszert a $\frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|}, \ldots, \frac{\mathbf{b}_k}{|\mathbf{b}_k|}$ adja.

Legyen $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$. Határozzuk meg azt az α_1-et, amire

$$\mathbf{b}_2 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2$$

teljesíti a $\mathbf{b}_2 \perp \mathbf{b}_1$ feltételt. Vagyis:

$$0 = \mathbf{b}_2\mathbf{b}_1 = \alpha_1 \mathbf{b}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1.$$

Innen

$$\alpha_1 = -\frac{\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1}.$$

Ekkor tehát $\mathbf{b}_2 \in L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ és $\mathbf{b}_2 \perp \mathbf{b}_1$.

Határozzuk meg azt a β_1, β_2 értéket, amire a

$$\mathbf{b}_3 = \beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3$$

vektorra teljesül, hogy $\mathbf{b}_3 \perp \mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_3 \perp \mathbf{b}_2$. Vagyis:

$$0 = \mathbf{b}_3\mathbf{b}_1 = \beta_1 \mathbf{b}_1\mathbf{b}_1 + \beta_2 \underbrace{\mathbf{b}_2\mathbf{b}_1}_{0} + \mathbf{a}_3\mathbf{b}_1 \Rightarrow \beta_1 = -\frac{\mathbf{a}_3\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1}.$$

Továbbá

$$0 = \mathbf{b}_3\mathbf{b}_2 = \beta_1 \underbrace{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2}_{0} + \beta_2 \mathbf{b}_2\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3\mathbf{b}_2 \Rightarrow \beta_2 = -\frac{\mathbf{a}_3\mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2\mathbf{b}_2}.$$

Ekkor tehát $\mathbf{b}_3 \in L(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ és $\mathbf{b}_3 \perp \mathbf{b}_1$; $\mathbf{b}_3 \perp \mathbf{b}_2$. Az eljárás ugyanígy folytatjuk, amíg $\mathbf{b}_k$-t is meghatározzuk.

59. PÉLDA: $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg az $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$-nak egy ortonormált bázisát!

Megoldás: $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_2 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2$, ahol $\alpha_1 = -\frac{\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1} = -\frac{1}{2}$, így $\mathbf{b}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\mathbf{b}_3 = \beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3$, ahol $\beta_1 = -\frac{\mathbf{a}_3\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1} = -\frac{1}{2}$, $\beta_2 = -\frac{\mathbf{a}_3\mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2\mathbf{b}_2} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$, így $\mathbf{b}_3 = \underbrace{\beta_1}_{-\frac{1}{2}} \mathbf{b}_1 + \underbrace{\beta_2}_{-\frac{1}{3}} \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{bmatrix}$. Tehát a $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ ortogonális bázisa az $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$-nak. Azért, hogy ortonormált bázist kapjunk a hosszakkal le kell osztani:

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \ \mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_2|} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{bmatrix}; \ \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Tehát az $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ egy ortonormált bázisa:

$$\left\{ \mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \ \mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_2|} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \right\}.$$

34. TÉTEL: A egy $n \times n$-es valós szimmetrikus mátrix. Ekkor az A különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai merőlegesek egymásra.

Ha az A-nak minden sajátértéke különböző, akkor a sajátvektorait egység hosszúnak választva, azonnal kapunk egy sajátvektorokból álló ortonormált rendszert.

Ha az A valamely sajátértékének multiplicitása nagyobb mint 1, akkor az ilyen sajátértékekhez tartozó sajátvektorokra alkalmazni kell az ortogonalizációs eljárást, hogy megkapjuk a sajátvektorok egy ortonormált rendszerét.

Tehát egy $n \times n$-es szimmetrikus mátrixnak mindig van $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ sajátvektorokból álló ortonormált rendszere!

60. PÉLDA: Határozzuk meg az $\mathbf{R}^4$ térnek az $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix sajátvektorából álló ortonormált bázisát!

Megoldás: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^3 (\lambda + 1)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ és $\lambda_4 = -2$. Könnyen találhatunk négy sajátvektort.

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{w}_i$ a λ_i-nek felel meg és $i = 1, 2, 3, 4$.

Ezután az $L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ altér egy ortonormált bázisát az ortogonalizálási eljárással meghatározzuk, és a $\mathbf{w}_4$-et normáljuk.

$\mathbf{c}_4 = \frac{\mathbf{w}_4}{|\mathbf{w}_4|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Az "Ortogonalizálási eljárás" című fejezet példájának eredményét felhasználva:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix}; \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ez egy ortonormált bázisa R^4-nek, mely az A sajátvektoraiból áll.

Legyen A egy $n \times n$-es szimmetrikus mátrix. Legyen $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ az A mátrix sajátvektoraiból álló ortonormált rendszer. Ekkor

(i) a diagonalizálás fejezetben leírtak alapján a $Q = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ mátrixra $Q^{-1}AQ = D$. D diagonális mátrix, melynek főátlójában az A mátrix sajátértékei vannak,

(ii) mivel $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ egy ortonormált rendszer, így Q egy ortogonális mátrix. $Q^{-1} = Q^T$. Tehát $Q^T AQ = D$, ami egy diagonális mátrix.

3.10. Kvadratikus alak

35. DEFINÍCIÓ: Egy olyan összeget, melynek minden tagja az $x_1, \ldots, x_n$ ismeretlenek valamelyikének négyzete szorozva egy számmal, vagy valamely két ismeretlen szorzata szorozva egy számmal *kvadratikus alaknak* nevezünk.

Például: $2x_1x_2 + 32x_1x_3 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$.

36. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy egy kvadratikus alak *kanonikus alakban* adott, ha csak négyzetes tagok vannak benne.

Például: $3x_1^2 - 2x_2^2 + 10x_3^2$.
Kvadratikus alak mátrixa Általában

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \mathbf{x}^T A\mathbf{x},$$

ahol $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ és $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Mindig feltesszük, hogy $a_{ij} = a_{ji}$, vagyis, hogy az A mátrix *szimmetrikus*. Vagyis pl. a $2x_1x_2 + 32x_1x_3 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ kvadratikus alak a következő formába írható át:

$$x_1x_2 + x_2x_1 + 16x_1x_3 + 16x_3x_1 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 16 \\ 1 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Célunk, hogy találjunk egy olyan ortonormált bázist, amelyre áttérve a kvadratikus alak átmegy kanonikus alakba!

Vegyük észre, hogy a kvadratikus alak akkor és csak akkor van kanonikus alakban, ha a mátrixa diagonális.

Tudjuk, hogy egy tetszőleges A szimmetrikus mátrixhoz van olyan Q ortogonális mátrix, amelyre a $Q^TAQ = D$ diagonális mátrix. Sőt, azt is tudjuk, hogy Q-t választhatjuk úgy, hogy Q oszlopai az A mátrix sajátvektoraiból álló ortonormált rendszer legyen.

Eljárás:

Legyen $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, ahol $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ az A mátrix sajátvektoraiból álló ortonormált rendszer. Legyen T a természetes bázis. Ekkor a B-ből a T-be való átmenet mátrixa $Q = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$. Tehát a T-ből a B-be való átmenet mátrixa Q^{-1}. Vagyis az $\mathbf{x}$ vektort a B bázisban a $Q^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ vektor adja meg. Így $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$, innen $\mathbf{x}^T = \mathbf{y}^T Q^T$.

Láttuk, hogy a kvadratikus alak $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T \underbrace{Q^TAQ}_{D \text{ diagonális}} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y}$.

Tehát ha az $x_1, \ldots, x_n$ változók helyett bevezetjük az $y_1, \ldots, y_n$ változókat, ahol $\mathbf{y} = Q^T\mathbf{x}$ (hiszen $Q^{-1} = Q^T$), akkor az $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ kvadratikus alak az $\mathbf{y}^T D\mathbf{y}$ kanonikus alakba megy át.

61. PÉLDA: Legyen $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$. Ekkor $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. A karakterisztikus polinom: $p(\lambda) = -(\lambda^3 - 3\lambda - 2) = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$. A $\lambda_{1,2} = -1$-hez a sajátvektorok: $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Mivel az $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ nem ortogonális, ezért az ortogonalizációs eljárást alkalmazva kapjuk: $\mathbf{v}^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{v}^2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ ortogonális bázisát az $L(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2)$-nek. Ezeket normalizáljuk: $\mathbf{w}^1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w}^2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}$. Tehát $\{\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2\}$ egy ortonormált bázisa az $L(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2)$-nek.

$\lambda_3 = 2$-höz tartozó 1 hosszúságú sajátvektor: $\mathbf{w}^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$.

Tehát a $\{\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \mathbf{w}^3\}$ egy ortonormált rendszere az A sajátvektorainak.

Így a $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ egy ortogonális mátrix.

Bevezetjük az $\mathbf{y} = Q^T\mathbf{x}$-el definiált új változókat. Ekkor

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}x_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}x_3 \\ \frac{x_1}{\sqrt{3}} + \frac{x_2}{\sqrt{3}} + \frac{x_3}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Továbbá $Q^TAQ = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Tehát $2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = -y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2$.

Vegyük észre, hogy amikor az A szimmetrikus mátrixot diagonális alakra hozó Q ortogonális mátrixot megkonstruáltuk csak azt kötöttük ki, hogy a Q oszlopai az A mátrix egység hosszúságú páronként egymásra merőleges sajátvektorai legyenek, de ezen vektorok sorrendjéről semmit nem követeltünk meg. Minthogy minden ortogonális mátrix determinánsa vagy 1 vagy -1, ezért ha szükséges az oszlopok cseréjével mindig elérhetjük, hogy az A szimmetrikus mátrixot diagonális alakra hozó Q ortogonális mátrix determinánsa 1 legyen. Könnyen látható, hogy ha Q egy 2×2-es ortogonális mátrix és $\det(Q) = 1$, akkor Q a síknak valamely α szögű origó körüli forgatásának a mátrixa. Ezért

35. TÉTEL: Minden A 2×2-es szimmetrikus mátrix diagonális alakra hozható olyan Q ortogonális mátrix segítségével, ami a síknak valamely α szögű origó körüli forgatásának a mátrixa.

3.10.1. Kvadratikus egyenletek, kúpszeletek

Az x, y változókban másodfokú (kvadratratikus) egyenletnek nevezzük az

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{3.6}$$

egyenleteket.

62. PÉLDA: A $3x^2+5xy-7y^2+2x+9=0$, akkor a (3.6)-beli konstansok:

$$a=3; b=\frac{5}{2}; c=-7; d=2; e=0; f=9.$$

Ebben a fejezetben az a célunk, hogy egy adott típusú kvadratikus egyenlethez megtaláljunk az xy koordináta rendszernek egy olyan $\hat{x}\hat{y}$ transzformáltját, melyre áttérve az (3.6) egyenlet a következő alakok valamelyikére redukálódik:

$$\frac{\hat{x}^2}{a^2}+\frac{\hat{y}^2}{b^2} = 1; \quad \frac{\hat{x}^2}{a^2}-\frac{\hat{y}^2}{b^2}=1; \quad \frac{\hat{y}^2}{b^2}-\frac{\hat{x}^2}{a^2}=1; \tag{3.7}$$

$$\hat{y}^2 = kx; \quad \hat{x}^2=k\hat{y} \tag{3.8}$$

Vagyis az új koordináta tengelyekkel párhuzamos állású ellipszis, hiperbola, vagy parabola lesz.
Célunkat két lépésben érjük el:

1. lépés A szimmetrikus mátrix diagonalizálása ortogonális mátrix segítségével módszer alkalmazásával megszabadulunk a (3.6)-beli $x \cdot y$-os tagtól.

2.lépés Az előbb bevezetett új koordinátákkal xy-os tagot nem tartalmazó kvadratikus egyenletben teljes négyzetté alakítunk.

A fenti módszert egy példán keresztül mutatjuk be:

63. PÉLDA: Határozzuk meg azt a kúpszeletet, amelyet a következő másodfokú egyenlet ír le:

$$5x^2-4xy+8y^2+\frac{20}{\sqrt{5}}x-\frac{80}{\sqrt{5}}y+4=0 \tag{3.9}$$

Megoldás: A (3.9) egyenlet mátrixosan írva:

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x}+\mathbf{K}\mathbf{x}+4=0, \tag{3.10}$$

ahol

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad A=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}; \quad K=\begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

1. Lépés Meghatározzuk azt a forgatást, amely az A szimmetrikus mátrixot diagonalizálja. Az A mátrix sajátértékei és a hozzájuk tartozó egységhosszú sajátvektorok:

$$\lambda_1 = 9 : \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad ; \quad \lambda = 4 \quad : \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Ezekből a sajátvektorokból akkor kapunk forgatást, ha olyan sorrendben írjuk fel őket a Q oszlopaiként, hogy $\det(Q) = 1$ teljesüljön, azaz:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Legyen $\mathbf{y} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}$. Jelöljük az $\mathbf{y}$ koordinátáit $\hat{x}, \hat{y}$-vel. Azaz

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}.$$

Ekkor $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ és így (3.10)-ből

$$(Q\mathbf{y})^T A (Q\mathbf{y}) + K (Q\mathbf{y}) + 4 = 0.$$

Innen

$$\mathbf{y}^T \left(Q^T A Q\right) \mathbf{y} + KQ)\mathbf{y} + \mathbf{4} = \mathbf{0}. \tag{3.12}$$

Felhasználva, (3.11)-ot és azt, hogy

$$KQ = \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -36 \end{bmatrix}$$

(3.12)-ból kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + 4 = 0.$$

Vagyis:

$$4\hat{x}^2 + 9\hat{y}^2 - 8\hat{x} - 36\hat{y} + 4 = 0. \tag{3.13}$$

Ezzel az első lépésben kitűzött célt elértük, hiszen az $\hat{x}, \hat{y}$ új koordináta rendszerben (ami az eredeti xy koordinátarendszer elforgattotja, hiszen Q és így Q^{-1} forgatás) az egyenlet már nem tartalmaz $\hat{x} \cdot \hat{y}$ alakú tagot.

2. Lépés: Teljes négyzetté alakítással:

$$4\hat{x}^2 - 8\hat{x} = 4(\hat{x}-1)^2 - 4 \qquad \text{és} \qquad 9\hat{y}^2 - 36\hat{y} = 9(\hat{y}-2)^2 - 36.$$

Ezután (3.13)-ból :

$$4(\hat{x}-1)^2 + 9(\hat{y}-2)^2 = 36. \tag{3.14}$$

Bevezetjük az

$$x' = \hat{x} - 1 \quad ; \quad y' = \hat{y} - 2$$

új változókat. Ezeket behelyettesítve és 36-al (3.14) mindkét oldalát elosztva:

$$\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{4} = 1.$$

4. fejezet

Többváltozós függvények analízise

4.1. Többváltozós függvények differenciálása

4.1.1. Az $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvény differenciálhatósága

37. DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{R}^n$-tér $\mathbf{x}$ középpontú *r sugarú* $(r > 0)$ *gömbje* $B(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r\}$.

38. DEFINÍCIÓ: Az $A \subset \mathbf{R}^n$ halmazt *nyíltnak* nevezzük, ha $\forall \mathbf{x} \in A$-ra $\exists r > 0$, hogy $B(\mathbf{x}, r) \subset A$.

Például: $n = 2$ esetén $A = \{(x, y) \,|2 < x, y < 3\}$ vagy $B = \{(x, y) \,|2 < x < 3$ és $1 < y < 4\}$ nyíltak, **de** $C = \{(x, y) \,|2 \leq x < 3$ és $1 < y < 4\}$ már **nem** nyílt!

39. DEFINÍCIÓ: Tegyük fel, hogy $A \subset \mathbf{R}^n$ nyílt, és $f : A \to \mathbf{R}$ függvény. Legyen $1 \leq i \leq n$. Az $f(x_1, \ldots, x_n)$ függvénynek az x_i szerinti parciális deriváltját úgy kapjuk, hogy az f függvény i-edik változóját tekintjük csak változónak, a többi változót konstansnak vesszük és az i-edik változó szerint deriválunk. *Jele:* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ vagy f'_{x_i}.

64. PÉLDA: Legyen
$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^3.$$
Ekkor
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 9y^2.$$

Vagy

$$g(x, y, z) = \sin x + \cos y + z^3.$$

Ekkor

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = \cos x; \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = -\sin y; \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 3z^3.$$

Vagy

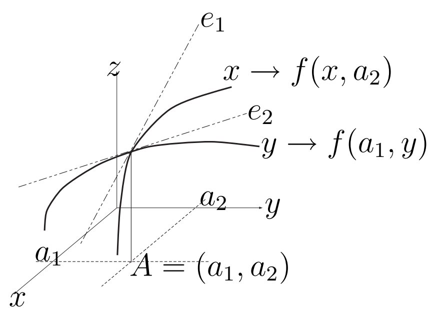
$$h(x, y) = \sin x \cos y + xy.$$

Ekkor

$$h'_x = \cos x \cos y + y; \quad h'_y = -\sin x \sin y + x.$$

4.1.2. A parciális derivált geometriai jelentése

Az $f(x, y)$ függvényt megszorítjuk az $x = a_1$ egyenesre, és így kapjuk a függvénygrafikont (l. 4.1. ábra).



4.1. ábra. Az e_1 érintő meredeksége az $f'_x(A)$ és az e_2 érintő meredeksége az $f'_y(A)$

A görbe érintőjének a meredeksége az $A = (a_1, a_2)$ pont felett egyenlő $\frac{\partial f}{\partial y}|_A$ vagy $f'_y(A)$.

Hasonlóan az $f(x, y)$ függvényt megszorítjuk az $y = a_2$ egyenesre, s így adódik a másik függvénygrafikon. Ezen görbe érintőjének meredeksége az A pont felett egyenlő $\frac{\partial f}{\partial x}|_A$ vagy $f'_x(A)$.

Alapvető feltétel: Ebben a fejezetben mindig feltesszük, hogy az összes általunk tekintett függvény minden parciális deriváltja az értelmezési tartomány minden pontjában létezik, és kétszer folytonosan differenciálható.

40. DEFINÍCIÓ: Az $\left(f'_{x_1}(A), f'_{x_2}(A), \ldots, f'_{x_n}(A)\right)$ *vektort* az $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvény A ponthoz tartozó *gradiensének* nevezzük. Jele: $grad(f)(A)$.

65. PÉLDA: Legyen $f(x, y, z) = x \cos y + xz + z \sin y$, ekkor $grad(f)(x, y, z) = (\cos y + z, -x \sin y + z \cos y, x + \sin y)$; $gradf(0, 0, 0) = (1, 0, 0)$. Legyen $h(x, y) = x^y + xy^2$, ekkor $grad(h)(x, y) = (yx^{y-1} + y^2; x^y \ln x + 2xy)$.

4.1.3. Iránymenti derivált

41. DEFINÍCIÓ: Adott egy $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvény, egy $A = (a_1, \ldots, a_n)$ pont és egy egységnyi hosszú $\mathbf{e}$ vektora az $\mathbf{R}^n$-nek. Legyen E az $\mathbf{e}$ irányvektorú A pontból induló félegyenes.

$$\lim_{X \in E, X \to A} \frac{f(\mathbf{X}) - f(A)}{\left|\overrightarrow{AX}\right|}$$

határértéket, az f függvény $\mathbf{e}$ irányhoz és A ponthoz tartozó iránymenti differenciálhányadosának nevezzük. Jele: $f'_{\mathbf{e}}(A)$; $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}|_A$.

66. PÉLDA: Ha $\mathbb{R}^2$-ben vagyunk és az f megszorítását az A-ból kiinduló $\mathbf{e}$ irányvektorú egyenesre a 4.2. ábra mutatja, akkor az $\mathbf{e}$ irányban vett iránymenti derivált az ábrán látható függvény meredeksége A-ban.

Vigyázat! A fenti esetben a $-\mathbf{e}$ irányba vett derivált a 4.2. ábrán látható függvény A-ban vett meredekségének -1-szerese.

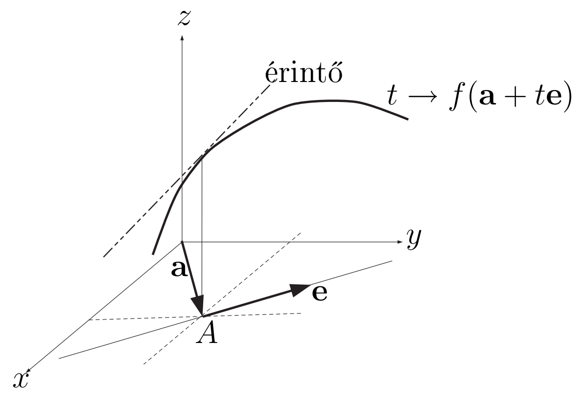
Az f függvényt megszorítjuk az A pontból kiinduló $\mathbf{e}$ irányú félegyenesre. Így kapjuk az ábrán szemléltetett görbét. Ennek az A pont feletti érintőjének a meredeksége a $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}|_A$ iránymenti derivált.

36. TÉTEL: $f'_{\mathbf{e}}(A) = gradf(A) \cdot \mathbf{e}$.

Bizonyítás. $\overrightarrow{AX} = t\mathbf{e}$, ahol $t > 0$. A helyvektora $\mathbf{a}$.

$$\lim_{X \to A} \frac{f(X) - f(A)}{\left|\overrightarrow{AX}\right|} = \lim_{t \to 0+} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{a})}{t} \underbrace{=}_{\text{összetett függvény deriválás}} gradf(A)\,\mathbf{e}.$$

■



4.2. ábra. Az érintő meredksége az $f(x,y)$ függvénynek az A ponthoz és $\mathbf{e}$ irányhoz tartozó iránymenti deriváltja.

A legnagyobb növekedés iránya. Úgy képzeljük el, hogy egy $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvény egy (x_0,y_0) pontban megadja egy bizonyos (a 4.3. ábrán jelölt) domborzat tengerszint feletti magasságát.

Kérdés: Az $A=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ ponttól melyik irányba indulva lesz az utunk a kiindulási pontban a legmeredekebb?

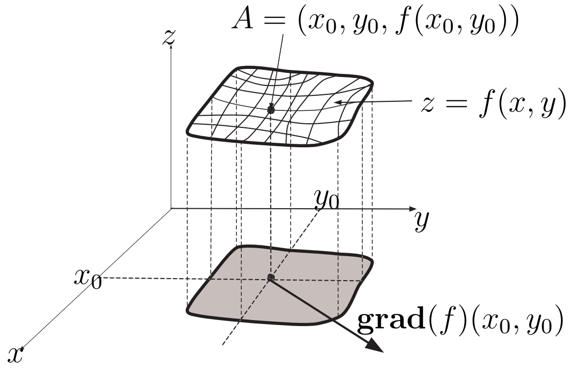
Válasz: Akkor lesz a legmeredekebb, amikor annak az x,y síkbeli $\mathbf{e}$ egységvektor irányának megfelelően indulunk, amelyre $f'_{\mathbf{e}}(x_0,y_0)$ maximális! Tudjuk,hogy $f'_{\mathbf{e}}(x_0,y_0)=\mathit{grad}f\,(x_0,y_0)\,\mathbf{e}=|\mathit{grad}f\,(x_0,y_0)|\cos\gamma\,|\mathbf{e}|$, ahol γ a $\mathit{grad}f\,(x_0,y_0)$ és az $\mathbf{e}$. Vagyis $f'_{\mathbf{e}}(x_0,y_0)$ akkor maximális, amikor $\cos\gamma=1$, vagyis $\gamma=0$, vagyis $\mathbf{e}$ a $\mathit{grad}f\,(x_0,y_0)$ irányával egyező irányú egységvektor (l. 4.4.ábra).

Tehát a legnagyobb növekedés iránya az (x_0,y_0) pont felett a $\mathit{grad}f\,(x_0,y_0)$-nak megfelelő irány. Hasonlóan a legnagyobb csökkenés iránya a $-\mathit{grad}f\,(x_0,y_0)$-nak megfelelő irány.

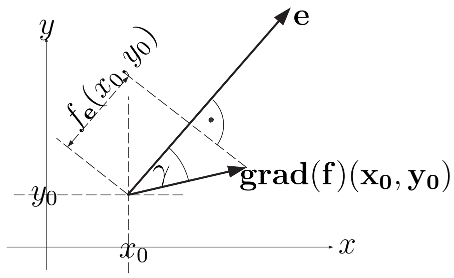
4.1.4. $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^s$ függvények deriválása

Ebben a fejezetben olyan függvények deriválásával foglalkozunk, melyek mind az értelmezési tartománya, mind az értékkészlete egynél magasabb dimenziós térben van.

67. PÉLDA: $f(x,y)=\left(\underbrace{xy}_{f_1(x,y)},\underbrace{x+y}_{f_2(x,y)},\underbrace{x^2+y^2}_{f_3(x,y)}\right)$. Ez az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$-ba ké-



4.3. ábra. A legnagyobb növekedés iránya a gradiens iránya



4.4. ábra. Az **e** irányhoz tartozó iránymenti derivált egyenlő a gradiensnek az **e** egységvektorra vett merőleges vetületének az előjeles hosszával.

pező függvény, hiszen két változó van (x, y) és három komponens függvény.

Általánosan egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ képező f függvény:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\underbrace{f_1(x_1, \dots, x_n)}_{\text{1.komponens függvény}}, \underbrace{f_2(x_1, \dots, x_n)}_{\text{2.komponens függvény}}, \dots, \underbrace{f_s(x_1, \dots, x_n)}_{\text{s.komponens függvény}} \right)$$

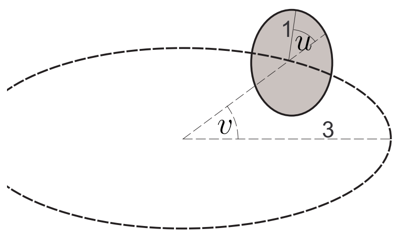
Egy $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^s$ függvény deriváltja:

$$f'\left(\overbrace{a_1, \dots a_n}^{\mathbf{a}}\right) = \begin{bmatrix} (f_1)'_{x_1}(\mathbf{a}) & (f_1)'_{x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & (f_1)'_{x_n}(\mathbf{a}) \\ (f_2)'_{x_1}(\mathbf{a}) & (f_2)'_{x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & (f_2)'_{x_n}(\mathbf{a}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (f_s)'_{x_1}(\mathbf{a}) & (f_s)'_{x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & (f_s)'_{x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

A mátrixot **Jacobi-mátrixnak** is nevezzük.

68. PÉLDA: Ha $f(x,y) = (xy, x+y, x^2+y^2)$, akkor
$$f'(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} y_0 & x_0 \\ 1 & 1 \\ 2x_0 & 2y_0 \end{bmatrix}.$$

69. PÉLDA: (a)
$$\mathbf{r}(u,v) = ((3+\cos u)\cos v, (3+\cos u)\sin v, \sin u) \quad \left.\begin{array}{c} 0 \le v \le 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} D$$



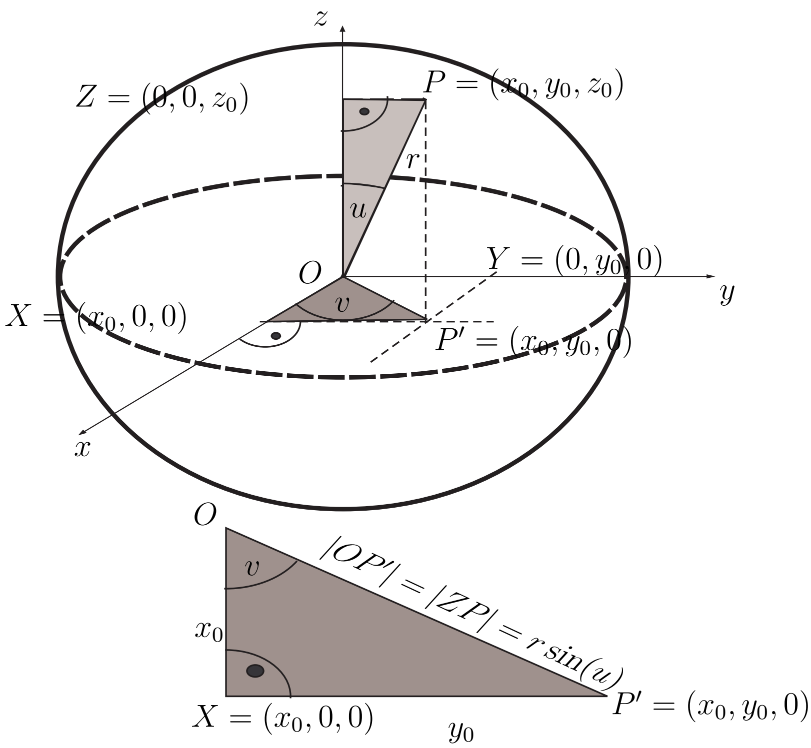
4.5. ábra. A tórusz egy paraméterezése.

Tehát az $\mathbf{r}(u,v)$ függvény a D tartományt a körgyűrű felületére képezi.

(b) $\Phi(u,y) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$. Ekkor $\left.\begin{array}{c} -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le v \le 2\pi \end{array}\right\} D$. A Φ a D-t az egységgömb felületére képezi.

A fenti $\mathbf{r}(u,v)$ *Jacobi mátrixa:*
$$\mathbf{r}'(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -\sin u \cos v & -(3+\cos u)\sin v \\ -\sin u \sin v & (3+\cos u)\cos v \\ \cos u & 0 \end{bmatrix}$$

A fenti $\Phi(u,v)$ *Jacobi mátrixa:*
$$\Phi'(u,v) = \begin{bmatrix} -\sin u \cos v & -\cos u \sin v \\ -\sin u \sin v & \cos u \cos v \\ \cos u & 0 \end{bmatrix}$$



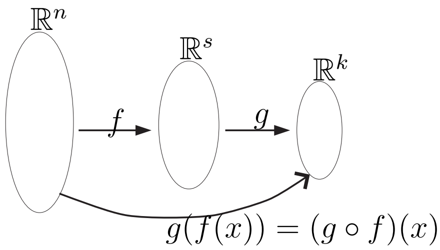
4.6. ábra. Az $OPZ_{\triangle}$-ből $z_0 = r\cos(u)$, továbbá $|0P'| = |PZ| = r\sin(u)$. Ezért az $OP'X_{\triangle}$-ből: $x = r\sin(u)\cos(v)$ és $y = r\sin(u)\sin(v)$

70. PÉLDA: $f(t) = \mathbf{a}+t\mathbf{e}$, ahol $\mathbf{a}, \mathbf{e} \in \mathbf{R}^2$. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ és $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$. Ennek *Jacobi mátrixa:* $f'(t) = \mathbf{e}$. Ugyanis $f(t) = (a_1 + te_1, a_2 + te_2)$, $f'(t) = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$.

Összetett függvény deriválása.

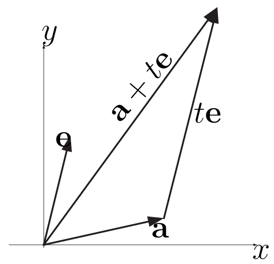
$$\left(\underbrace{g \circ f}_{k\times n\text{-es mátrix}}\right)'(\mathbf{x}) = \left(\underbrace{g'(f(\mathbf{x}))}_{k\times s\text{-es mátrix}}\right)\left(\underbrace{\mathbf{f}'(\mathbf{x})}_{s\times n\text{-es mátrix}}\right)$$

Ez a *lánc szabály.*



4.7. ábra. Összettet függvény. Elöször a belső függvényt, az f-et alkalmazzuk, majd a külső függvényt a g-t alkalmazzuk.

71. PÉLDA: Adott egy $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, függvény és adottak az $\mathbf{a}, \mathbf{e} \in \mathbf{R}^2$ vektorok. Legyen $f(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{e}$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$. Definiáljuk a következő összetett függvényt: $h(t) = (g \circ f)(t)$. Ekkor tehát $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ képező függvény.



4.8. ábra. $t \to \mathbf{a} + t\mathbf{e}$ egy leképezés $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$-be

$h'(t) = g'(f(t)) f'(t) = g'(f(t)) \mathbf{e}$ hiszen $f'(t) = \mathbf{e}$, mint az előbb láttuk.

4.1.5. Taylor-polinom többváltozós valós függvényekre

Ismétlés: Emlékezünk, hogy egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $n+1$-szer folytonosan differenciálható függvényre:

$$f(x) = \underbrace{\overbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n}^{T_n(x)}}_{n\text{-ed fokú Taylor polinom az } a \text{ körül}} + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Vagyis:

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

ahol $T_n(x)$ a *Taylor polinom*, $\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ a *hibatag*, ami megmutatja, hogy a Taylor polinom milyen pontosan közelíti az $f(x)$ függvényt az a körül.

Legyen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ és $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Az f függvény deriváltja $f'(\mathbf{x}) = \left(f'_{x_1}(\mathbf{x}), f'_{x_2}(\mathbf{x})\right) (= \mathit{gradf}(\mathbf{x}))$. Az f második deriváltját az f **Hesse-mátrixának:** hívjuk:

$$f''(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f''_{x_1x_1}(\mathbf{x}) & f''_{x_1x_2}(\mathbf{x}) \\ f''_{x_2x_1}(\mathbf{x}) & f''_{x_2x2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Például: $f(x,y) = x^2y^3$, ekkor

$$f'(x,y) = \left[2xy^3, 3x^2y^2\right], f''(x,y) = \begin{bmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2y \end{bmatrix}.$$

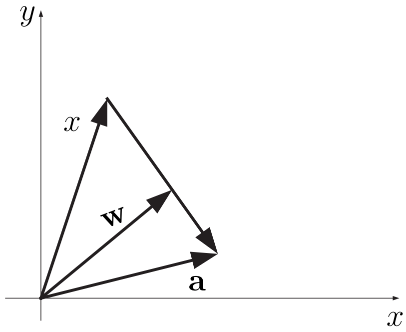
A második derivált, vagyis a *Hesse-mátrix* **mindig szimmetrikus mátrix**. (Lényeges, hogy feltettük, hogy az f kétszer folytonosan deriválható. Egyébként a fenti állítás nem lenne igaz.)

Az $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvény elsőrendű Taylor-polinomja az $\mathbf{a}$ helyen: $T(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})$. A közelítés hibáját a következő formula adja:

$$f(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}[\mathbf{x}-\mathbf{a}]^T f''(\mathbf{w})[\mathbf{x}-\mathbf{a}],$$

ahol $\mathbf{w}$ az $< \mathbf{x}, \mathbf{a} >$ szakasz egy pontja.

A $z = f[\mathbf{a}] + f'(\mathbf{a})\begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{pmatrix}$ sík az f függvény grafikonja által meghatározott felület *érintő síkja* az $(a_1, a_2, f(\mathbf{a}))$ pontokban.



4.9. ábra. A $\mathbf{w}$ vektor helyzete.

72. PÉLDA: Határozzuk meg az $f(x,y) = x \sin y$ érintősíkját a $P\left(2, \frac{\pi}{2}, 2\right)$ pontban!

Megoldás: Vegyük észre, hogy $f\left(2, \frac{\pi}{2}\right) = 2$, így a feladatnak van értelme. $f'(x,y) = (\sin y, x \cos y)$, $f'\left(2, \frac{\pi}{2}\right) = (1,0)$, így az érintősík egyenlete:

$$z = \underbrace{2}_{f(\mathbf{a})} + \underbrace{(1,0)}_{f'(\mathbf{a})} \left(\underbrace{\begin{array}{c} x-2 \\ y-\frac{\pi}{2} \end{array}}_{\mathbf{x}-\mathbf{a}} \right),$$

így

$$z = 2 + x - 2$$

az érintősík egyenlete.

A fenti Taylor- tétel azt mondja meg, hogy az érintősík milyen pontossággal közelíti a $z = f(x,y)$ felületet az $\mathbf{a}$ pont környezetében.

4.1.6. Szélsőérték számítás

Lokális szélsőértékek.

42. DEFINÍCIÓ: Egy $n \times n$-es A mátrixot **pozitív definitnek** nevezünk, ha $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$-ra $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$. (Az A **negatív definit**, ha $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$-ra $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0$.)

Mint fent láttuk a Hesse-mátrix mindig szimmetrikus mátrix ezért a mi céljainkra elég a szimmetrikus mátrixok pozitív definitségét ellenőrizni.

37. TÉTEL: Legyen $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, ekkor

(a) Ha $a > 0$ és $\det(A) > 0 \Rightarrow$ az A pozitív definit.

(b) Ha $a < 0$ és $\det(A) > 0 \Rightarrow$ az A negatív definit.

Bizonyítás.
$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 =$
$= \frac{1}{a}(a^2x_1^2 + 2abx_1x_2 + b^2x_2^2) + \frac{1}{a}(acx_2^2 - b^2x_2^2) = \frac{1}{a}(ax_1 + bx_2)^2 + \frac{1}{a}(ac - b^2)\, x_2^2.$
Tehát $a > 0$ és $\det(A) = ac - b^2 > 0$ esetén $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$, ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

A másik rész hasonlóan, ha $a < 0$ és $det(A) > 0$, akkor $\frac{1}{a}(ax_1 + bx_2)^2 < 0$ és $\frac{1}{a}(ac - b^2)\, x_2^2 < 0$. Tehát ekkor $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$, ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. ∎

Mivel feltettük, hogy az f kétszer folytonosan deriválható, ezért ha $f''(\mathbf{a})$ pozitív definit, akkor minden, az $\mathbf{a}$-hoz elég közeli $\mathbf{w}$-re is $f''(\mathbf{w})$ pozitív definit lesz.

Általában $\mathbf{R}^n$-ben legyen A egy $n \times n$-es szimmetrikus mátrix. A bal felső sarok determinánsokat rendre $D_1, \ldots, D_n$-el jelöljük. Vagyis

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

és

$D_1 = a_{11}$; $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$; $D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $\ldots$; $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

38. TÉTEL: (a) A negatív definit, ha

$$D_k = \begin{cases} \text{negatív, ha } k \text{ páratlan,} \\ \text{pozitív, ha } k \text{ páros.} \end{cases}$$

(b) A pozitív definit, ha D_k pozitív minden k-ra.

39. TÉTEL: Legyen $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ és tegyük fel, hogy $f'(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, ekkor

(a) ha $f''(\mathbf{a})$ pozitív definit, akkor az f-nek az $\mathbf{a}$-ban *lokális minimuma* van!

(b) ha $f''(\mathbf{a})$ negatív definit, akkor az f-nek az $\mathbf{a}$-ban *lokális maximuma van*!

(c) ha se nem pozitív, se nem negatív definit, akkor nem tudjuk, hogy az $\mathbf{a}$ lokális szélsőérték hely-e.

40. TÉTEL: Legyen $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Az f-nek csak ott lehet szélsőértéke, ahol $f'(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Azonban, ha $f'(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, ez még **nem** jelenti azt, hogy az f-nek az $\mathbf{a}$-ban lokális szélsőértéke van.

43. DEFINÍCIÓ: Ha $f'(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, akkor az f-nek az $\mathbf{a}$-ban *stacionárius pontja* van.

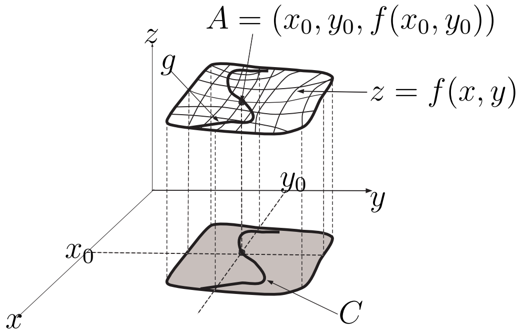
73. PÉLDA: Ha $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2$, akkor határozzuk meg az f függvény lokális szélsőérték helyét!

Megoldás: $f'(x, y) = (2x - 2, 2y)$. $f'(x, y) = \mathbf{0} \Rightarrow x = 1,\ y = 0$. Az egyetlen stacionáris pont az $\mathbf{a} = [1, 0]$.

$f''(x, y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$, így $f''(\mathbf{a})$ pozitív definit és az $(1, 0)$ pontban az f-nek lokális minimuma van, és máshol nincs lokális szélsőértéke.

74. PÉLDA: legyen $f(x, y) = \ln y^2 - y - 2x - x^2$. Határozzuk meg az f függvény lokális szélsőértékhelyeit!

Megoldás: $f(x, y) = 2 \ln y - y - 2x - x^2$. $f'(x, y) = \left(-2 - 2x, \frac{2}{y} - 1\right) = (0, 0) \Rightarrow x = -1, y = 2$. Az egyetlen stacionárius pont $\mathbf{a} = (-1, 2)$. $f''(x, y) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{y^2} \end{bmatrix}$, így $f''(-1, 2) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. $D_1 = -2 < 0$; $D_2 = (-2)\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$, így $f''(-1, 2)$ negatív definit, ebből pedig az következik, hogy f-nek a $(-1, 2)$ pontban lokális maximuma van.



4.10. ábra. A felületen haladó g görbe vetülete az xy síkbeli C görbe.

Feltételes szélsőérték Lagrange-féle multiplikátoros módszerrel. *Feladat:* Képzeljük el a $z = f(x, y)$-t mint egy hegy felületét!
Az így kapott hegy felületén egy olyan ösvényen haladunk, melynek az x, y síkra vett vetülete egy adott C görbe. A kérdés az, hogy ezen az ösvényen haladva hol vannak a lokális maximum és a lokális minimum helyek? Vagyis, ha a C görbét a $g(x, y) = 0$ egyenlet határozza meg, a feladatunk az, hogy találjuk meg azon $A = (x_0, y_0)$ pontokat, amelyek egy $f(x, y)$ függvény relatív szélsőértékei a $g(x, y) = 0$ feltételre nézve. Ez azt jelenti, ha $C = \{(x, y) \,|\, g(x, y) = 0\}$ (C általában néhány görbe uniója), akkor meg kell határozni a C azon (x_0, y_0) pontjait, melyekre

- $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$, ha $(x, y) \in C$ és (x, y) az (x_0, y_0) valamely kis környezetéből való. Ekkor az f-nek feltételes, lokális maximuma van (x_0, y_0)-ban.

- $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$, ha $(x, y) \in C$ és (x, y) az (x_0, y_0) valamely kis környezetéből való. Ekkor az f-nek feltételes, lokális minimuma van (x_0, y_0)-ban.

Megoldás: A feladat megoldásait azon (x_0, y_0) pontok között találjuk, amelyekre létezik λ_0, hogy az $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ függvény mindhárom parciális deriváltja nulla az (x_0, y_0, λ_0) pontban.

Hasonlóan, ha a feltétel $g(x, y, z) = 0$, és a függvény $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, akkor a feltételes szélsőértékeket azon pontok között találjuk, melyekre az

$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$ függvény mind a négy parciális deriváltja nulla.

75. PÉLDA: Az origó középpontú egység körvonalnak melyik pontjában lesz maximális az $f(x,y) = xy$ függvény értéke?

Megoldás: $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, $F(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$$\underbrace{\left.\begin{array}{lcll} \frac{\partial F}{\partial x} & = & y + 2\lambda x & = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = & x + 2\lambda y & = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} & = & x^2 + y^2 - 1 & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda = -\frac{y}{2x} \\ \lambda = -\frac{x}{2y} \end{array}\right\} \Rightarrow y^2 = x^2}_{2x^2-1=0\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\}}$$

Négy jelölt:

$P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $P_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $P_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $P_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$f(P_1) = f(P_4) = \frac{1}{2}$; $f(P_2) = f(P_3) = -\frac{1}{2}$.

76. PÉLDA: Az origó középpontú, hat egység sugarú gömb pontjai közül melyik van a legközelebb, és melyik van a legmesszebb a $P = (1,2,2)$ ponttól?

Megoldás:

$$\begin{array}{lcl} g(x,y,z) & = & x^2 + y^2 + z^2 - 36, \ (x,y,z \text{ a gömbön van}) \\ f(x,y,z) & = & (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2, \ (\text{távolság nényzete}) \\ F(x,y,z,\lambda) & = & (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 + \lambda(x^2+y^2+z^2-36). \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lcllcl} \frac{\partial F}{\partial x} & = & 2(x-1) + 2\lambda x & = 0 & \Rightarrow & \lambda = \frac{1-x}{x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = & 2(y-2) + 2\lambda y & = 0 & \Rightarrow & \lambda = \frac{2-y}{y} \end{array}\right\} y = 2x$$

$$\left.\begin{array}{lcllcl} \frac{\partial F}{\partial x} & = & 2(x-1) + 2\lambda x & = 0 & \Rightarrow & \lambda = \frac{1-x}{x} \\ \frac{\partial F}{\partial z} & = & 2(z-2) + 2\lambda z & = 0 & \Rightarrow & \lambda = \frac{2-z}{z} \end{array}\right\} z = 2x$$

$$\left.\begin{array}{lcl} y & = & 2x \\ z & = & 2x \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} & = & x^2 + y^2 + z^2 - 36 = 0 \end{array}\right\} 9x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 2.$$

A jelöltek: $Q_1 = (2,4,4)$; $Q_2 = (-2,-4,-4)$. Mivel $f(2,4,4) = 9$ és $f(-2,-4,-4) = 81$, így Q_1 van a legközelebb a P-hez, és Q_2 van a legtávolabb tőle.

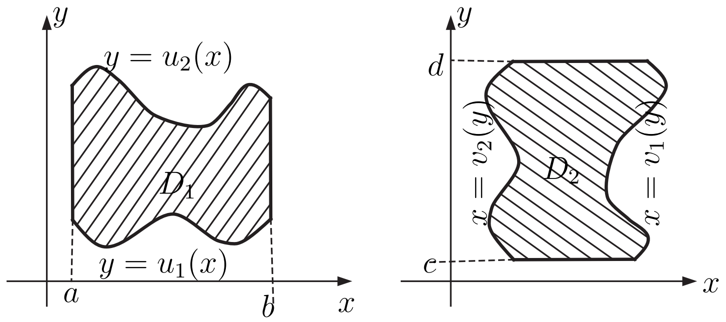
4.2. Többváltozós valósértékű függvények integrálása

4.2.1. Normáltartományok

Normáltartományok síkban. A normáltartományok pontosan azok a tartományok, amelyeken könnyű integrálni. Mivel a síkban az x és y tengelyek szerepe azonos, ezért két fajta normál tartományt különböztetünk meg:

$$D_1 : \begin{cases} a & \leq & x & \leq & b \\ u_1(x) & \leq & y & \leq & u_2(x) \end{cases} ; D_2 : \begin{cases} c & \leq & y & \leq & d \\ v_1(y) & \leq & x & \leq & v_2(y) \end{cases}$$

Vagyis:
$D_1 = \{(x, y) \,| a \leq x \leq b \text{ és } u_1(x) \leq y \leq u_2(x)\}$
$D_2 = \{(x, y) \,| c \leq y \leq d \text{ és } v_1(y) \leq x \leq v_2(y)\}$



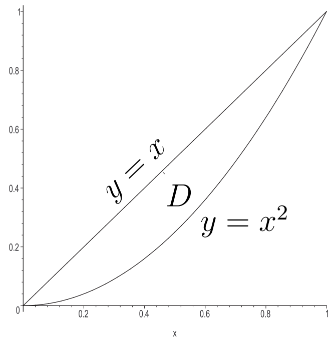
4.11. ábra. $D_1 = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ és } u_1(x) \leq y \leq u_2(x)\}$ továbbá $D_2 = \{(x, y) : c \leq y \leq d \text{ és } v_1(y) \leq x \leq v_2(y)\}$.

(l. 4.11. ábra)

A D_1 esetében az x-szel futunk az "a"-tól a "b"-ig, és egy ilyen x felett akkor vagyunk a D_1-ben, amikor $u_1(x) \leq y \leq u_2(x)$.

77. PÉLDA: (a) $u_1(x) = x^2$; $u_2(x) = x$ és $0 \leq x \leq 1$ (l. 4.12.ábra)

(b) $u_1(x) = 0$; $u_2(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{1 - x^2}, & \text{ha } \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1 \end{cases}$ és $0 \leq x \leq 1$ (l. 4.13. ábra)



4.12. ábra. Az $y = x$ és $y = x^2$ közötti terület.

Normáltartományok térben. Egy D tartomány akkor *normált tartomány* a térben, ha olyan mint egy *krumpli.* (l. 4.14.ábra)

$$D : \begin{cases} a & \leq & x & \leq & b \\ y_1(x) & \leq & y & \leq & y_2(x) \\ z_1(x,y) & \leq & z & \leq & z_2(x,y) \end{cases}$$

78. PÉLDA: Az origó középpontú, R sugarú gömb (l 4.15. ábra):

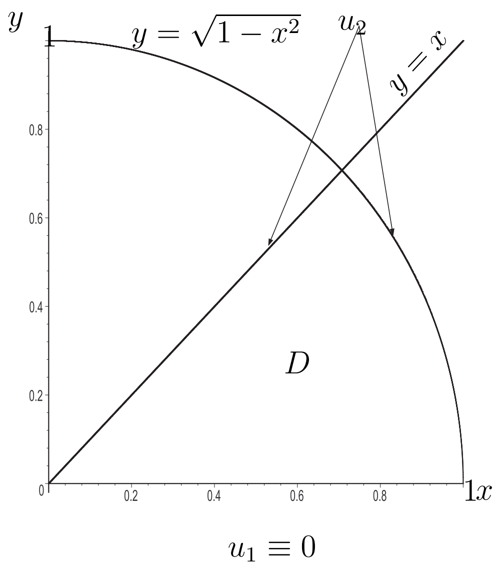
$$D : \begin{cases} -R & \leq & x & \leq & R \\ -\sqrt{R^2 - x^2} & \leq & y & \leq & \sqrt{R^2 - x^2} \\ -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} & \leq & z & \leq & \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

79. PÉLDA: Legyen D a $z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$ kúp, és a $z = 4 - x^2 - y^2$ forgási paraboloid által határolt korlátos tartomány. (l. 4.16. ábra)

$$D : \begin{cases} -2 & \leq & x & \leq & 2 \\ -\sqrt{4 - x^2} & \leq & y & \leq & \sqrt{4 - x^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2} - 2 & \leq & z & \leq & 4 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

4.2.2. $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvény Riemann integrálja normáltartományon

Legyen D egy síkbeli normáltartomány. Legyen f egy olyan függvény, amely *értelmezve* van a D *minden* (kivéve esetleg véges sok) *pontjában* és az f valós



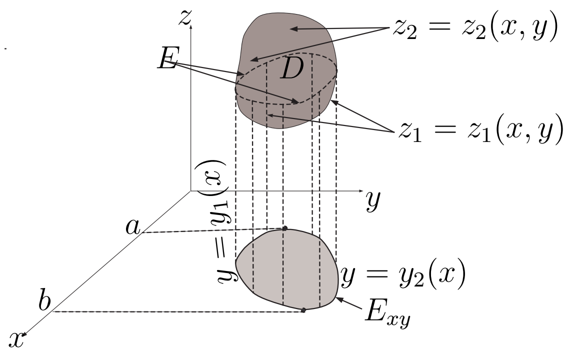
4.13. ábra. Az $y = x$ és az egységkör első negyedbe eső darabjának metszete.

értékeket vesz fel. Továbbá az f *folytonos* a D *minden* (kivéve esetleg véges sok) *pontjában* és az f *korlátos.*

Vegyünk egy tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ számot, és tekintsük az $\frac{1}{n}$ oldalú négyzetrácsot. Legyen $\{K_1, \ldots, K_m\}$ azon négyzetek a fenti négyzetrácsból, melyeknek van közös pontja D-vel. Legyen u_i egy tetszőleges eleme a $K_i \cap D$ halmaznak (l. 4.17. ábra). Ekkor : *terület*$(K_i)\, f(u_i) = \frac{1}{n^2} f(u_i) \approx$ az f függvény által meghatározott felület K_i feletti, és a felület alatti rész térfogatával.

Az f felület alatti térfogat közel egyenlő, ha ezen kis térfogatok összegével. Azaz $\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{n^2} f(u_i) \approx$ az $f(x, y)$ alatti térfogat. Tehát az $f(x, y)$ alatti térfogatot mint a

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{m} f(u_i)$$



4.14. ábra. A deformált gömb szerű D tartomány "egyenlítője" az E. A D test felületének az E görbe feletti része a $z = z_2(x, y)$ és az E alatti része a $z = z_1(x, y)$ felületek. Az E görbe vetülete az xy síkra (ugyanaz mint a D vetülete) az E_{xy} görbe. Ennek (az x tengely szempontjából) "alsó" része az $y = y_1(x, y)$, felső része pedig az $y = y_2(x, y)$ görbék.

határértékkel (ami belátható, hogy létezik) értelmezzük.

44. DEFINÍCIÓ: A fenti határértéket az$f$ függvény D **tartományra vonatkozó kettős integráljának** nevezzük. Néha pedig mint az f *Riemann-integrálját* a D-n emlegetjük.

Tehát a $\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$ az f függvény grafikonja alatti térfogat a D tartományon.

Fontos speciális eset: Mivel $f(x, y) \equiv 1$ konstans függvény alatti térfogat a D tartományon értelemszerűen a D tartomány területe kell legyen, ezért:

$$\textit{terület}\,(D) = \iint\limits_D 1 dxdy.$$

Mivel az $\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{m} f(u_i)$, (ahol $\{K_1, \ldots, K_m\}$ az $\frac{1}{n}$-es négyzetrács azon négyzetei, melyek metszik D-t és $u_i \in K_i$) ezért az integrál, mint $\textit{terület}(D) * (\textit{az } f \textit{ értékeinek "átlaga" } D\textit{-n})$ kifejezéssel *szemléltethető.* Ez nem pontos matematikai kifejezés, csak *szemléltetés.*

Tehát az integrál tulajdonságai az *"átlag"* tulajdonságaiból jönnek.

A Riemann integrál tulajdonságai.

1. $\iint\limits_D Cf(x,y)\,dxdy = C\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy, \qquad C \in \mathbb{R}$
2. $\iint\limits_D [f(x,y)+g(x,y)]\,dxdy = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy$
3. $D = D_1 \cup D_2$ továbbá $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, akkor $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy$
4. Ha $p \le f(x,y) \le q$, $\forall (x,y) \in D$, akkor
$$p \cdot \textit{terület}\,(D) \le \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \le q \cdot \textit{terület}\,(D)$$
5. *Integrálszámítás középérték tétele:*

Ha f *folytonos* a D egy összefüggő korlátos tartomány, akkor minden pontjában, úgy $\exists\,(u,v) \in D$, hogy $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \textit{terület}\,(D) \cdot f(u,v)$, *$D$ összefüggő.*

Az integrálszámítás középérték tétele szerint tehát ha f *folytonos*, akkor $\exists$ olyan $(u,v) \in D$, hogy a D alapú $f(u,v)$ magasságú test térfogata éppen $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$-nal egyenlő.

Az $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ szemléletesen azt jelenti, hogyha van egy sziget a tengerben, melynek alapja D, és a tengerszint feletti magasságot az $(x,y) \in D$ pontban az $f(x,y)$ adja meg, akkor ha egy nagy buldózerrel ezt a szigetet teljesen símára gyaluljuk (azaz minden pont tengerszint feletti magassága ugyanaz az M szám), akkor $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = M \cdot \textit{terület}(D)$.

A Riemann-integrál kiszámítása normáltartományon

41. TÉTEL:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{x=a}^{b} \left(\int\limits_{y=u_1(x)}^{u_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx,$$

ha $D:\left\{\begin{array}{ccccc} a & \leq & x & \leq & b \\ u_1(x) & \leq & y & \leq & u_2(x) \end{array}\right\}$ és az f a D minden (kivéve esetleg véges sok) pontjában értelmezett korlátos függvény, amely a D minden (kivéve esetleg véges sok) pontjában folytonos.

Megjegyzés: Ha $D:=\left\{\begin{array}{ccccc} c & \leq & y & \leq & d \\ v_1(y) & \leq & x & \leq & v_2(y) \end{array}\right.$, akkor $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{y=c}^{d}\left(\int\limits_{x=v_1(x)}^{v_2(x)} f(x,y)\,dx\right)dy.$

Tehát ha $D=[a,b]\times[c,d]$ téglalap (l. 4.18.ábra) :

$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{x=a}^{b}\left(\int\limits_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy\right)dx = \int\limits_{y=c}^{d}\left(\int\limits_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx\right)dy$. Vagyis az integrálás sorrendje felcserélhető mert függetlenek a határai.

80. PÉLDA: Legyen $D=[0,3]\times[1,2]$ téglalap. Mivel egyenlő $\iint\limits_D (1+8xy)\,dxdy$?

Megoldás: $\iint\limits_D (1+8xy)\,dxdy = \int\limits_{x=0}^{3}\left(\int\limits_{y=1}^{2}(1+8xy)\,dy\right)dx =$
$\int\limits_{x=0}^{3}\left[y+4xy^2\right]_{y=1}^{2}dx = \int\limits_{x=0}^{3}(2+16x-1-4x)\,dx = \int\limits_{x=0}^{3}(1+12x)\,dx = \left[x+6x^2\right]_0^3 =$ 57.

81. PÉLDA: Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ egy tetszőleges folytonos függvény és legyen D az 4.19. ábrán látható tartomány . Feladat: határozzuk meg az integrálás határait az alábbi kettes integrálban:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = ?$$

Megoldás: Látható, hogy D egy normál tartomány, ahol $-1\leq x\leq 2$ és egy ilyen x-re $x^2\leq y\leq 2+x$. Tehát

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{x=-1}^{2}\left(\int\limits_{y=x^2}^{2+x} f(x,y)dy\right)dx$$

82. PÉLDA: Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ egy tetszőleges folytonos függvény és legyen D a 4.20. ábrán látható tartomány . Feladat: határozzuk meg az integrálás határait az alábbi kettes integrálban:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = ?$$

Megoldás: Az alsó kör egyenlete: $x^2+y^2=1$. A felső kör egyenlete: $x^2+(y-1)^2=1$. A két kör metszéspontjainak x koordinátái: $-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tehát egy $-\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$-re $1-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$. Vagyis:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{x=-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\int_{y=1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy \right) dx.$$

83. PÉLDA: Legyen $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges folytonos függvény és legyen D az 4.21. ábrán látható tartomány.

Feladat: határozzuk meg az integrálás határait az alábbi kettes integrálban:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = ?$$

Megoldás: Noha a D tartomány **nem** normáltartomány, de előáll mint a D_1 és a D_2 normáltartományok diszjunkt uniója. Ezért

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Tehát elég a jobb oldalon álló két integrált kiszámítani.

$$\iint_{D_1} f(x,y)dxdy = \int_{x=-1}^{0} \left(\int_{y=1+x}^{2+2x} f(x,y)dy \right) dx + \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=1-x}^{2-2x} f(x,y)dy \right) dx$$

Továbbá:

$$\iint_{D_2} f(x,y)dxdy = \int_{x=-1}^{0} \left(\int_{y=-2-2x}^{-1-x} f(x,y)dy \right) dx + \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=-2+2x}^{-1+x} f(x,y)dy \right) dx.$$

84. PÉLDA: Határozzuk meg az $x+y+z=4$ sík alatti térfogatot az xy síkbeli $R=[0,1]\times[0,2]$ téglalap feletti részen (l. 4.22. ábra).

Megoldás: $térfogat = \int\limits_{x=0}^{1}\left(\int\limits_{y=0}^{2}(4-x-y)\,dy\right)dx = \int\limits_{x=0}^{1}\left[4y-xy-\frac{y^2}{2}\right]_0^2 dx =$ $\int\limits_{x=0}^{1}(8-2x-2)\,dx = \int\limits_{x=0}^{1}(6-2x)\,dx = \left[6x-x^2\right]_0^1 = 5.$

85. PÉLDA: Mivel egyenlő az $\iint\limits_R xydxdy$, ha R az a korlátos tartomány, amit az $y=\frac{1}{2}x$; $y=\sqrt{x}$; $x=2$; $x=4$ határolnak (l. 4.23. ábra)?
Megoldás: $\iint\limits_R xydxdy = \int\limits_{x=2}^{4}\left(\int\limits_{y=\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} xydy\right)dx = \int\limits_{x=2}^{4}\left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} dx = \int\limits_{x=2}^{4}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{8}\right)dx =$ $\left[\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{32}\right]_2^4 = \frac{11}{6}.$

86. PÉLDA: Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tetszőleges függvény, amely integrálható az 4.24. ábrán látható T tartományon. Irjuk fel az integrálási határokat:

Megoldás: Mivel a T az origó középpontú egységsugarú körlemeznek az első síknegyedbe eső része, ezért:

$$\iint\limits_T f(x,y)dxdy = \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dxdy.$$

4.2.3. Helyettesítéses integrál

Gyakran előfordul, hogy az integrálás határai már önmagukban is olyan komplikált függvények, hogy emiatt az integrál kiszámítása a fenti módon túl sok munkát igényelne. Sokat egyszerűsödhet a dolog, ha megfelelő helyettesítést vezetünk be melynek hatására az ingrálási tartomány egy téglalap, vagy egy háromszög lesz.

az új változók helyettesítésének szabályait mutatja a következő tétel, melynek talán ijesztően általános fogalmazását ellensúlyozza, a sok példa, amelyek a tétel alkalmazását mutatják be.

42. TÉTEL: Legyen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ integrálható a $T \subset \mathbf{R}^2$ tartományon, továbbá legyen $G : \Gamma \to T$ *1-1 értelmű* és folytonosan differenciálható, ahol $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$.

Ekkor $\iint\limits_T f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_\Gamma f(G(u,v)) \left| \underbrace{\det(G'(u,v))}_{\text{Jacobi determináns}} \right| dudv$

Leggyakrabban az ún. polárkoordinátás helyettesítést használjuk. Itt a tételbeli u, v szerepét az r (origótól vett távolság) és a φ (az x tengely pozitív felével, az óramutató járásával ellentétes irányban felmért szög). A polárkoordinátás helyettesítés esetén:

$$G(r,\varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \text{ és } det\,(G'(r,\varphi)) = r.$$

87. PÉLDA: Írjuk fel poolárkoordinátasan az $(5,2)$ középpontú és $R = 4$ egységsugarú zárt körlemezt!

Megoldás:

$$x = 5 + r\cos(\varphi) \quad y = 2 + r\sin(\varphi),$$

ahol $0 \le \varphi \le 2\pi$ és $0 \le r \le 4$. Tehát a paraméter tartomány az r, φ síkon egy téglalap: $[0,4] \times [0,2\pi]$.

88. PÉLDA: Írjuk fel poolárkoordinátasan az

$$\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{4} = 1$$

egyenlettel meghatározott zárt ellipszis lemezt.

Megoldás: Az ellipszis középpontja: $P = (4,7)$, az x tengellyel párhuzamos tengelyének hossza: $a = 3$ az y tengellyel párhuzamos tengely hossza $b = 2$. Ezért:

$$x = 4 + ar\cos(\varphi) \quad y = 7 + br\sin(\varphi),$$

ahol $0 \le r \le 1$ és $0 \le \varphi \le 2\pi$.

89. PÉLDA: Legyen $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Legyen T az origó középpontú egység sugarú körlemez első síknegyedbe eső darabja. Mivel egyenlő $\iint\limits_T f(x,y)\,dxdy$?

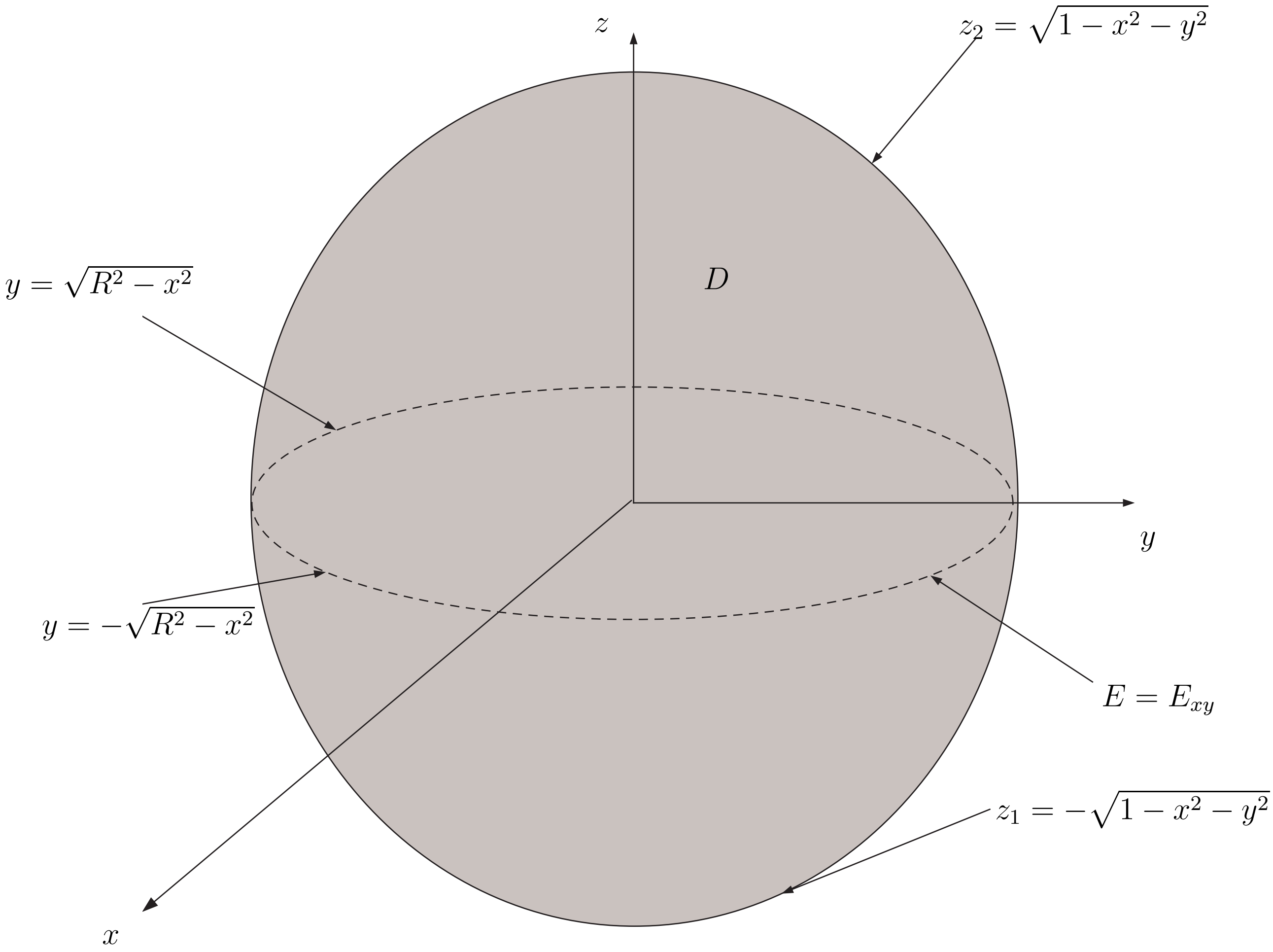
Megoldás:

$$G(r,\varphi) = \underbrace{\left(\underbrace{r\cos\varphi}_{x}, \underbrace{r\sin\varphi}_{y}\right)}_{\text{polárkoordinátás helyettesítés}}, \text{ és } \Gamma = \left\{(r,\varphi)\,|0 \le r \le 1; 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

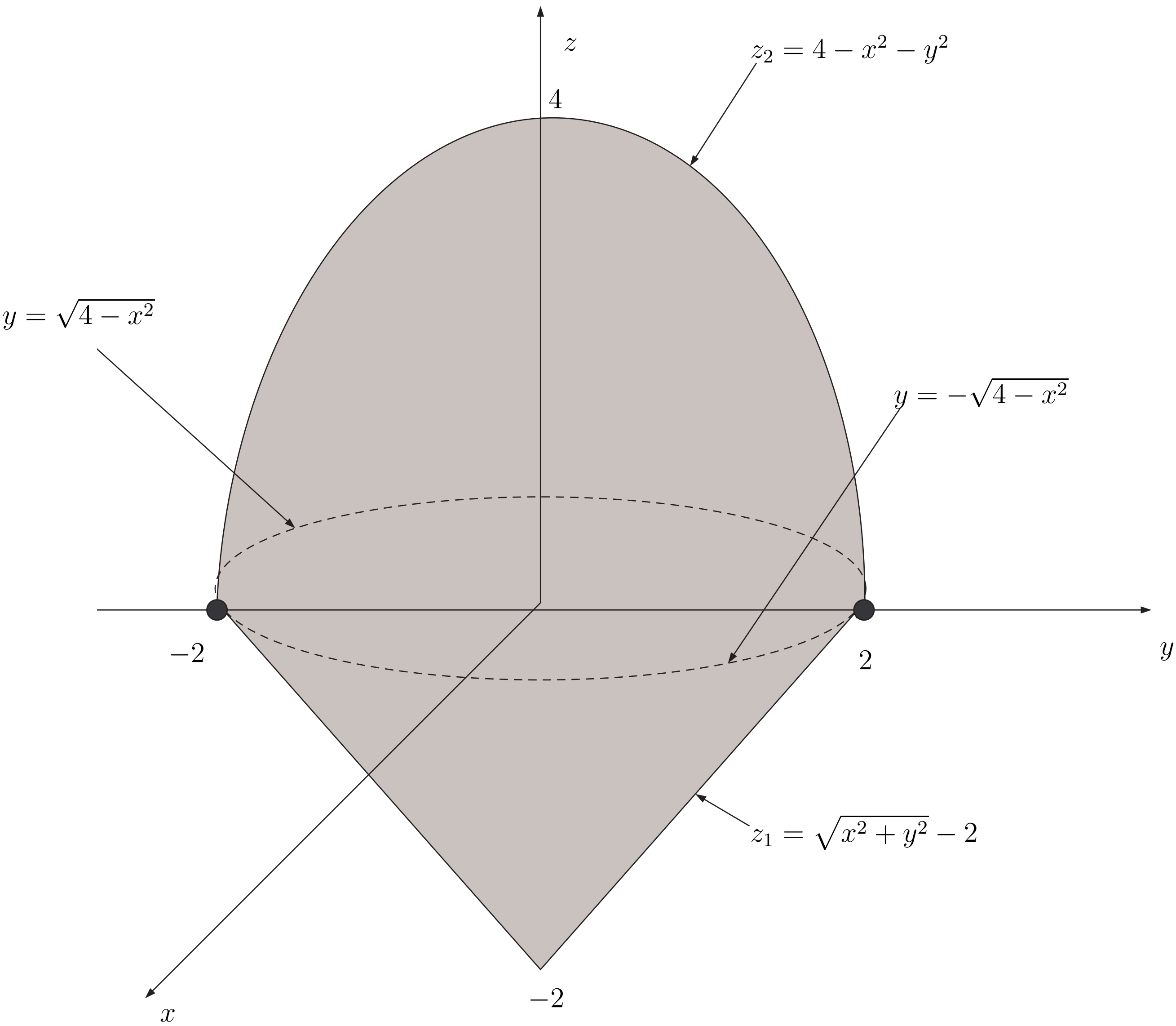
Ekkor a G a Γ-t 1-1 értelműen képezi a T-re, és G folytonosan differenciálható. Ezért a tétel feltételei teljesülnek.

$G'(r,\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix} \Rightarrow \det(G'(r,\varphi)) = r$

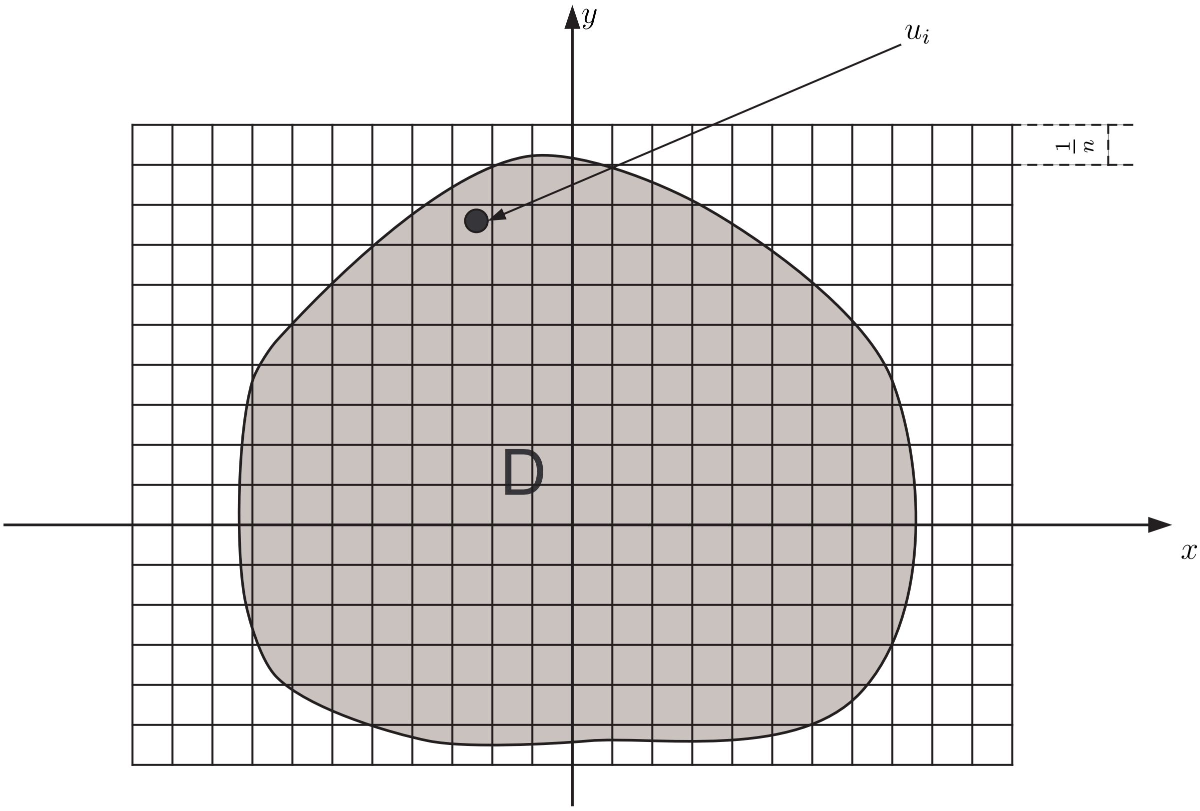
$|\det(G'(r,\varphi))| = r$. Tehát $\iint\limits_{T} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\Gamma} \underbrace{\sqrt{1-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2}}_{f(G(r,\varphi))} \bullet \underbrace{r}_{|\det(G'(r,\varphi))|} drd\varphi = \int\limits_{r=0}^{1}\left(\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-r^2} \bullet r d\varphi\right) dr = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\left[(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\,\frac{2}{3}\right]_{r=0}^{1}\right) = \frac{\pi}{6}$



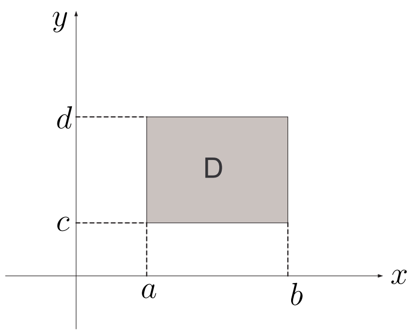
4.15. ábra. Gömb mint normáltartomány.



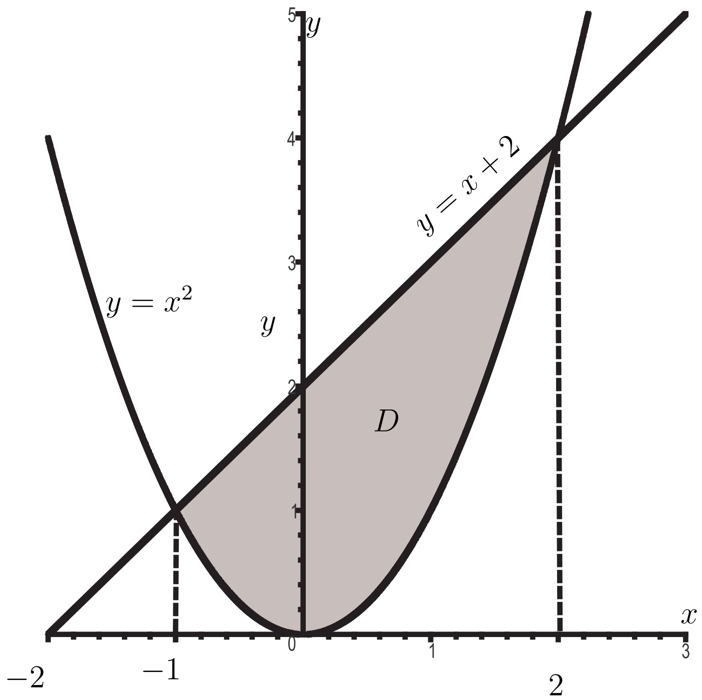
4.16. ábra. Felül gömb alul kúp.



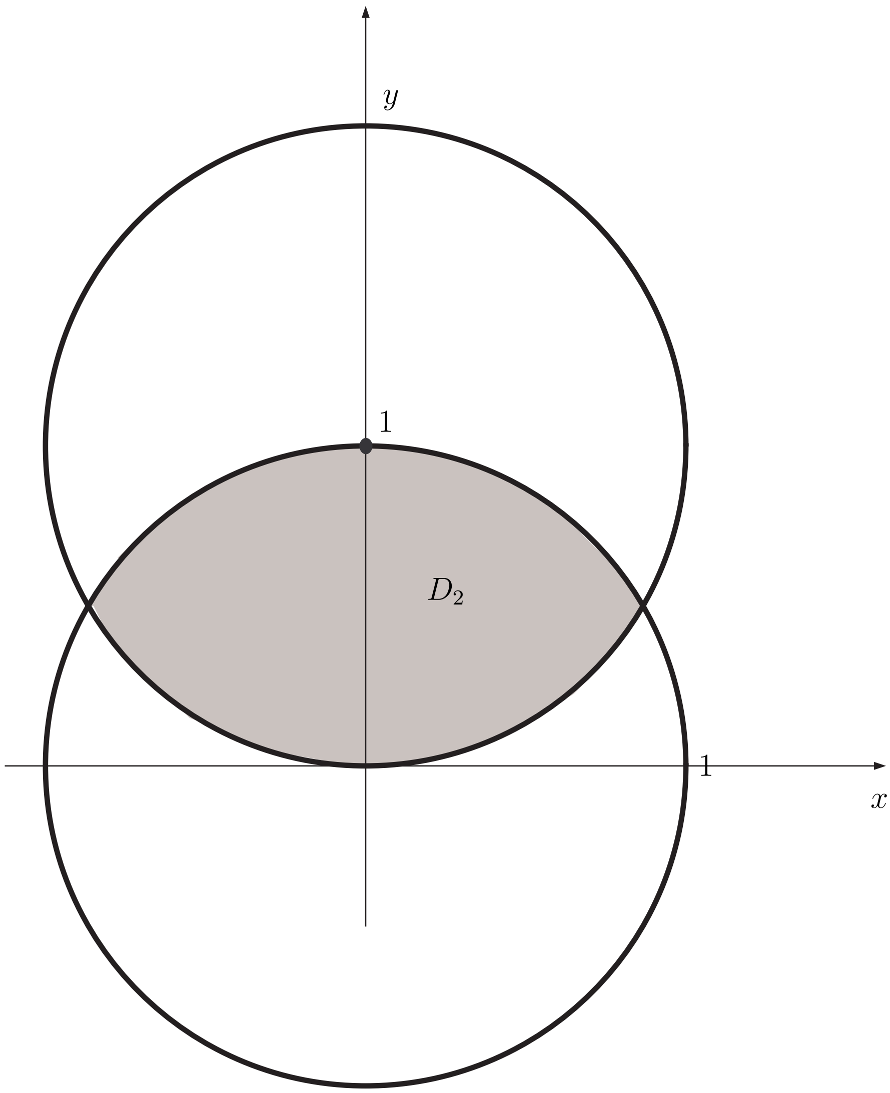
4.17. ábra. Az u_i a K_i négyzet egy tetszőleges pontja.



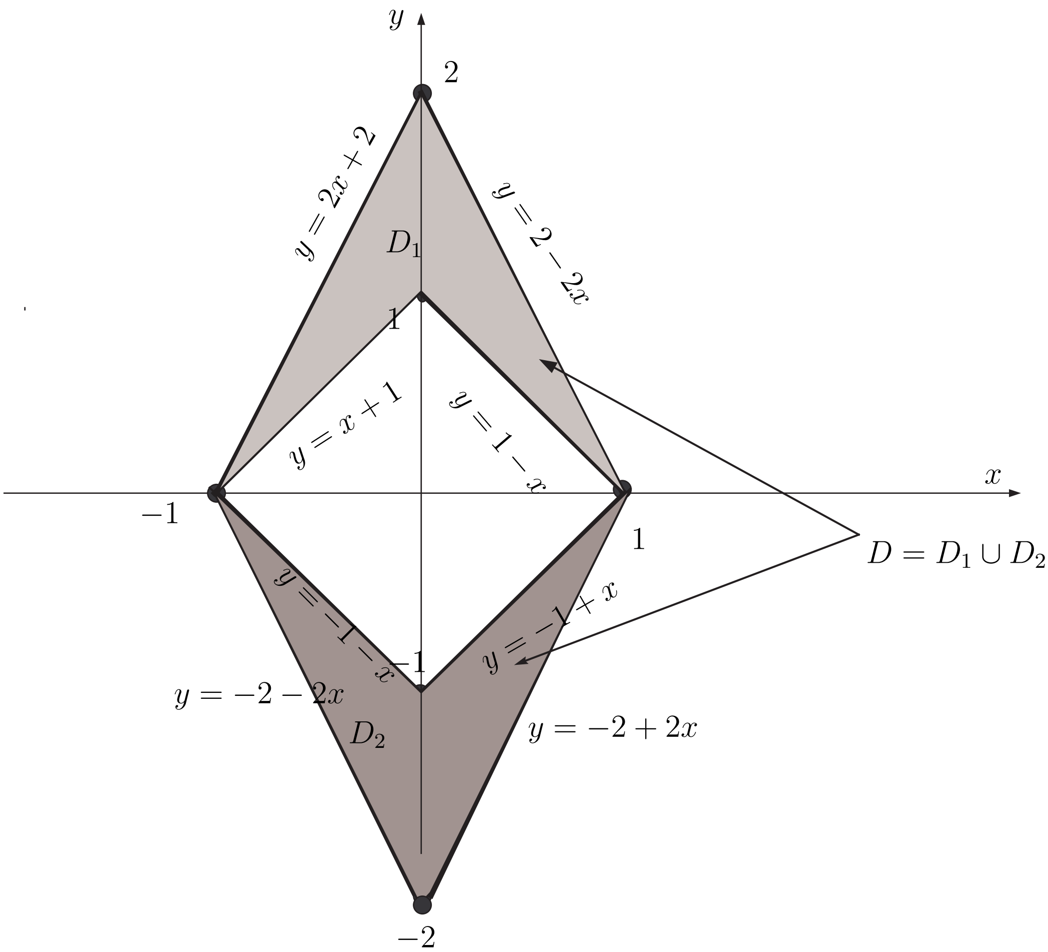
4.18. ábra. Téglalap mint két intervallum szorzata.



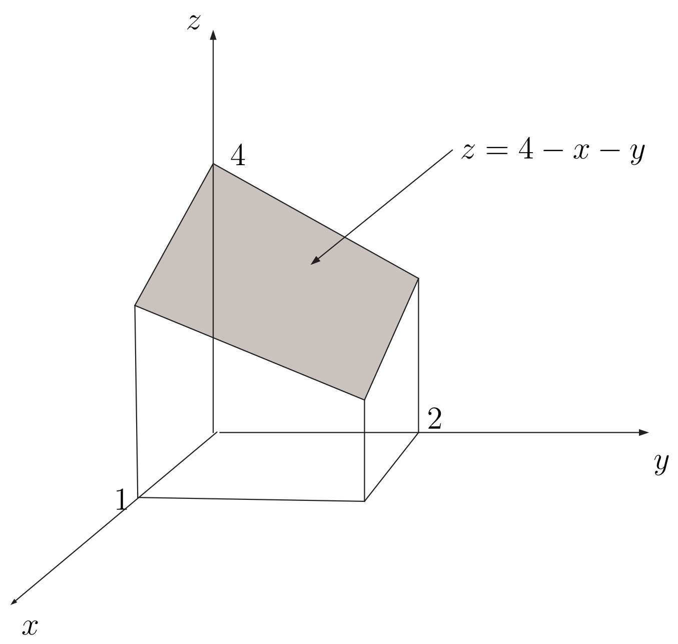
4.19. ábra. D az ábrán jelölt tartomány.



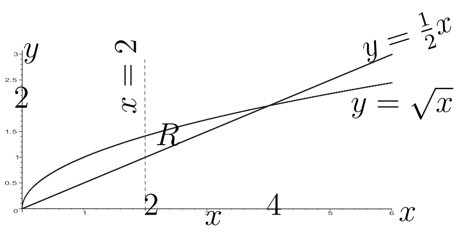
4.20. ábra. D_2 az ábrán jelölt tartomány.



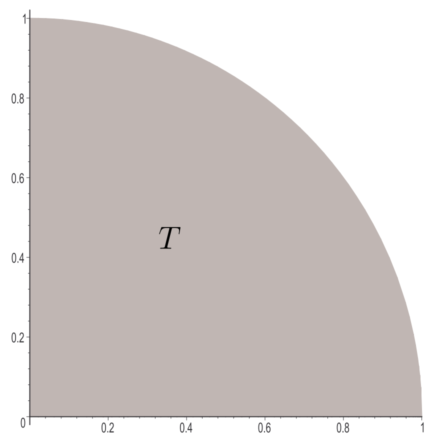
4.21. ábra. $D = D_1 \cup D_2$ az integrálási tartomány.



4.22. ábra. Test melyet alúról a $[0,1]\times[0,2]$ téglalap, felűről pedig az $x+y+z=4$ sík határol.



4.23. ábra. Az $y=\sqrt{x}$, $\frac{1}{2}x$ és az $x=2$ görbék által határolt R tartomány



4.24. ábra. A T tartomány

90. PÉLDA: Legyen $A = \{(x, y) \,| x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$. Mivel egyenlő $\iint\limits_A \underbrace{\left(x^2 + y^2 + 1\right)}_{f(x,y)} dxdy$?

Megoldás: $G(r, \varphi) = \left(\underbrace{r\cos\varphi}_{x}, \underbrace{r\sin\varphi}_{y}\right)$ és $\Gamma = \{(r, \varphi) \,| 0 \leq r \leq 2; 0 \leq \varphi \leq \pi\}$.

$G : \Gamma \to A$ 1-1 értelmű folytonosan differenciálható.

$$\iint\limits_A \underbrace{\left(x^2 + y^2 + 1\right)}_{f} dxdy = \iint\limits_\Gamma \left(\underbrace{\underbrace{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2}_{r^2} + 1}_{f(G(r,\varphi))}\right) \bullet \underbrace{r}_{|\det(G'(r,\varphi))|} drd\varphi =$$

$\iint\limits_\Gamma \left(r^3 + r\right) drd\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \left(\int\limits_{r=0}^{2} (r^3 + r)dr\right) d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \left[\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2}\right]_0^2 d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \left(\frac{16}{4} + 2\right) d\varphi =$ $\pi 6$.

91. PÉLDA: Legyen $A = \{(x, y) \,| x \geq 0; \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}\}$ és $B = \left\{(x, y) \,| x \geq 0; \frac{x^2}{4} \leq y \leq x^2\right\}$. Mivel egyenlő $\iint\limits_{A\cap B} \frac{x^2}{y} =$? (l.4.25. ábra.)

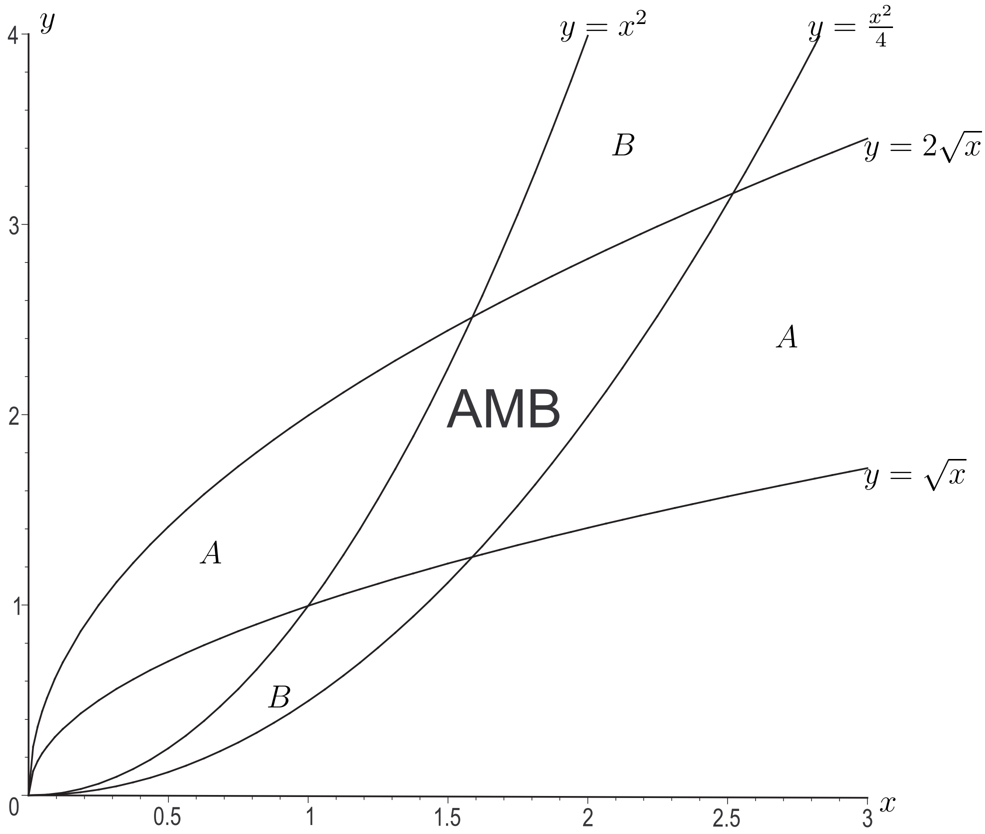
Megoldás: Először megkeressük a megfelelő helyettesítést. $\left.\begin{array}{l} t = \frac{y}{\sqrt{x}} \\ u = \frac{y}{x^2} \end{array}\right\}$. Innen: $\sqrt{x} = \frac{y}{t}$ és $x^2 = \frac{y}{u}$. A második egyenletet elosztva az elsővel kapjuk, hogy: $x^{\frac{3}{2}} = \frac{t}{u}$, vagyis $x = t^{\frac{2}{3}} u^{-\frac{2}{3}}$ (l. 4.26. ábra). Ebből és a fenti első egyenletből: $y = t\sqrt{x} = t^{\frac{4}{3}} u^{-\frac{1}{3}}$. Vagyis $G(t, u) = \left(\underbrace{\sqrt[3]{\frac{t^2}{u^2}}}_{x}, \underbrace{t\sqrt[3]{\frac{t}{u}}}_{y}\right)$;

$\Gamma : \begin{array}{l} \frac{1}{4} \leq u \leq 1 \\ 1 \leq t \leq 2 \end{array}$ Könnyen látható, hogy $detG'(t, u) = \frac{6}{9} t u^{-2}$, továbbá: $\frac{x^2}{y} = u^{-1}$. Vagyis a keresett integrál:

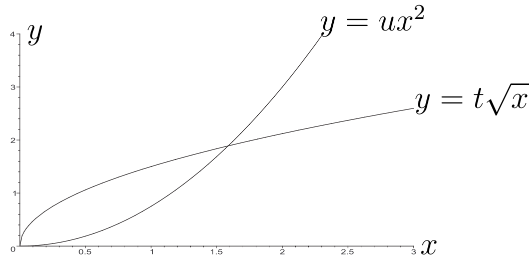
$$\frac{2}{3} \int\limits_{u=\frac{1}{4}}^{1} \int\limits_{t=1}^{2} u^{-1} \cdot t u^{-2} dtdu = \frac{2}{3} \int\limits_{u=\frac{1}{4}}^{1} u^{-3} \int\limits_{t=1}^{2} tdt = \frac{15}{2}.$$

92. PÉLDA: Legyen
$M_1 = \left\{(x,y) : x \geq 0, \frac{x^2}{4} \leq y \leq x^2\right\}$ és $M_2 = \left\{(x,y) : x > 0, \frac{1}{x} < y < \frac{4}{x}\right\}$.
Mivel egyenlő $\iint\limits_{M_1 \cap M_2} \frac{x^2 \sin 2xy}{y} dxdy$? (L. 4.27. ábra.)

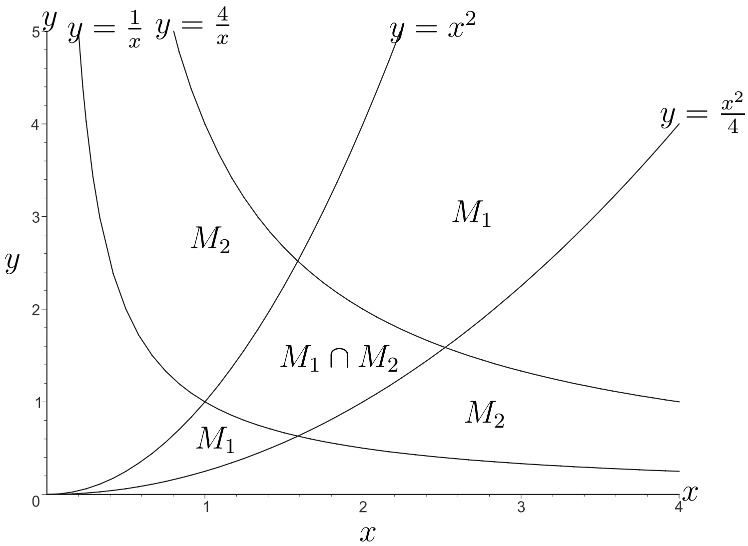
Megoldás: Először megfelelő helyettesítést keresünk (l. 4.28. ábra.)



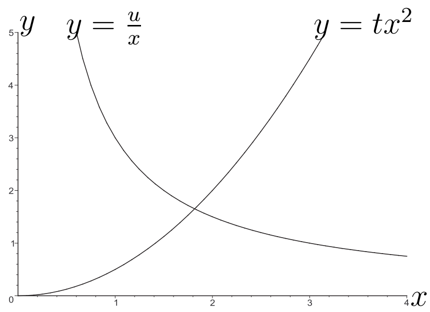
4.25. ábra. A $A \cap B$ tartomány



4.26. ábra. A t u paraméterek jelentése.



4.27. ábra. Az M_1 és M_2 tartományok metszete.



4.28. ábra. A t u paraméterek jelentése.

$$\left.\begin{array}{c} t=\frac{y}{x^2} \\ u=xy \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x=u^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{3}} \\ y=u^{\frac{2}{3}}t^{\frac{1}{3}} \end{array} ;\ \Gamma: \begin{array}{c} \frac{1}{4}\le t\le 1 \\ 1\le u\le 4 \end{array} \text{ vagyis}$$

$$G(t,u)=\left(\underbrace{u^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{3}}}_{x},\underbrace{u^{\frac{2}{3}}t^{\frac{1}{3}}}_{y}\right)$$

és $\Gamma=\left\{(t,u):\frac{1}{4}\le t\le 1;1\le u\le 4\right\}$ $G'(t,u)=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{4}{3}} & \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}t^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}t^{-\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}t^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}\Rightarrow$

$\begin{array}{l} \det(G'(t,u))=-\frac{1}{3t} \\ |\det(G'(t,u))|=\frac{1}{3t} \end{array}$. $\iint\limits_A \overbrace{\frac{x^2\sin 2xy}{y}}^{f(x,y)}dxdy = \iint\limits_\Gamma \overbrace{\sin(2u)\bullet\frac{1}{t}}^{f(G(t,u))}\bullet\overbrace{\frac{1}{3t}}^{|\det(G'(t,u))|}dudt =$ $\frac{1}{3}\int\limits_{t=\frac{1}{4}}^{1}\left(\int\limits_{u=1}^{4}\sin(2u)\bullet\frac{1}{t^2}du\right)dt = \frac{1}{3}\int\limits_{t=\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{t^2}dt\int\limits_{u=1}^{4}\sin(2u)\,du$ Ez innen egyszerű számolással befejezhető.

93. PÉLDA: Az $\int\limits_{y=0}^{\infty}\int\limits_{x=0}^{\infty}e^{1-2x-3y}dxdy$ mivel egyenlő?

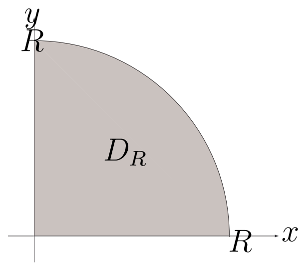
Megoldás: $\int\limits_{y=0}^{\infty}\left(\int\limits_{x=0}^{\infty}e^{1-2x-3y}dx\right)dy = \lim\limits_{\substack{L\to\infty\\R\to\infty}}\int\limits_{y=0}^{L}\left(\int\limits_{x=0}^{R}e^{1-2x-3y}dx\right)dy =$ $\int\limits_{y=0}^{L}\left(\int\limits_{x=0}^{R}e^{1-2x-3y}dx\right)dy = \int\limits_{y=0}^{L}\left[-\frac{1}{2}e^{1-2x-3y}\right]_0^R dy$

$\int\limits_{y=0}^{L}\left(-\frac{1}{2}e^{1-2R-3y}+\frac{1}{2}e^{1-3y}\right)dy = \left[\frac{1}{6}e^{1-2R-3y}-\frac{1}{6}e^{1-3y}\right]_0^L = \frac{1}{6}\left(e^{1-2R-3L}-e^{1-3L}\right)-$ $\frac{1}{6}\left(e^{1-2R}-e\right)$. Tehát $\int\limits_{y=0}^{\infty}\int\limits_{x=0}^{\infty}e^{1-2x-3y}dxdy = \lim\limits_{\substack{L\to\infty\\R\to\infty}}\frac{1}{6}\left(\underbrace{e^{1-2R-2L}}_{0}-\underbrace{e^{1-3L}}_{0}\right)-$ $\frac{1}{6}\left(\underbrace{e^{1-2R}}_{0}-e\right)=\frac{e}{6}$.

94. PÉLDA: Mivel egyenlő az $I=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}$?

Megoldás: $G(r,\varphi)=\left(\underbrace{r\cos\varphi}_{x},\underbrace{r\sin\varphi}_{y}\right)$; $x^2+y^2=r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=$ r^2. $I=\lim\limits_{R\to\infty}\iint\limits_{D_R}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$; $D_R=\left\{(x,y)\,|x\ge 0,y\ge 0,x^2+y^2\le R^2\right\}$ és

$\Gamma_R = \left\{(r,\varphi)\,|0 \le r \le R, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}$; $G : \Gamma_R \to D_R$.



4.29. ábra. A D_R tartomány.

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{r=0}^{R} \left(\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r d\varphi \right) dr = \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{2} \int_{r=0}^{R} e^{-r^2} r dr = \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left[e^{-r^2}\right]_0^R =$$

$\lim\limits_{R\to\infty} -\frac{\pi}{4}\left(\underbrace{e^{-R^2}}_{0} - 1\right) = \frac{\pi}{4}$. Tehát $\int\limits_{x=0}^{\infty}\int\limits_{y=0}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int\limits_{x=0}^{\infty} e^{-x^2} dx \int\limits_{y=0}^{\infty} e^{-y^2} dy =$ $\frac{\pi}{4} \Rightarrow \int\limits_{x=0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Vagyis $\int\limits_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (ez használható a normális eloszlás sűrűség függvényével kapcsolatban).

$\int e^{-x^2} dx$ **nem** adható meg zárt alakban, ezért fontos a fenti eredmény.

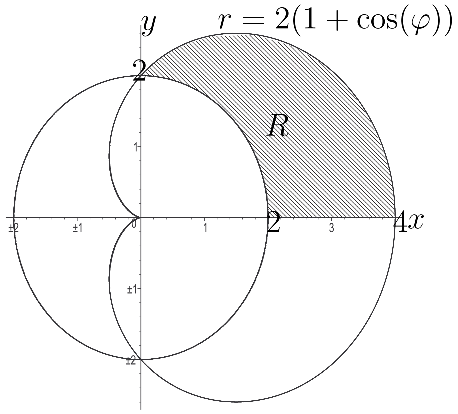
95. PÉLDA: Legyen R az 4.30. ábrán látható tartomány. Mivel egyenlő az $I = \iint\limits_R \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$?

Megoldás: $G(r,\varphi) = \left(\underbrace{r\cos\varphi}_{x}, \underbrace{r\sin\varphi}_{y}\right)$ és $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\sin\varphi}{\sqrt{r^2}} = \sin\varphi \,(= f(G(r,\varphi)))$,

$\Gamma = \left\{(r,\varphi)\,|2 \le r \le 2(1+\cos\varphi); 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}$, $G : \Gamma \to R$. Tehát $I =$ $\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_{r=2}^{2(1+\cos\varphi)} \sin\varphi r dr \right) d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \left[\frac{r^2}{2}\right]_2^{2(1+\cos\varphi)} d\varphi =$

$2 \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\left((1+\cos\varphi)^2 \sin\varphi - \sin\varphi\right)\right] d\varphi = 2\left[-\frac{1}{3}(1+\cos\varphi)^3 + \cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[-\frac{1}{3} - \left(-\frac{5}{3}\right)\right] =$ $\frac{8}{3}$.

96. PÉLDA: Határozzuk meg a háromlevelű lóhere területét, melynek egyenlete: $r = \sin 3\varphi$ (l. 4.31. ábra).



4.30. ábra. A kardioid és kör által közrezárt tartomány fele.

Megoldás: terület $(R) = \iint\limits_R 1dxdy$.

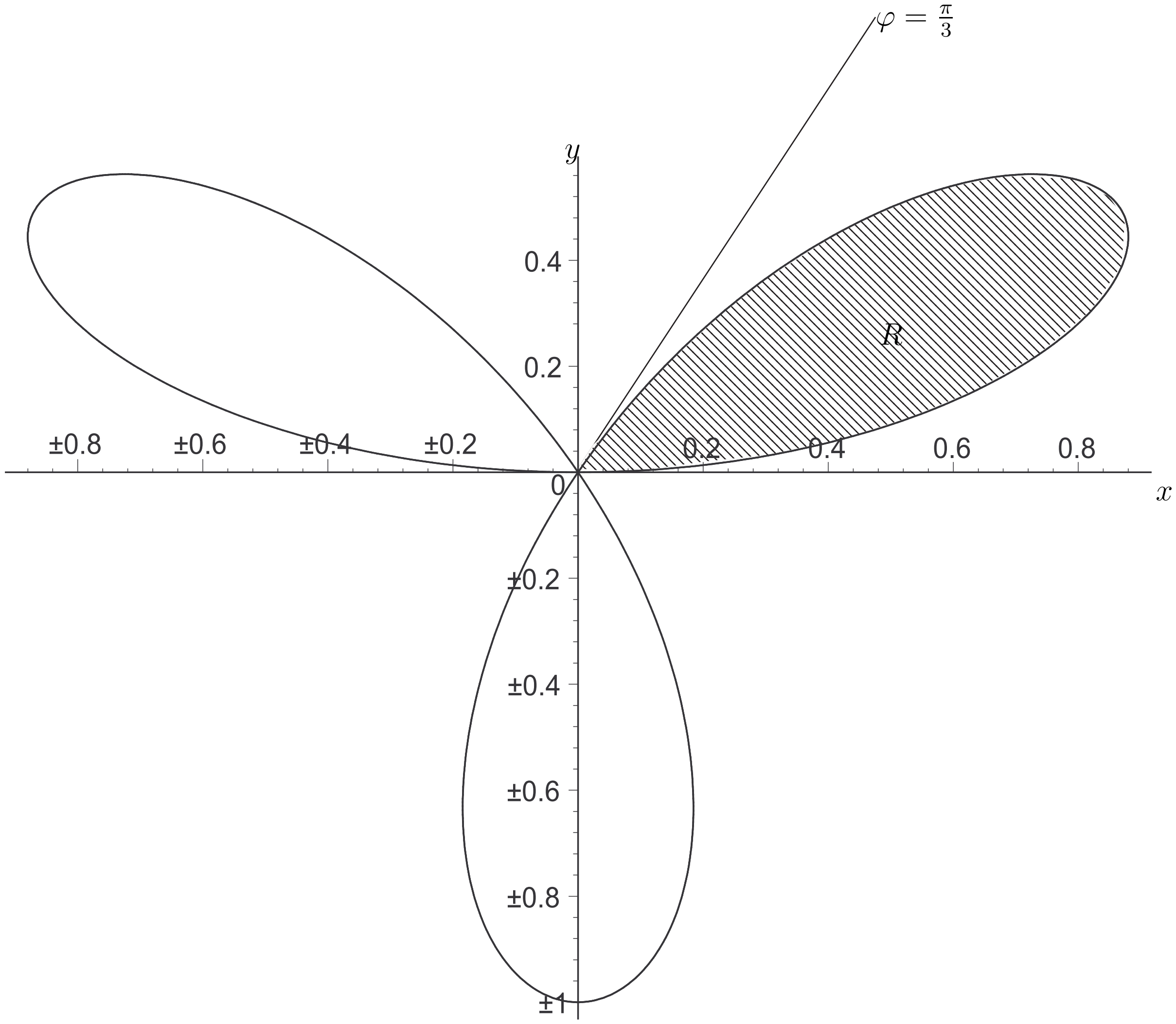
$G(r,\varphi) = \left(\underbrace{r\cos\varphi}_{x}, \underbrace{r\sin\varphi}_{y}\right)$, $\Gamma = \left\{(r,\varphi) \mid \begin{array}{ccccc} 0 & \leq & \varphi & \leq & \frac{\pi}{3} \\ 0 & \leq & r & \leq & \sin 3\varphi \end{array}\right\}$ és $G : \Gamma \to R$. Így a keresett egy lóhere területe:

terület $(R) = \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int\limits_{r=0}^{\sin 3\varphi} rdr\right) d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 6\varphi)\, d\varphi =$ $\left[\frac{1}{4}\varphi - \frac{1}{24}\sin 6\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3\bullet 4} = \frac{\pi}{12}$.

97. PÉLDA: Határozzuk meg az R sugarú gömb térfogatát!

Megoldás: Elég meghatározni a felső félgömb $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = R, z \geq 0\}$ V térfogatát.

$V = \iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy$, ahol $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq R^2\}$. $G(r,\varphi) = \left(\underbrace{r\cos\varphi}_{x}, \underbrace{r\sin\varphi}_{y}\right)$, $\Gamma = \left\{(r,\varphi) \mid \begin{array}{ccccc} 0 & \leq & r & \leq & R, \\ 0 & \leq & \varphi & \leq & 2\pi \end{array}\right\}$, $G : \Gamma \to D$. Tehát $V = \int\limits_{r=0}^{R}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \underbrace{r}_{|\det(G'(r,\varphi))|} \sqrt{R^2 - r^2}d\varphi dr = 2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)\int\limits_{r=0}^{R}(-2r)\sqrt{R^2-r^2}dr =$ $(2\pi)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2}{3}\left[(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R = \frac{2\pi R^3}{3}$ ez a félgömb térfogata, így az R sugarú gömb térfogata: $\frac{4\pi R^3}{3}$.



4.31. ábra. Háromlevelű lóhere.

Irodalomjegyzék

[1] Kálovics Ferenc: Matematikai analízis mérnökhallgatóknak. Miskolci egyetemi Kiadó. 2001.

[2] Bukszár József: Matematikai feladatagyűjtemény

[3] W. Rudin: A matematikai analízis alapjai, Műszaki könyvkiadó Budapest 1978.

[4] Scharnitzky Viktor: Mátrixszámítás. Műszaki Könyvkiadó Budapest