

7. Ha tudjuk, hogy $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ és $\nabla \cdot \vec{G} = 0$ akkor a következő vektorterek közül melyek azok amelyek a divergenciája biztosan zérus:

a, $\vec{F} + \vec{G}$; b, $\vec{F} \times \vec{G}$; c, $(\vec{F} \cdot \vec{G})\vec{F}$

8. Legyen $g(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2$ és $\vec{F}(x, y, z) = (2xz, \sin y, e^z)$.

Határozzuk meg: (Ha értelmű, ha nem írjuk azt, hogy értelmes)

a, grad g ; b, $\text{div } g$

c, $\text{div } \vec{F}$; d, $\nabla \times \vec{F}$ e, $\nabla \cdot (\nabla g)$

f, $\nabla \times (\nabla g)$ g, $\text{div}(\nabla \times \vec{F})$

1. Írja fel a $\iint_T f(x, y) dx dy$ kétes integrálban az integrálás határait, ha először x aztán pedig y szerint integrálunk (másd forditva) és a

T tartomány:

a, $x^2 + y^2 \leq 9$,

b, $x=0, y=0, x+z=12$ egyenesek által határolt háromszög

c, $y = x^2 - 3x, y = 9 - x^2$ görbék által határolt terület.

d, $y = \sin x$ és $y = 2 \sin \frac{x}{2}$ görbék által

határolt végecsík rész, ha $0 \leq x \leq 2\pi$.
(itt csak az egyszerűbb integrált írjuk fel)

e, $y^2 \leq 8x, y = 2x, y + 4x - 24 \leq 0$ görbék által határolt végecsík rész.

2. Válaszja az alábbi kettős integrálok integrálási tartományát:

a₁ $\int_{y=0}^2 \int_{x=y-1}^{y+2} f(x,y) dx dy$ b₁ $\int_{x=0}^4 \int_{y=0}^{4-x-x^2} f(x,y) dy dx$

c₁ $\int_{x=0}^1 \int_{y=-x}^{x^2} f(x,y) dy dx$ d₁ $\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1+\sqrt{2x-x^2}} f(x,y) dy dx$

e₁ $\int_{\rho=0}^{\pi} \int_{\tau=0}^{2\pi} f(\tau, \rho) d\tau d\rho$ f₁ $\int_{\rho=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\tau=0}^{2\cos\tau} f(\tau, \rho) d\tau d\rho$

3. Számítsuk ki a következő kettős integrálokat.

a₁ $\int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 e^{x+y} dx dy$ b₁ $\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x^2}{1+y^2} dy dx$

c₁ $\int_{y=0}^{\pi} \int_{x=0}^{\pi} \sin(x+y) dx dy$ d₁ $\int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} xy \sin(x^2+y^2) dx dy$

4. Számítsuk ki az $\iint_A \cos(x+y) dx dy = ?$, ha

az A az $y=x$, $y=-x$ és $x=2$ egyenletű egyenesek által közrefogott tartomány.

5. Legyen $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1 \text{ és } x \geq 0, y \geq 0\}$.

Kérdés: $\iint_A (x^2+y^2+1) dx dy = ?$

Írja le az integrálás valószínűleg

6. Legyen A az a háromszög melynek csúcsai:

$P_1(1,0)$; $P_2(3,2)$; $P_3(4,-1)$. Kérdés:

$\iint_A \frac{dx dy}{x^2+2x+2} = ?$

7. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, $a > 0, b > 0$ ellipszis belsejénél a kettős integrál ~~értékét~~ segítségével.

Segítségével.

8. Határozzuk meg a következő kettős integrál tartományát és írjuk le az integrálási tartomány alakját is.

a₁ $\int_{x=0}^1 \int_{y=1}^{\frac{z}{y}} \frac{z}{y} dz dy dx$

1, A hivatkozott feladatokban számítsuk ki az adott kétfős integrálokat polárkoordinátás transzformációval.

a.) $\int_{x=0}^R \int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dy dx, R > 0$

b.) $\int_{x=0}^R \int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} (1-2x-3y) dy dx, R > 0$

c.) $\iint_A (x^2+2y^2) dx dy$, ahol $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 4\}$.

d.) $\iint_A \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}} dx dy$, ahol A az egységnyi kör középpontja, meggyedik síknegyedbe eső része.

e.) $\iint_A \arctg \frac{y}{x} dx dy$, ahol $A = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, x \leq y \leq x\sqrt{3}\}$

2, Transzformációval számoljuk ki a következő kétfős integrálokat:

a.) $\iint_A x dx dy$, ahol A a hivatkozott egyenlő oldalú határolt síkidom; $y = x-1, y = x, y = -x+1$ és $y = -x+2$

b.) $\iint_A xy dx dy$, ahol A az alábbi egyenlőtleniséget megadott tartomány; $x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \geq 1, x^2+y^2 \leq 9$

c.) $\iint_A xy dx dy$, ahol $A = \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{4}{x}\}$ (hasznádjuk a $x=t, y=u$ transzformációt).

d.) $\iint_{A \cap B} \frac{x^2}{y} dx dy$ ahol: $A = \{(x,y) \mid x > 0, \sqrt{x} = y \leq 2\sqrt{x}\}$, $B = \{(x,y) \mid x > 0, \frac{x^2}{4} \leq y \leq x^2\}$.

e.) $\iint_{M_1 \cap M_2} \frac{x^2 \sin 2xy}{y} dx dy$, ahol $M_1 = \{(x,y) \mid x > 0, \frac{x^2}{4} \leq y \leq x^2\}$, $M_2 = \{(x,y) \mid x > 0, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{e}{x}\}$

$$b) \int_{x=1}^3 \int_{y=0}^5 \int_{z=-1}^0 (\frac{1}{x} + y + z^2) dz dy dx$$

$$c) \int_{y=0}^3 \int_{x=0}^{6-2y} \int_{z=0}^{\frac{6-2y-x}{3}} y dz dx dy$$

$$d) \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^{1+x+y} dz dy dx$$

9.) Számítsuk ki az $\iiint_S f(x,y,z) dx dy dz = ?$ ha:

a.) $f(x,y,z) = \sqrt{x+y+z}$; A_2 S az a test amit az 'xy', 'xz' koordináta síkok és a következő síkok határolnak: $y=2$, $x=1$, $x=4$ és $z=5$.

b.) $f(x,y,z) = xy$; A_2 S az a test amit a koordináta síkok és az $x+2y+4z=8$ sík határolt.

10.) Három integrál segítségével határozzuk meg a következő térfogatokat:

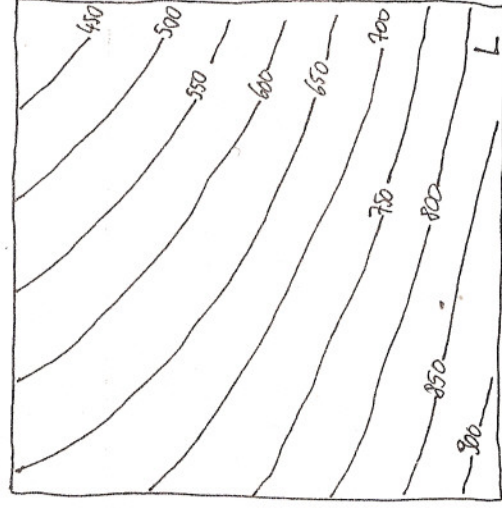
(a) tetraéder melyet a koordináta síkok és a $x+y+z=1$ sík határol.

(b) A_2 $x^2+y^2=z$ és az $x^2+z^2=a$ hengerek metszete, ahol $a>0$ tetszőleges szám.

11.) A következő feladatban határozzuk meg az adott sűrűségfüggvényű adott test tömegét:

a.) A test a 10.a. feladatban adott tetraéder a sűrűség: $\rho(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$.

12.)



Ez itt egy négyzet alakú térképrészlet. 1cm az ébri méretű 100m-nek a valódi méretben.

a.) Beszűkítjük meg az átleg ~~sz~~ tengelyein feletti magasságot.

9

3) Számítsuk ki a következő improprius kettes integrálokat:

a.) $\int_{y=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} e^{1-2x-3y} dx dy$

b.) $\int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} xye^{-x^2-y^2+2x-1} dx dy$

c.) $\int_{y=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} x^2 e^{2x-y} dy dx$

d.) $\int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2+2xy-2y^2} dx dy$

e.) $\int_{y=1}^2 \int_{x=0}^1 \frac{1}{x^2y-2x^2y+x^2} dx dy$

4.) Oldjunk meg a következő feladatokat hengerkoordinátás helyettesítéssel:

a.) $\iiint_V \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dx dy dz = ?$ ha S az a test melyet
 $a \quad z = x^2+y^2, z = 1-x^2-y^2$ paraboloidek határolnak.

b.) $\int_0^1 \int_{-x^2}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^z z dz dy dx = ?$
hármas
 $x = -1 \quad y = -\sqrt{1-x^2} \quad z = -1$

c.) $\int_{x=0}^{1/\sqrt{2}} \int_{y=x}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=x^2+y^2-1}^{x^2+y^2} dz dy dx = ?$

5.) Oldjunk meg a következő feladatokat gömbkoordinátás helyettesítéssel:

a.) $\iiint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2} dx dy dz = ?$ ahol S az a tető

amely az első-térfelcsoportban van és a koordináta síkok és a $x^2+y^2+z^2=9$ gömb határolják

b.) $\iiint_S (x+y) dx dy dz = ?$ ahol S az a test amelyet felülről az $x^2+y^2+z^2=16$ gömb alulról a $z = \sqrt{13x^2+3y^2}$ kúp határol.

c.) $\int_{y=-1}^2 \int_{z=-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2+z^2}} \int_{x=\sqrt{4-y^2-z^2}}^{x^2+y^2+z^2} dx dy dz = ?$

$$d_1) \int_0^3 \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \int_0^{\sqrt{3-x^2-y^2}} xy \, dz \, dy \, dx = ?$$

6, ~~Oldjunk meg~~ a következő feladatot megfelelő helyettesítéssel:

$$a_1) \iiint_S (x+z)^2 \, dx \, dy \, dz = ? \text{ ahol az } S \text{ testet}$$

az ~~következő~~ síkok határolják:

$$x+y+3z=0; \quad x+y+3z=1; \quad y+z=0; \quad y+z=1;$$

$$x+z=-1; \quad x+z=1.$$

$$b_1) \iiint_S \cos y \, dx \, dy \, dz = ? \text{ ahol } S \text{ az a test amit a}$$

következő felületek határolnak:

$$z = \sin y + 1; \quad z = \sin y - 1; \quad y = 0; \quad y = \frac{\pi}{2}; \quad x + z = 0;$$

$$x + z = 1.$$

$$c_1) \text{ Legyen } S = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq a(x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 \leq \frac{a}{2}\}.$$

Legyen V az a test amit úgy kapunk, hogy az S -ből

kidobjuk azt a hengert melynek ~~magassága~~ tengelye az z tengely és sugara R ?

d₁) Oldjunk ki egy R sugarú gömbből egy olyan hengert melynek tengelye átmenne a gömb ~~egy~~ középpontján és melynek sugara r .

Mi lesz az így keletkező test térfogata?

$$e_1) \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \, dx \, dy \, dz = ?$$