Matematika Plus 3 Építőmérnököknek

Simon Károly

2011.12.09

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Funkcionál analízis

1.1. Lebesgue Integrál

1. PÉLDA: [Triadikus Cantor halmaz] Amint azt a 1.1 ábra mutatja először is kidobjuk a $[0,1]$ intervallumból a középső nyílt $1/3$ hosszú $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ intervallumot. Így kapjuk az

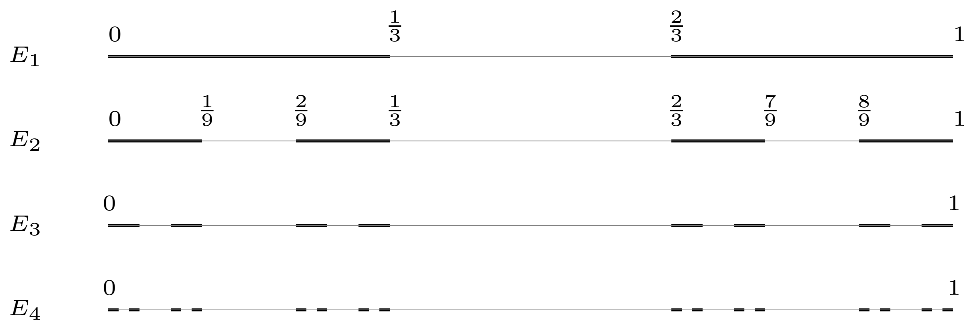
$$E_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

halmazt. Ez a Cantor-féle triadikus halmaz első approximációja. Most a megmaradt két intervallummal ugyanazt tesszük amit az első lépésben a $[0,1]$ intervallummal tettünk, vagyis kidobjuk a középső nyílt harmadukat. Így kapjuk az

$$E_2 := \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Folytatva az eljárást az n-edik lépésben kapjuk az $E_n \subset [0,1]$ halmazt, amely áll 2^n darab egyenként 3^{-n} hosszú intervallumból. Mivel az E_n-et úgy kaptuk, hogy az E_{n-1}-nek mind a 2^{n-1} darab 3^{n-1} hosszú intervallumából eltávolítottuk a középső nyílt harmadukat, ezért minden n-re: $E_n \subset E_{n-1}$ és az E_n hossza (vagyis az E_n-et alkotó inetervallumok össz hossza) az E_{n-1} hosszának harmada. Tekintsük azt a halmazt ami végtelensok lépés után megmarad:

$$E := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n. \tag{1.1}$$?ph73?



1.1. ábra. A triadikus Cantor halmaz első négy apprximációja

Ekkor az E halmaz pont azokból a $[0, 1]$-beli számokból áll,amelyeknek hármas számrendszerbeli felírásában nem szerepel egyes. Vagyis, az E-nek pontosan annyi eleme van mint ahány valós szám (Az E nem megszámlálhatóan végtelen vagyis az E elemei nem rendezhetőek sorozatba.) Másrészt az E nem tartalmaz egyetlen intervallumot sem, hiszen minden n-re $E \subset E_n$ teljesül és E_n, $1/3^n$ hosszú intervallumokból áll. Tehát minden n-re igaz, hogy E-ben nem lehet $1/3^n$-nél hosszabb intervallum vagyis E-ben semmilyen intervallum sem lehet. Ha E-nek akarunk hosszat tulajdonítani, akkor igaz kell egyen, hogy E hossza plusz a $[0, 1]$-ből kidobott intervallumok össz hossza eggyel kell egyenlő legyen. Viszont vegyük észre, hogy a kidobott intervallumok össz hossza eggyel egyenlő mivel ez

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 2^2 \frac{1}{3^3} + 2^{n-1} \frac{1}{3^n} + \cdots = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1.$$

Másképpen úgy is láthatjuk, hogy az E halmaz "hossza" vagyis egy dimenziós mértéke eggyel kell eyenlő legyen, hogy a konstrukcióból nyilvánvaló, hogy az E hossza egy olyan szám, ami saját maga harmada. Ilyen véges szám csak a nulla lehet.

A triadikus Cantor halmaz egy tipikus példa a Lebesgue szerint nulla mértékű halmazokra:

2. DEFINÍCIÓ: Legyen $H \subset \mathbb{R}^d$ tetszőleges halmaz. Azt mondjuk, hogy a H halmaz **Lebesgue szerint nulla mértékű**, ha minden $\varepsilon > 0$-ra létezik d-dimenziós gömbök $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozata, hogy

1. $H \subset \cup_{n=1}^{\infty} G_n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \text{térfogat}_d(G_n) < \varepsilon$.

3. PÉLDA: 1. Minden véges halmaz Lebesgue szerint nulla mértékű. Ugyanis ha $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$, akkor minden $1 \leq i \leq n$-re fedjük le a h_i pontot egy h_i középpontú $\frac{\varepsilon}{n}$ sugarú gömbbel, amit G_n-nek nevezünk. Ekkor $\{G_i\}$ teljesíti a fenti feltételeket.

2. Ha H egy megszámlálthatóan végtelen halmaz, akkor H hasonlóan Lebesgue-szerint nulla mértékű. Legyen ugyanis, $H = \{h_1, h_2, h_3, \ldots\}$ és G_n legyen a h_n középpontú $\varepsilon/2^n$ sugarú gömb. Ekkor $\{G_n\}$ teljesíti a fenti feltételeket. Tehát speciálisan a racionális számok halmaza egy Lebesgue szerint nulla mértékű halmaz.

3. Triadikus Cantor halmaz. Ez egy nem megszámlálhatóan végtelen halmaz.

Most idézzük fel a Riemann integrál definícióját:

4. DEFINÍCIÓ: (Riemann Integrál) Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy Δ a $[0,1]$ intervallum egy beosztása, ha $\Delta = \{x_0 = 0 < x_1, < x_2, < \cdots <, x_n = 1\}$. Az $i-1$-edik és az i-edik osztópontok által meghatározott intervallum az $I_i := [x_{i-1}, x_i]$ ha $i = 1, \ldots, n$. Ezen intervallumok lehetnek azonosan $1/n$ hosszúak, de lehetnek különböző hosszúak is. A Δ beosztás normája a leghosszabb I_i hossza vagyis

$$\|\Delta\| := \max_i |I_i|.$$

Az f függvénynek a Δ beosztáshoz tartozó **alsó Riemann közelítő összege**:

$$\underline{R}(f, \Delta) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \inf_{t_i \in I_i} f(t_i) \cdot |I_i| \right\}.$$

Az f függvénynek a Δ beosztáshoz tartozó **felső Riemann közelítő összege**:

$$\overline{R}(f, \Delta) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sup_{t_i \in i_i} f(t_i) \cdot |I_i| \right\}.$$

Azt mondjuk, hogy az f függvény Riemann integrálható, ha következő határértékek léteznek és egyenlőek:

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \underline{R}(f,\Delta) = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \overline{R}(f,\Delta).$$

Ekkor ezt a közös határértéket nevezzük az f Riemann integráljának és $\int\limits_0^1 f(x)dx$-el jelöljük.

5. TÉTEL: (Lebesgue-tétel) Egy $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann integrálható akkor és csak akkor ha

1. $f(x)$ korlátos,
2. $\{x \in [0,1] :$ az f nem folytonos x-ben $\}$ egy Lebesgue szerint nulla mértékű halmaz.

6. PÉLDA: [Dirichlet-function] Legyen $d : [0,1] \to \mathbb{R}$ a következőképpen definiálva:

$$d(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]; \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{1.2}$$?ph67?

Ekkor minden Δ beosztásra $\underline{R}(f,\Delta) = 0$ és $\overline{R}(f,\Delta) = 1$ tehát az $f(x)$ nem lehet Riemann integrálható. És valóban a $d(X)$ függvény nem folytonos egyetlen pontban sem, tehát a Lebesgue-tétel szerint nem is lehet Riemann integrálható. definiáljunk most egy olyan $d_n(x)$ függvény sorozatat, amely szintén a a $[0,1]$ intervallumon értelmezett és $\{d_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ függvény sorozat monoton növekvő módon tart a $d(x)$ függvényhez minden $x \in [0,1]$-ben. Ehhez először is emlékezzünk, hogy a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza megszámlálhatóan végtelen. Vagyis a $[0,1]$ intervallumba eső racionális számokat sorozatba rendezhetjük. Legyen $[0,1] \cap \mathbb{Q}$-nak egy (természetesen végtelen) sorozatba rendezése:

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots.$$

Ekkor definiáljuk a $\{d_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ függvény sorozatot:

$$d_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \{r_1, \ldots, r_n\}\ , \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1.3}$$?ph68?

Nyilván minden $x \in [0,1]$-re:

$$\lim_{n\to\infty} d_n(x) = d(x). \tag{1.4}$$?ph69?

Továbbá az is nyilvánvaló, hogy a $d_n(x)$ függvény folytonos minden $x \in [0,1]$-ben kivéve az $\{x_1, \ldots, x_n\}$ véges sok pontot. Mivel a $d_n(x)$ függvény csak a 0 0 és az 1 értékeket veszi fel ezért a $d_n(x)$ függvény korlátos is. Tehát minden n-re a $d_n(x)$ függvény Riemann integrálható. Az is nyilvánvaló, hogy minden

$$\int_0^1 d_n(x)dx = 0, \qquad \forall n\text{-re.}$$

Tehát összefoglalva: A $\{d_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ függvény sorozat

1. konvergens és határértéke a Riemann szerint nem integrálható $d(x)$ függvény
2. a függvény sorozat minden tagja Riemann integrálható és a Riemann integrál minden n-re egyenlő nullával.

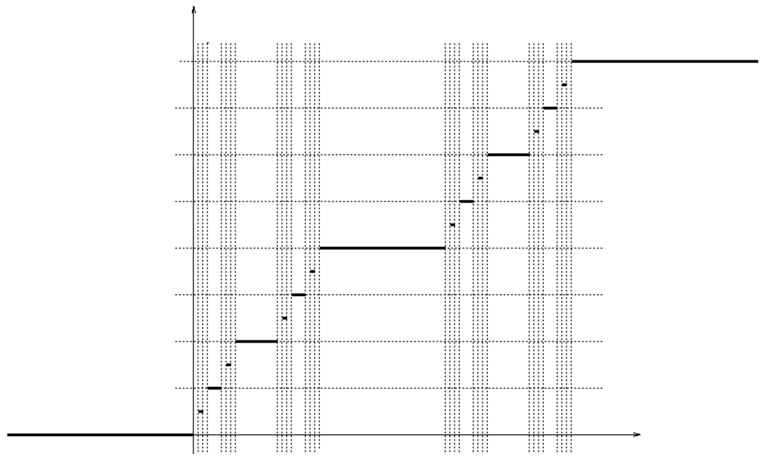
Ez a példa azt mutatja, hogy még egyenletesen korlátos függvény sorozat esetén sem teljesül, hogy az integrálás és a határátmenet sorrendje felcserélhető, vagyis hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx. \tag{1.5}$$?ph70?

Amikor a egy függvény integráljáról beszélünk, akkor a függvény görbe és az x-tengely közötti előjeles területre gondolunk. Azonban bonyolultabb függvények esetén nem teljesen nyilvánvaló, hogy mit is értünk a "függvény görbe alatti terület"-en. Ezen fogalom egy lehetséges megfogása a Riemann integrál fenti definíciója. Azonban ez a definíció túl szigorú abban az értelemben hogy viszonylag kevés függvény lesz csak integrálható. Mivel az integrálható függvények halmaza túl szűk ezért túlságosan sokszor előfordul, hogy Riemann integrálható függvények sorozata nem lesz Riemann integrálható és ezért az integrál fogalmát ki kell terjeszteni. A következő példa mutat egy másik okot amiért nem elégséges a Riemann integrál.

7. PÉLDA: [Devil's staircase függvény]

Legyen C a triadikus Cantor halmaz. Az elsőnek kidobott intervallumon definiáljuk $s(x)$-et 1/2-nek. A masodiknak kidobott intervallumok közül a baloldalin legyen $s(x)$ egyenlő 1/4-el a jobboldalin pedig 3/4-el. Ha így folytatjuk a definíciót minden határon túl, akkor határértékben megkapjuk az



1.2. ábra. Devil's staircase függvény. (Kép a Wikipedia-ról)

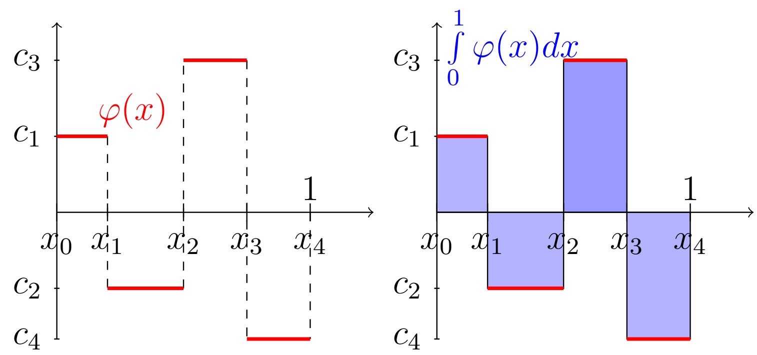
$s(x)$-et a $[0,1] \setminus C$ halmazon. Innen folytonosan kiterjesztjük a $[0,1]$-re az $s(x)$ definícióját. Így kapunk egy $s(x)$ függvényt, amely konstans az összes kidobott nyílt intervallumon.

Ennek a a függvénynek a deriváltja létezik és egyenlő nullával a $[0,1]$ intervallum minden olyan pontban, amely nem tartozik a triadikus Cantor halmazba, vagyis Lebesgue-szerint nulla mértékű halmaz kivételével minden pontban. Ezt a továbbiakban úgy fejezzük ki, hogy az $s'(x) = 0$ **Lebesgue majdnem mindenütt**.

8. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy egy állítás teljesül Lebesgue majdnem minden $x \in (0,1)$-re, ha azon kivételes x-ek halmaza, ahol ez az állítás nem teljesül egy Lebesgue szerint nulla mértékű halmaz. Ezt úgy rövidítjük, hogy azt írjuk, hogy az állítás igaz Leb. m.m. x-re.

Például a fenti esetben $s'(x) = 0$ Leb. m.m. x-re.

A legtermészetesebb integrál fogalom a Lebesgue integrál. Ez tehát a Riemann integrál egy kiterjesztése, vagyis ha egy függvénynek van Rimeann integrálja, akkor Lebesgue integrálja is lesz és ez a kettő megegyezik. Éppen csak az történik, hogy a sokkal több függvénynek lesz Lebesgue integrálja. Az sajnos nem igaz, hogy Lebesgue integrálható függvények egy sorozatára (1.5) mindig teljesülne, de nem túl szigorú feltételek teljesülése estén (1.5) teljesülni fog.



1.3. ábra. A lépcsős függvény $\varphi(x)$ és az integrálja a satírozott terület előjelesen.

1.2. Lebesgue integrál

1.2.1. Lebesgue integrál definíciója

Az egyszerűség kedvéért mindig feltesszük, hogy a vizsgált függvényeink értelmezési tartománya a $[0, 1]$ intervallum.

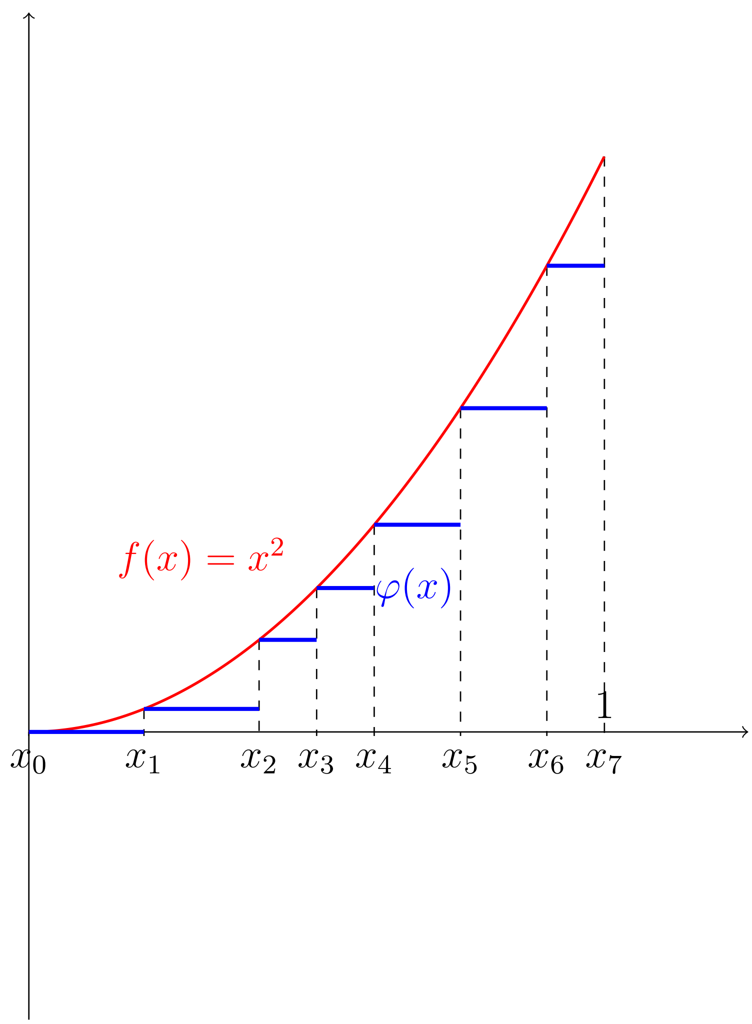
A továbbiakban az úgynevezett lépcsős függvényeknek nagy jelentősége lesz. Ezeknek definiálásához szükség van az úgynevezett kerakterisztikus vagy indikátor függvények fogalmára: Egy $H \subset [0, 1]$ karakterisztikus vagy indikátor függvénye:

$$\mathbb{1}_H(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in H, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

9. DEFINÍCIÓ: Legyen $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$ és $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Ekkor a

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \mathbb{1}_{[x_{i-1}, x_i]}(x) \tag{1.6}$$?ph75?

alakú függvényeket **lépcsős függvényeknek** hívjuk. (Lásd az 1.3 és az 1.4 ábrák.)



1.4. ábra. Az $f(x) = x^2$ függvény közelítése egy lépcsős függvénnyel.

10. DEFINÍCIÓ: 1. Egy $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \mathbb{1}_{[x_{i-1},x_i]}(x)$ integrálját mint a függvény alatti előjeles területet értelmezzük, vagyis

$$\int_0^1 \varphi(x)dx := \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot |x_i - x_{i-1}|\,. \tag{1.7}$$?ph78?

Minden folytonos függvény jól approximálható lépcsős függvények monoton növő sorozatával amint azt az 1.4. ábra mutatja. A lépcsős függvények monoton növő sorozatainak segítségével definiáljuk a Lebesgue integrált az alábbiakban. Először tekintjük a lépcsős függvények monoton növő sorozatai közül azon sorozatokat akiknek az integráljai egy közös korlát alatt maradnak:

11. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy a $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ lépcsős függvények egy monoton növő sorozata ha

$$\forall x \in [0,1],\ \forall k \geq 1, \quad \varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x). \tag{1.8}$$?ph79?

(Maguk a $\varphi_k(x)$ függvények nem szükséges, hogy monoton növő vagy monoton csökkenő függvénye legyenek.)

Legyen

$$\mathcal{M} := \{\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} : \text{ lépcsős függvények monoton növő sorozata}\} \tag{1.9}$$?p80?

és az $L > 0$ számokra definiáljuk:

$$\mathcal{M}_L := \left\{ \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{M} : \forall k, \quad \left| \int_0^1 \varphi_k(x)dx \right| < L. \right\} \tag{1.10}$$?ph81?

Igazolható (l. [5]), hogy

12. LEMMA: (B) Legyen $L > 0$ tetszőleges. Ekkor, minden $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{M}_L$ esetén létezik egy $f(x)$ függvény, amelyre

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x) \text{ Leb. m.m. } x\text{-re.}$$

és

$$f(x) < \infty \text{ Leb. m.m. } x\text{-re.}$$

Továbbá, ha $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{M}_L$ és

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k(x) = f(x) \text{ Leb. m.m. } x\text{-re},$$

akkor

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \varphi_k(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_0^1 \psi_k(x)dx. \qquad (1.11)$$?ph82?

Így tehát definiálhatjuk az $\mathcal{M}_L$ családba tartozó függvény sorozatok f határértékeire az integrált:

13. DEFINÍCIÓ: 1. Legyen $\mathcal{H}$ azon f függvények halmaza, amelyek valamely L-re előállnak $\mathcal{M}_L$-beli lépcsős függvények sorozatának határértékeképpen.

2. Legyen $f \in \mathcal{H}$. Ekkor definiáljuk

$$\int_0^1 f(x)dx := \lim_{k\to\infty} \int_0^1 \varphi_k(x)dx. \qquad (1.12)$$?ph84?

3. Legyen

$$L^1 := \{f : \exists g_1(x), g_2(x) \in \mathcal{H},\ f(x) = g_1(x) - g_2(x)\} \qquad (1.13)$$?ph85?

Ekkor definiáljuk az L^1-beli függvények Lebesgue integrálját mint:

$$\int_0^1 f(x)dx := \int_0^1 g_1(x)dx - \int_0^1 g_2(x)dx. \qquad (1.14)$$?ph86?

4. Az L^1-beli függvényeket a $[0,1]$-en **Lebesgue integrálható függvényeknek** hívjuk.

5. Ha valamely $E \subset [0,1]$ halmazra: $f(x) = \mathbb{1}_E(x)$, akkor az E halmaz Lebesgue mértéke:

$$\mathcal{L}\text{eb}(E) := \int_0^1 \mathbb{1}_E(x)dx. \qquad (1.15)$$?ph87?

6. A fenti definíciók szó szerint megismételhetőek tetszőleges $d \geq 1$-re, $\mathbb{R}^d$-ben, csak az intervallumok helyett a megfelelő dimenziós téglatesteket kell írni.

1.2.2. Lebesgue integrál néhány tulajdonsága

Az integrálás és a határátmenet sorrendjének megcserélése

Az integrálás és a határátmenet sorrendje nem mindig cserélhető meg semmilyen integrálra sem. Azonban igazak az alábbi tételek, melyek bizonyításai megtalálhatóak a [3, 5.5.5 fejezetben].

14. TÉTEL: (Lebesgue Tétele) Tegyük fel hogy az $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, L^1-beli függvények sorozatára teljesül, hogy

1. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ Leb. m.m. x-re és
2. létezik olyan $g(x) \in L^1$ függvény, amelyre:

$$\forall n,\ |f_n(x)| \leq g(x),$$

akkor

1. $f \in L^1$ és
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx.$

15. TÉTEL: (Beppo Levi Tétele) Tegyük fel hogy az $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, L^1-beli függvények sorozatára teljesül, hogy

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \cdots \tag{1.16}$$?ph91?

és létezik egy L, melyre

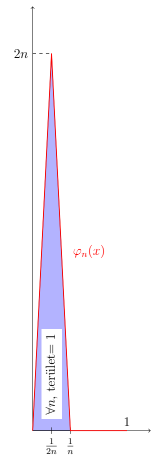
$$\forall n: \quad \int\limits_0^1 f_n(x)dx \leq L. \tag{1.17}$$?ph92?

Ekkor létezik a Lebesgue majdnem minden x-re véges határérték függvény

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx. \tag{1.18}$$?ph93?



1.5. ábra. $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$ de $\forall n,\ \int\limits_0^1 \varphi_n(x)dx = 1$

16. TÉTEL: (Fatou Tétele) Tegyük fel, hogy az $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ L^1-beli függvények sorozatára teljesül, hogy függvények sorozatára teljesül, hogy

1. $\forall n, \forall x$-re $f_n(x) \geq 0$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, Leb. m.m. x-re.
3. $\exists L > 0$, hogy $\forall n$-re:
$$\int\limits_0^1 f_n(x)dx < L.$$
Ekkor $f \in L^1$ és
$$\int\limits_0^1 f(x)dx \leq K.$$

17. FELADAT: Annak megértése céljából, hogy a Fatau tételben miért nem feltétlenül teljesül az (1.18) gondoljunk arra a függvény sorozatra, melyet az 1.5. ábra mutat.

Abszolút folytonos függvények, Newton Leibniz-tétel

18. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy az $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény abszolút folytonos, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \quad \text{if } \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) < \delta \text{ akkor } \sum_{k=1}^{\infty} (F(\beta_k) - F(\alpha_k)) < \varepsilon.$$

Belátható a következő [3, 354-355.o.]

19. TÉTEL: (a) Az $F'(x)$ létezik Lebesgue majdnem minden $x \in [a, b]$-re

(b) Az $F'(x)$ függvény Lebesgue integrálható és

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Vegyük észre, hogy az nem baj, hogy $F'(x)$ esetleg nem létezik egy Lebesgue nulla mértékű halmazon, mert a Lebesgue integrál szempontjából teljesen mindegy, hogy a függvény mit csinál egy Lebesgue nulla mértékű halmazon.

1.3. Banach Terek, Hilbert terek

1.3.1. Lineáris Terek

A lineáris terek fogalmát a sík vagy a tér vektorainak az összeadás és a számmal való szorzással kapcsolatos tulajdonságaink extrapolálásából kapjuk.

20. DEFINÍCIÓ: (Lineáris tér) Legyen V halmaz melynek elemei között értelmezve van az összeadás és a számmal való szorzás és ezek ugyanolyan tulajdonsággal bírnak mint a sík vektorai esetében. Vagyis

1. Minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ esetén:
   (a) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$,
   (b) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$,
   (c) Létezik $\mathbf{0} \in V$ úgy hogy $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$
   (d) Minden $\mathbf{x} \in V$-re létezik egy $-\mathbf{x}$-el jelölt elem, melyre: $\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2. Minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{x} \in V$-re létezik egy $\alpha \cdot \mathbf{x} \in V$, melyre:
   (a) $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x}) = (\alpha\beta) \cdot \mathbf{x}$,
   (b) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$,
   (c) $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}$,
   (d) $\alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}$.

Ekkor azt mondjuk, hogy a V egy vektor tér vagy lineáris tér.

21. PÉLDA: $\mathbb{R}^d$**:** A valós számokból álló rendezett szám d-esek. Vagyis $\mathbb{R}^d := \{(x_1, \ldots, x_d) : x_i \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^\infty$ A valós számokból álló végtelen sorozatok tere: $\mathbb{R}^\infty := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) : x_i \in \mathbb{R}\}$

ℓ^2**:** Azon valós számsorozatok, melyek elemeinek négyzetének összege véges: $\ell^2 := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\right\}$.

ℓ^1**:** Azon valós számsorozatok, melyek elemei abszolút értékeinek összege véges: $\ell^1 := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\right\}$.

ℓ^∞**:** A korlátos valós számsorozatok halmaza.

$$\ell^\infty := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty : \exists K, \forall i : \ |x_i| < K\}$$

c_0**:** A nullához tartó valós számsorozatok halmaza: $c_0 := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\}$.

Itt az összeadás a sorozatok komponensenkénti összeadása. Vagyis

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots)$$

és egy $\alpha\mathbb{R}$ számmal való szorzása az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$-nek:

$$\alpha \cdot \mathbf{x} := (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots).$$

22. PÉLDA: Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, egy korlátos zárt halmaz $\mathbb{R}^d$-ben, amely tartalmaz d-dimenziós gömböt. Az ilyen halmazokat tartománynak hívjuk.

$L^2(\Omega)$: Azon valós értékű függvények az Ω-án, melyek négyzete Lebesgue integrálható: $L^2(\Omega) := \left\{ f : \int\limits_{\Omega} f^2 dx < \infty \right\}$.

$L^1(\Omega)$: Azon valós értékű függvények az Ω-án, melyek Lebesgue integrálhatóak $L^2(\Omega) := \left\{ f : \int\limits_{\Omega} |f| dx < \infty \right\}$.

$L^\infty(\Omega)$: Azon valós értékű függvények az Ω-án, melyek (egy nulla mértékű halmaztól eltekintve) korlátosak:

$$L^\infty(\Omega) := \{ f : \exists K,\ |f(x)| < K \text{ Lebesgue majdnem minden } x\text{-re} \} .$$

$C(\Omega)$: Az Ω halmazon értelmezett valós értékű, folytonos függvények halmaza.

$C^1(\Omega)$: Az Ω halmazon értelmezett valós értékű, folytonos deriválttal rendelkező függvények halmaza.

Ezen példákban a függvények a vektorok. A vektorok összeadásának a függvények pontonkénti összeadása felel meg.

23. DEFINÍCIÓ: Egy $F : V \to \mathbb{R}$ leképezést lineáris funkcionálnak hívunk, ha minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén:

$$F(\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha \cdot F(\mathbf{x}) + \beta \cdot F(\mathbf{y}). \tag{1.19}$$?ph2?

24. PÉLDA: Legyen $V = \mathbb{R}^d$. Rögzítünk egy tetszőleges $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d$ vektort. Legyen

$$F(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}. \tag{1.20}$$?ph1?

Ekkor nyilván:

$$F(\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}) = (\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} = \alpha \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} + \beta \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{n} = \alpha \cdot F(\mathbf{x}) + \beta \cdot F(\mathbf{y}).$$

Tehát az F egy lineáris funkcionál. Látni fogjuk, hogy az úgy nevezett Hilbert tereken minden lineáris funkcionál (1.20) alakú.

25. PÉLDA: Legyen $V = L^1([0,1])$. Ekkor az

$$G(f) := \int\limits_0^1 f(x) dx \tag{1.21}$$?ph3?

egy lineáris funkcionál.

26. PÉLDA: A c_0-tér (vagyis a nullához tartó sorozatok terének) korlátos lineáris funkcionáljai azonosíthatóak az ℓ^1 tér elemeivel. Vagyis ha $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots\} \in \ell^1$ (tehát $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_i| < \infty$), akkor $\mathbf{x}$ meghatároz egy korlátos lineáris funkcionált a c_0-on a következőképpen:

$$\mathbf{x}(\mathbf{y}) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, q\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots) \in c_0.$$

27. PÉLDA: Az ℓ^1-tér korlátos lineáris funkcionáljai azonosíthatóak az ℓ^∞-térrel. Vagyis ha $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^\infty$ akkor

$$\mathbf{x}(\mathbf{y}) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \ \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots) \in \ell^1$$

egy lineáris funkcionál ℓ^1-en.

28. PÉLDA: Legyen $p > 1$. Ekkor Az ℓ^p-tér korlátos lineáris funkcionáljai azonosíthatóak az ℓ^q-térrel, ho q a p konjugáltja, vagyis

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

29. PÉLDA: Legyen $V = L^2([0,1])$ és rögzítsünk egy tetszőleges $g \in V$-t. Vagyis $g(x)$ egy valós értékű függvény, melyre $\int\limits_0^1 g^2(x)dx < \infty$. Ekkor definiáljuk a $G : V \to \mathbb{R}$ leképezést:

$$G(f) := \int_0^1 g(x) \cdot f(x)dx. \tag{1.22}$$?ph4?

30. DEFINÍCIÓ: 1.3.2. Banach terek

Azt mondjuk $\|\cdot\|$ egy norma a V vektor téren, ha

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, továbbá, ha $\|\mathbf{x}\| = 0$, akkor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
2. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$,

3. $\|\alpha \cdot \mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$.

31. PÉLDA: 1. $V = \mathbb{R}^d$ esetén: $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}$.

2. $V = \ell^2$ esetén: $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$.

3. $V = \ell^1$ esetén: $\|\mathbf{x}\|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|}$.

4. $V = L^2([0,1])$ esetén: $\|f\|_2 := \int_0^1 f^2(x)dx$.

5. $V = L^2([0,1])$ esetén: $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|dx$.

6. $V = L^\infty([0,1])$ esetén: $\|f\|_\infty := \inf\{K : |f(x)| \leq K$ Leb. m.m. x-re $\}$.

7. $V = C([a,b])$ esetén:

   (a) $\|f\|_{\sup} = \max\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$. Ezt a normált tere $C_{\sup}([a,b])$-nek hívjuk

   (b) $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx$. Ezt a normált teret $C_1([a,b])$-nek hívjuk.

   (c) $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f^2(x)|dx}$. Ezt a normált teret $C_2([a,b])$-nek hívjuk.

8. $V = C^1([0,1])$ esetén:

$$\|f\|_{\sup} = \max\{|f(x)| : x \in [0,1]\} + \max\{|f'(x)| : x \in [0,1]\}$$

32. DEFINÍCIÓ: 1. Egy vektorteret a normával együtt **normált tér**nek hívunk.

2. Azt mondjuk, hogy egy normált tér **Banach tér**, ha minden Cauchy sorozatnak van limesze. Vagyis, tegyük fel, hogy $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ egy Cauchy sorozat a V-ben. (Ez azt jelenti, hogy $\forall\varepsilon > 0$-ra $\exists N$, hogy ha $n, m > N$, akkor $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon$). Ekkor létezik olyan $\mathbf{x} \in V$, hogy $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$, vagyis $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| = \mathbf{0}$.

A 31. Példában szereplő összes normált tér Banach tér.

1.3.3. L^p terek

Legyen $1 < p < \infty$. Definiáljuk a

$$L^p([a,b]) := \left\{ f : \int_a^b f^p(x)dx < \infty \right\}. \tag{1.23}$$?ph10?

Egy $f \in L^p([a,b])$ függvény L^p normája:

$$\|f\|_p := \sqrt[1/p]{\int_a^b f^p(x)dx} \text{ és } \|f\|_\infty := \min\{K : |f(x)| \leq K \text{ Leb. m.m. } x\text{-re }\}.$$

Megjegyezzük, hogy $0 < p < 1$-re ugyanezen definíciók értelmesek, de mi nem használjuk őket. Számunkra az L^p terek közül, az L^2 tér lesz a legfontosabb, mert mint látni fogjuk ez sok szempontból közel úgy viselkedik mint a mi szokványos véges dimenziós $\mathbb{R}^d$ Euklideszi terünk. Azt mondjuk, hogy a $p, q > 1$ számok egymás konjugáltjai, ha

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.24}$$?ph11?

z$L^p(\Omega)$ terek legfontosabb tulajdonságai:

33. TÉTEL: Tegyük fel, hogy a p és a q számok egymás konjugáltjai. ekkor:

1. Ha $f \in L^p(\Omega)$ és $g \in L^q(\Omega)$, akkor

   $$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \tag{1.25}$$?ph12?

   Ebből a legfontosabb az a speciális eset, amikor $p = q = 2$: Ekkor tehát:

   $$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \sqrt{\int_\Omega f^2(x)dx} \sqrt{\int_\Omega g^2(x)dx}. \tag{1.26}$$?ph13?

   (a) Ha Ω korlátos halmaz, akkor $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$,

   (b) Ha f korlátos, akkor $L^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.

2. $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|f\|_p$

3. Minden $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ függvényhez és minden $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan korlátos és zárt $K \subset \mathbb{R}^d$ halmaz, és olyan az $\mathbb{R}^d$-n folytonos φ függvény, melyre
   (a) $\|f(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})\|_p < \varepsilon$,
   (b) $\varphi(\mathbf{x}) = 0$, ha $\mathbf{x} \notin K$.

A

1.3.4. Hilbert terek

34. DEFINÍCIÓ: Skaláris szorzatnak nevezünk a $V \times V$ vektort téren egy (x, y) valós értékű függvényt, ha

1. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$
2. $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$.
3. $(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.
4. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$, továbbá, ha $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, akkor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Ha egy vektor téren megadunk egy skaláris szorzatot, akkor ezzel egy **Skaláris-szorzat teret** értelmeztünk.

Ezzel a skaláris szorzattal definiálhatunk egy normát a V-n:

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}. \tag{1.27}$$?ph6?

35. PÉLDA: 1. $\mathbb{R}^d$-ben: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots x_d)$ és $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots y_d)$-re: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{i=1}^{d} x_i y_i$.

2. ℓ^2-téren: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ és $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$-ra: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.

3. $L^2([a, b])$-n $(f, g) = \int\limits_a^b f(x) \cdot g(x) dx$. Itt tehát $\|f\|_2 = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x) dx}$.

4. $C_2([a,b])$-tér az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvények tere az $\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)dx$ skaláris szorzattal. Itt $\|f\|_2 = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx}$.

36. PÉLDA: Tekintsük a $[0,1]$-en folytonosan differenciálható függvények $\mathcal{C}^1[0,1]$ terét. Ezen a téren értelmezhető az

$$(f,g) := \int_0^1 f'(x)\cdot g'(x)dx.$$

Ez teljesíti a 34. Definíció első három pontját, sőt a 4. pont első részének is eleget tesz, de a 4. pont második részén megbukik mert ha $f \equiv 1$, akkor $(f,f) = 0$ de $f \neq 0$, tehát ez nem skalár szorzat a $\mathcal{C}^1[0,1]$-en, azonban a

$$\{f \in \mathcal{C}^1[0,1] : f(0) = 0\}$$

téren már skalár szorzat.

37. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy egy $b : V \times V \to \mathbb{R}$ leképezés **bilineáris**, ha minden $x, y, z \in V$-re:

(a) $b(x+y,z) = b(x,z) + b(y,z)$,

(b) $b(x,y+z) = b(x,y) + b(x,z)$,

(c) $b(\alpha\cdot x,y) = \alpha\cdot b(x,y)$,

(d) $b(x,\alpha y) = \alpha\cdot b(x,y)$.

Egy bilineáris leképezés **szimmetrikus**, ha minden $x, y \in V$-re:

(e) $b(x,y) = b(y,x)$.

Megjegyezzük, hogy egy szimmetrikus bilineáris forma akkor lesz skaláris szorzat, ha még teljesíti az alábbi (f) és (g) feltételeket:

(f) $(v,v) \geq 0$ minden $v \in V$ és

(g) $(v,v) = 0$ akkor és csak akkor, ha $v = 0$.

Abban az esetben ha (g) feltétel nem teljesül, de az (a)-(f) feltételek mind teljesülnek, akkor a $b(\cdot,\cdot)$ "**majdnem skalár szorzat**".

38. DEFINÍCIÓ: asd

39. TÉTEL: (Cauchy-Bunyakovszkij-Schwartz egyenlőtlenség)

$$|(\mathbf{x},\mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|. \tag{1.28}$$?ph7?

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) &= (\alpha\mathbf{x}+\mathbf{y},\alpha\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha^2(\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{y},\mathbf{y}) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2\alpha^2 + 2(\mathbf{x},\mathbf{y})\alpha + \|\mathbf{y}\|^2\end{aligned}$$

Tekintsük $\mathbf{x}$-et és $\mathbf{y}$-t rögzítettnek. Ekkor ez egy másodfokú polinom aminek diszkriminánsa nem lehet nagyobb mint nulla mivel a $\varphi(\alpha)$ függvény nem negatív (bármely vektor önmagával vett skaláris szorzata nem negatív.) ■

40. MEGJEGYZÉS: Ebben a bizonyításban nem használtuk fel a (37) definíció (g) pontját, tehát a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwartz egyenlőtlenség "majdnem skalár szorzatokra" is igaz.

Egy Belső-szorzat tér bármely két $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$ vektorának szöge értelmezhető:

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}. \tag{1.29}$$?ph8?

Ennek megfelelően mondhatjuk, hogy az $\mathbf{x},\mathbf{y}$ vektorok **merőlegesek** egymásról, ha

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0.$$

41. DEFINÍCIÓ: Vektorok egy véges vagy végtelen sorozatát $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}$ ortogonálisnak mondjuk, ha

$$\forall i \neq j\text{-re } (\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j) = 0.$$

Ha az $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}$ ortogonális rendszer bármely két különböző eleme merőleges, vagyis $(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j) = 0$ teljesül minden $i \neq j$ esetén, akkor azt mondjuk, hogy az $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}$ rendszer **ortonormált**.

42. PÉLDA: A következő bázisok ortonormáltak:

1. $\mathbb{R}^d$-ben a természetes bázis:

$$\mathbf{e}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \mathbf{e}_d := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. ℓ^2-ben szintén a koordináta egység vektorok bázisa:

$$\mathbf{e}_1 := (1, 0, \dots), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots), \dots$$

3. $L^2([a, b])$-ben és $C_2([a, b])$-ben is a következő (végtelen sok triginometrikus függvényből) álló rendszer:

$$\frac{1}{\sqrt{b-a}}, \quad \left\{ \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{b-a} t\right) \right\}_{n=1}^{\infty}, \left\{ \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{b-a} t\right) \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

43. DEFINÍCIÓ: (Hilbert tér)

- Egy skaláris-szorzat teret Hilbert térnek hívunk, ha a skaláris szorzat által generált normára, minden Cauchy sorozat konvergens.

- Azt mondjuk, hogy a $V \subset H$ egy altere H-nak, ha

  – $x, y \in V \Rightarrow x + y \in V$ és $x \in V, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot x \in V$
  – V zárt a H-ban, vagyis ha $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$ és $\|x_n - x\|_H \to 0$, akkor $x \in V$.

44. PÉLDA: 1. ℓ^2-tér és a L^2-tér Hilbert terek

2. $C_2([a, b])$-tér nem Hilbert tér.

A Hilbert terek tehát olyan Banach terek, amelyekben a normát egy skaláris szorzat határozza meg az (1.27) formula segítségével és minden Cauchy sorozat határértéke a téren belül van. Az L^p-terek közül csakis az L^2 tér a Hilbert tér.

45. DEFINÍCIÓ: Legyen H egy Hilbert tér és legyen V ennek egy altere. Legyen $a(\cdot, \cdot)$ bilineáris leképezés a H-n.

(a) Azt mondjuk, hogy az $a(\cdot,\cdot)$ **folytonos vagy korlátos** a H-n ha $\exists C > 0$, hogy

$$\boxed{|a(v,w)| \leq C \cdot \|v\|_H \cdot \|w\|_H, \; \forall v, w \in H} \tag{1.30}$$?ph106?

(b) Azt mondjuk, hogy az $a(\cdot,\cdot)$ **coercive** a V altéren, ha létezik $\alpha > 0$, hogy

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_H^2, \quad \forall v \in V. \tag{1.31}$$?ph107?

46. LEMMA: Legyen H egy Hilbert tér és legyen V a H-nak egy altere. Tegyük fel, hogy az $a(\cdot,\cdot)$ teljesíti a következőket:

(i) $a(\cdot,\cdot)$ bilineáris,

(ii) $a(\cdot,\cdot)$ szimmetrikus, vagyis $a(x,y) = a(y,x), \forall x, y \in H$,

(iii) $a(\cdot,\cdot)$ korlátos a H-n,

(iv) $a(\cdot,\cdot)$ coercive a V-n.

Ekkor $(V, a(\cdot,\cdot))$ maga is Hilbert tér, amelyen a norma

$$\|v\|_E := \sqrt{a(v,v)}. \tag{1.32}$$?ph105?

Vegyük észre, hogy ekkor a 37 definícióból az (a)-(fg) pontok teljesülnek legalábbis a V-n, tehát az $a(\cdot,\cdot)$ vagy egy skalár szorzat legalábbis a V-n.

Bizonyítás. Használva az (1.31) formulát kapjuk, hogy ha $v \in V$ és $a(v,v) = 0$, akkor $v = 0$, vagyis az $a(v,v)$ megszorítva a V-re, teljesíti a 37 definíció minden követelményét. Most belátjuk, hogy a V tér teljes (azaz minden Cauchy sorozat konvergens V-ben) az $a(\cdot,\cdot)$ skaláris szorzatból származó normára. Nevezetesen,

Legyen $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ egy Cauchy sorozat V-ben. Azaz $a(v_n - v_m, v_n - v_m) \to 0$, ha $n, m \to \infty$. Ekkor (1.31) miatt $\|v_n - v_m\|_H \to 0$ amint $n, m \to \infty$. Mivel a H Hilbert tér ezért létezik $v \in H$, hogy $\|v - v_n\|_H \to 0$. De mivel V zárt, kapjuk, hogy $v \in V$. Tehát a $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchy sorozatnak van limesze V-ben, vagyis a V-tér teljes a $a(\cdot,\cdot)$ skalár szorzatra. A Hilbert tér többi tulajdonságának teljesülése nyilvánvaló a definícióból. ■ A fenti bizonyításban azt használtuk, hogy a Coercive tulajdonság miatt ha egy V-beli sorozat Cauchy sorozat a $\|\cdot\|_E$ normában, akkor szintén Cauchy sorozat

H-beli $\|\cdot\|_H$ normára is. Fordítva, a korlátosság miatt, ha egy V-beli sorozat Cauchy sorozat a H-beli normára, akkor Cauchy sorozat a V-beli normára $\|\cdot\|_E$ is (l. (1.32)).

47. TÉTEL: (Riesz Reprezentációs tétel) Legyen H egy Hilbert tér, melynek normáját a $(\cdot,\cdot)$ skaláris szorzat adja meg és legyen $F : H \to \mathbb{R}$ egy lineáris funkcionál. Ekkor létezik egyetlen, olyan $u \in H$, hogy

$$\forall v \in H, \quad F(v) = (u, v),$$

vagyis az F értéke tetszőleges $v \in H$-ban meghatározható mint a $v \in H$-nak az u-val vett skaláris szorzata.

Bizonyítás. Legyen $M := \{v \in H : F(v) = 0\}$. Az M-beli vektorokra merőleges vektorok alteret alkotnak, melyet $M^\perp$-el jelölünk. Vagyis:

$$M^\perp = \{w : \forall v \in M \text{ -re: } (w, v) = 0\}.$$

Legyen $z \neq 0$ egy tetszőleges eleme $M^\perp$-nek Ha $v \in H$ és $\beta = F(v)/F(z)$, akkor

$$F(v - \beta z) = F(v) - \beta F(z) = 0,$$

vagyis $v - \beta z \in M$. Ezért $v - \beta z$ a v-nek az M altérre vett merőleges vetülete jelben

$$P_M v = v - \beta z \text{ és } P_{M^\perp} v = \beta z.$$

Legyen

$$\boxed{u := \frac{F(z)}{\|z\|_H^2} \cdot z \in M^\perp.} \tag{1.33}$$?ph35?

Ekkor

$$\begin{aligned}
(u, v) &= (u, (v - \beta z) + \beta z) \\
&= \underbrace{(u, v - \beta z)}_{0} + (u, \beta z) \\
&= (u, \beta z) \\
&= \beta \frac{F(z)}{\|z\|_H^2} \cdot \|z\|_H^2 \\
&= \beta F(z) \\
&= F(v).
\end{aligned}$$

■

1.4. Sobolev terek

1.4.1. Általánosított deriváltak

48. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy az $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ egy **tartomány**, ha Ω vagy egy nem üres nyitott halmaz vagy egy olyan zárt halmaz, aminek a belseje nem üres. Az Ω lehet nem-korlátos halmaz.

49. DEFINÍCIÓ: 1.

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \left\{ f : f \in L^1(K),\ \forall K \subset \Omega,\ \text{és } K \text{ korlátos zárt halmaz} \right\} \tag{1.34}$$
?ph14?

2. Legyen Ω egy kompakt (korlátos és zárt) halmaz $\mathbb{R}^d$-ben. Ekkor $D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega) =$ jelöli azon végtelen sokszor differenciálható függvények halmazát, amelyek az Ω-n kívül csak a 0 értéket veszik fel.

50. PÉLDA:

$$\phi(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & \text{ha } |x| < 1; \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{1.35}$$
?ph16?

Ekkor $\phi \in D([-1,1])$. Ugyanis, minden $k \geq 1$-re:

$$\phi^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)\phi(x)}{(1-|x|)^k} = P_k(x)\mathrm{e}^{-t}t^k,$$

ahol $t = \frac{1}{1-|x|^2}$. Így

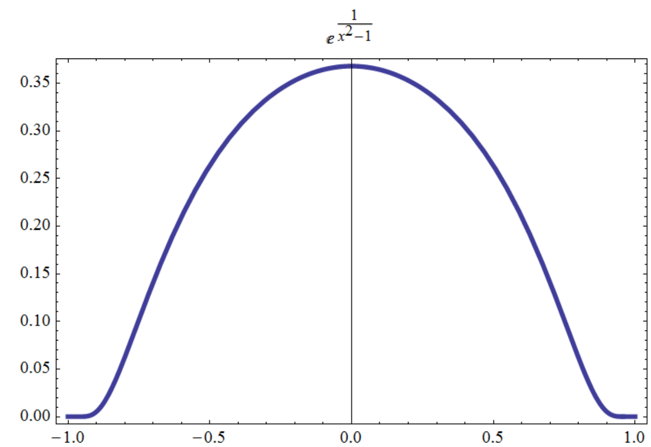
$$\frac{\phi^{(k)}(x)}{(1-|x|^2)^\ell} = P_k(x) \cdot t^{k+\ell}\mathrm{e}^{-t} \to 0.$$

51. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy a $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ függvény az $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, k-adik gyenge deriváltja $g = D^k_w f$, ha:

$$\forall \varphi \in D(H) : \int\limits_H g(x)\varphi(x)dx = (-1)^k \int\limits_H f(x)\varphi^{(k)}(x)dx.$$

```
In[14]:= Plot[Exp[1 / (x^2 - 1)], {x, -1, 1}, Frame -> True,
          AxesLabel -> {"x", Exp[1 / (x^2 - 1)]},
          PlotStyle -> Thickness[0.008]]
```

Out[14]=



1.6. ábra. Mathematica parancs az $\mathrm{e}^{1/(x^2-1)}$ függvény nyomtatására

52. PÉLDA: Legyen $d = 1$ és $H = [0,1]$. Ekkor az $f(x) = 1 - |x|$ függvény gyenge deriváltja

$$D_w^1 f(x) = g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } -1 < x < 0; \\ -1, & \text{ha } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Ez azért van így mert:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)\varphi'(x)dx &= \int_{-1}^{0} f(x)\varphi'(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)\varphi'(x)dx \\
&= \int_{-1}^{0} (+1)\varphi(x)dx + f\varphi|_{-1}^{0} - \int_{0}^{1} (-1)\varphi(x)dx + f\varphi|_{0}^{1} \\
&= \int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)dx + (f\varphi)(0-) - (f\varphi)(0+) \\
&= \int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)dx,
\end{aligned}$$

Mivel $f(x)$ folytonos az $x = 0$-ban.

1.4.2. Sobolev terek definiciója és tulajdonságai

Ebben a fejezetben definiáljuk a Sobolev tereket és felsoroljuk legfontosabb tulajdonságaikat. Azt a lényeges egyszerűsítést teszük, hogy mindent a számegyenesen fogalmazunk meg és bizonyításokat itt nem adunk. Ugyanezt magasabb dimenzióban (ami az alkalmazások szempontjából fontosabb, de első olvasásra komplikáltabb), bizonyításokkal megtalálhatjuk a [2, 1.3 fejezetben].

53. DEFINÍCIÓ: Legyen $k \geq 0$ és $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Tegyük fel, hogy $D^k_w f$ létezik. Az f függvény **Sobolev normája** $1 \leq p < \infty$ esetén:

$$\|f\|_{W^k_p(\Omega)} := \left(\|f\|^p_p + \|D^1_w f\|^p_p + \cdots + \|D^k_w f\|^p_p\right)^{1/p}. \tag{1.36}$$?ph19?

Ha $p = \infty$, akkor a Sobolev norma:

$$\|f\|_{W^k_\infty(\Omega)} := \max_{\ell \leq k} \|D^\ell_w\|_\infty. \tag{1.37}$$?ph20?

Mindkét esetben a Sobolev-tér:

$$W^k_p := \left\{ f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \|f\|_{W^k_p(\Omega)} < \infty \right\}. \tag{1.38}$$?ph21?

1.4.3. Sobolev terek tulajdonságai

Ez az 1.4.3 fejezet nem fontos egyáltalán (az 1.4.4. fejezetig). Csak érdekeségnek tekintsék. Az átlag olvasó kihagyhatja.

Néhány speciális esetben a Sobolev terek más ismertebb terekkel azonosak. Például

54. PÉLDA: 1. A Lipschitz norma:

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}}(\Omega) := \|f\|_\infty + \sup\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} : x, y \in \Omega;\ x \neq y \right\},$$

és a Lipschitz függvények tere:

$$\mathrm{Lip}(\Omega) := \{ f \in L^\infty : \|f\|_{\mathrm{Lip}}(\Omega) < \infty \}.$$

Ekkor $\mathrm{Lip}(\Omega) \subset W^1_\infty$. abban a speciális esetben, amikor Ω egy intervallum (magasabb dimenzióban a feltétel az, hogy konvex) teljesül, hogy $\mathrm{Lip}(\Omega) = W^1_\infty$. Továbbá a normák hányadosa két pozitív konstans között van.

2. Ha Ω egy intervallum, akkor $W_1^1(\Omega)$ az Ω intervallumon vett abszolút folytonos függvények terével azonos.

55. TÉTEL: 1. A W_p^k Sobolev tér egy Banach tér.

2. Ha Ω egy nyílt halmaz, akkor a $C^\infty \cap W_p^k(\Omega)$ halmaz sűrű a $W_p^k(\Omega)$-ban.

3. Ha $k > 1$, akkor

$$W_\infty^k(\Omega) = \left\{ f \in C^{k-1}(\Omega) : f^i \in \mathrm{Lip}(\Omega),\ \forall i < k. \right\}$$

A következő tétel mutatja az összefüggéseket különböző Sobolev terek között:

56. TÉTEL: 1. Legyen $k \le m$ és $1 \le p \le \infty$. Ekkor $W_p^m(\Omega) \subset W_p^k(\Omega)$.

2. Legyen Ω egy korlátos tartomány és $1 \le p \le q \le \infty$. Ekkor $W_q^k(\Omega) \subset W_p^k(\Omega)$.

3. Legyen Ω egy intervallum és $p \ge 1$. Ekkor létezik egy C konstans, hogy minden $u \in W_k^p(\Omega)$ függvényre

$$\|u\|_\infty \le C \|u\|_{W_p^k(\Omega)}.$$

Ez $p = 1$-re alkalmazva azt mondja, hogy ha valamely $p \ge 1$-re mind az f-nek mind pedig az f gyenge deriváltjának a p-edik hatványa (Lebesgue) integrálható, akkor az f függvény folytonos.

4. Legyen Ω egy intervallum és $m < k$, továbbá $p \ge 1$. Ekkor létezik egy C konstans, hogy minden $u \in W_p^k(\Omega)$ függvényre:

$$\|u\|_{W_\infty^m(\Omega)} \le C \|u\|_{W_p^k(\Omega)}.$$

Továbbá, létezik olyan $v \in L^p$ függvény, amelyre:

   (a) $\|u - v\|_p = 0$,

   (b) $v \in C^m(\Omega)$, vagyis v egy m-szer folytonosan differenciálható függvény az Ω tartományon.

5. $W_1^1([a, b])$ az $[a, b]$ intervallumon abszolút folytonos függvények halmaza (l. Definíció 18).

1.4.4. Egy fontos speciális eset: $H^k(\Omega)$-tér

Ez a fejezet már fontos. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, $u, v \in W_2^k$, és

$$
\begin{aligned}
(u, v)_k &:= \sum_{i=0}^{k} (D_w^i u, D_w^i v)_{L^2(\Omega)} \\
&= \int_\Omega u(x) \cdot v(x) dx + \int D_w^1 u(x) \cdot D_w^1 v(x) dx + \\
&\quad + \int D_w^2 u(x) \cdot D_w^2 v(x) dx + \cdots + \int D_w^k u(x) \cdot D_w^k v(x) dx
\end{aligned}
\tag{1.39}
$$
?ph23?

57. DEFINÍCIÓ: A W_2^k teret a $(\cdot,\cdot)_k$ skaláris szorzattal $H^k(\Omega)$-val jelöljük.

A későbbiekben legtöbbször a

$$
H^1(0,1) = W_2^1, \quad (u, v)_1 = \int_0^1 u(x)v(x)dx + \int_0^1 D_w^1 u(x) \cdot D_w^1 v(x) dx
$$

teret tekintjük.

58. JELÖLÉS: Mostantól mindig csak gyenge deriváltakkal dolgozunk ezért az egyszerűbb jelölés kedvéért bevezetjük a következő jelölést:

$$
u' := D_w^1 \text{ és } u^{(k)} := D_w^k
$$

A következő példa nagyon fontos lesz a későbbiekben:

59. PÉLDA: Könnyű látni, hogy

$$
V := \left\{ v \in H^1(0,1) : v(0) = 0 \right\}
\tag{1.40}
$$
?ph26?

egy altér a $H^1(0,1)$-ben, vagyis V-beli függvények összege V-beli és V-beli függvény számszorosa is V-beli. Minden $v(x), w(x) \in H^1(0,1)$-re definiáljuk az:

$$
a(v, w) := \int_0^1 v'(x) w'(x) dx.
\tag{1.41}
$$
?ph27?

Ekkor $a(\cdot,\cdot)$ "majdnem" skaláris szorzat a $H^1(0,1)$-en. Nevezetesen, $a(\cdot,\cdot)$ teljesíti a 34. definíció első három feltételét és a negyedik feltétel első felét. A negyedik feltétel második fele azonban nem teljesül, mert ha $v(x) = w(x) \equiv 1$ minden $x \in (0,1)$-re, akkor $a(v,w) = 0$, pedig a v, w függvények nem az azonosan nulla függvények. Azonban, $a(\cdot,\cdot)$ teljesíti a következő két feltételt:

- $a(\cdot,\cdot)$ korlátos és
- $a(\cdot,\cdot)$ coercive.

Ezért a V vektortér a $a(\cdot,\cdot)$ skaláris szorzattal Hilbert teret alkot,

Így tehát azt kaptuk, hogy

60. LEMMA: Legyen

$$V := \left\{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\right\} \text{ és } a(v,w) := \int_0^1 v'(x)w'(x)dx.$$

Ekkor az V lineáris tér az $a(v,w)$ skaláris szorzattal Hilbert teret alkot.

Most megfogalmazzuk ennek a lemmának az általánosítását. Ehhez azonban be kell vezetni a bilineáris leképezés fogalmát:

A 60. Tétel általánosítása a következő:

61. TÉTEL: Legyen H egy Hilbert tér és $a(\cdot,\cdot)$ egy szimmetrikus bilineáris forma, amely folytonos a H-n és coercive a H-nak egy V alterén. Ekkor a $(V, a(\cdot,\cdot))$ egy Hilbert tér.

1.5. Egy triviális példa

62. PÉLDA: Tekintsük a következő (rendkívül triviális) két-pontos kerületi-érték feladatot: Adott egy folytonos $f(x)$ függvény, amely a $(0,1)$ intervallumon értelmezett. Határozzuk meg azt az $u(x)$ függvényt a $(0,1)$ intervallumon, amelyre:

$$u''(x) = -f(x) \text{ ha } x \in (0,1) \tag{1.42a}$$?ph48?

és

$$u(0) = 0, \qquad u'(1) = 0. \tag{1.42b}$$?ph49?

Vegyük észre, hogy ha $u(x)$ a megoldás és $\boxed{v(x) \in H^1(0,1), v(0) = 0}$, akkor parciális integrálásból adódóan:

$$
\begin{aligned}
(f,v) : &= \int_0^1 f(x)v(x)dx \\
&= \int_0^1 -u''(x)v(x)dx \\
&= \int_0^1 u'(x)v'(x)dx.
\end{aligned}
\tag{1.43}
$$
{?}

Továbbiakban legyen:

$$a(u,v) := \int_0^1 u'(x)v'(x)dx. \tag{1.44}$$
?ph61?

A fenti levezetésből tehát adódik, hogy ha u a 62. Példa megoldása akkor:

$$\boxed{(f,v) = a(u,v) \text{ teljesül minden } v \in H^1(0,1), v(0) = 0 \text{ függvényre.}} \tag{1.45}$$
?ph50?

Ennek a fordítottja is igaz. Nevezetesen:

63. TÉTEL: Ha u egy olyan függvény, amely a $[0,1]$ intervallumon kétszer folytonosan differenciálható, $u(0) = 0$ és az u függvényre teljesül (1.45) akkor az $u(x)$ függvény a 62. Példa megoldása.

Bizonyítás. Legyen $v \in H^1(0,1)$. Ekkor parciális integrálásból:

$$(f,v) = a(u,v) = u'(1)v(1) + \int_0^1 (-u(x))''v(x)dx, \tag{1.46}$$
?ph52?

hiszen $u'(0)v(0) = 0$, mivel $v(0) = 0$.

Az egyenlet piros színű részeinek felhasználásából, és abból, hogy definíció szerint $(f,v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx$, kapjuk, hogy

$$(f - (-u''), v) = 0 \text{ minden } v \in H^1(0,1),\ v(1) = 0 \text{ függvényre.} \tag{1.47}$$
?ph53?

Legyen

$$w(x) := f(x) + u''(x).$$

Ekkor $w(x)$ folytonos, mivel feltettük, hogy az f és az u'' folytonos függvények. Ha $W(x) \not\equiv 0$, akkor van olyan $[x_0, x_1] \subset [0, 1]$, amelyen $w(x)$ nem vált előjelet. Legyen

$$v(x) := \begin{cases} (x - x_0)^2 \cdot (x - x_1)^2, & \text{ha } x \in [x_0, x_1]; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor nyilván

$$(w, v) = \int_0^1 w(x)v(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} w(x)v(x)dx \neq 0. \qquad (1.48)$$?ph54?

Nevezetesen, a $w(x)v(x)$ szorzat függvény előjele az egész $[x_0, x_1]$ intervallumon ugyanaz, tehát a függvény integrálja nem lehet egyenlő nullával. Mivel a fenti $v(x) \in H^1(0, 1)$ ezért (1.48) ellentmondana (1.47) formulának. Ez az ellentmondás igazolja, hogy

$$w(x) \equiv 0,$$

vagyis

$$f(x) = -u''(x) \qquad (1.49)$$?ph55?

Helyettesítsük be ezt az (1.46) formulába. Kapjuk, hogy:

$$0 = (0, v) = (f + u'', v) = u'(1)v(1), \text{ minden } v \in H^1(0, 1) \text{ függvényre.}$$

Alkalmazzuk a fenti formula piros színű részeit a $v(x) = x$ függvényre. (Nyilván $v \in H^1(0, 1)$.) Ekkor kapjuk, hogy $u'(1) \cdot v(1) = 0$. Mivel $v(1) = 1$ ezért innen adódik, hogy

$$u'(1) = 0.$$

Mivel az $u(0) = 0$ feltevés szerint teljesül, ezért a tételt bebizonyítottuk. ■

Ezt úgy foglalhatjuk össze, hogy legyen

$$V := \left\{v \in H^1 : v(0) = 0\right\} \text{ és } a(v, w) := \int_0^1 v(x)w(x)dx, v, w \in V. \qquad (1.50)$$?ph56?

Beláttuk korábban (l. 60. tétel), hogy a $(V, a(v,w))$ Hilbert tér. Tekintsük ezen a következő lineáris funkcionált:

$$F(v) := (f, v).$$

Ekkor a Riesz-tételből létezik egyetlen olyan $u \in V$, amelyre $F(v) = a(u,v)$ teljesül minden $v \in V$. Vagyis

$$a(u,v) = (f,v) \quad v \in V.$$

Mint fent láttuk ez a Riesz tételből származó $u \in V$ lesz a 62. Példa megoldása. Ezt az u függvényt fogjuk a fent részletezett módon approximálni. Alább egy önmagában nagyon könnyű problémán mutatjuk be a módszer működését.

64. FELADAT: A határozzuk meg a következő probléma megoldásának néhány approximációját a fenti módszerrel!

$$u''(x) = -x(1-x) \text{ ha } x \in (0,1) \tag{1.51a}$$?ph58?

és

$$u(0) = 0, \qquad u'(1) = 0. \tag{1.51b}$$?ph59?

Megoldás: A feladat persze triviális és a megoldás

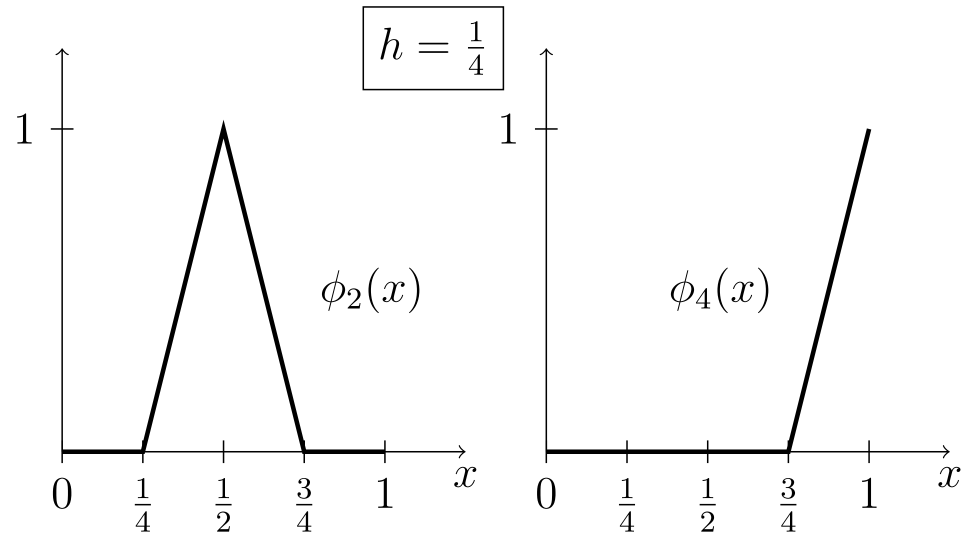
$$u(x) = \frac{1}{12}\left[x^4 - 2x^3 + 2x\right]. \tag{1.52}$$?ph60?

Legyen V_h azon szakaszonként lineáris függvények halmaza, melyek törés pontjai a következő halmazból kerülnek ki:

$$x_i := i \cdot h, \qquad i = 1, \ldots, (d-1).$$

Ekkor V_h egy bázisa $\{\phi_1, \ldots \phi_d\}$, ahol

$$\phi_i(x) := \begin{cases} \frac{1}{h}x + 1 - i, & \text{ha } x \in [x_{i-1}, x_i]; \\ -\frac{1}{h}x + 1 + i, & \text{ha } x \in [x_i, x_{i+1}]; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}, \quad \text{ha } 1 \le i < d,$$



1.7. ábra. A ϕ_2 és a ϕ_4 bázis elemek, $h = 1/4$ esetén.

továbbá

$$\phi_d(x) := \begin{cases} \frac{1}{h}x + 1 - d, & \text{ha } x \in [x_{d-1}, 1]; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Legyen most $h = \frac{1}{4}$. Ekkor $d = 4$ dimenziós V_h-tér a $\phi_1, \ldots, \phi_4$ függvények összes lineáris kombinációiból áll. A célunk, hogy meghatározzuk az (1.68) formulában az $(\alpha_1, \ldots, \alpha_4)$ együtthatókat az (1.76) egyenletrendszer megoldásával. Ehhez először meg kell határozni mind a 16 darab (i, j), $1 \le i, j \le 4$ párra az $a(\phi_i, \phi_j)$-t. Majd ki kell számolni minden $1 \le i \le 4$-re az (f, ϕ_i)-t.

Ekkor az (1.44) formulából

$$a(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 \phi_i'(x)\phi_j'(x)dx.$$

Számoljuk ki először is a

$$a(\phi_2, \phi_3) = \int_{1/2}^{3/4} (-4 \cdot 4)\, dx = \frac{1}{4} \cdot (-16) = -4.$$

Pontosan ugyanígy látható, hogy

$$a(\phi_i,\phi_j)=\begin{cases} 8, & \text{ha } i=j\neq 4;\\ 4, & \text{ha } i=j=4;\\ -4, & \text{ha } |i-j|=1;\\ 0, & \text{ha } |i-j|>1.\end{cases}$$

Vagyis az (1.76) egyenletrendszer baloldalán szereplő mátrix:

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 & 0\\ -4 & 8 & -4 & 0\\ 0 & -4 & 8 & -4\\ 0 & 0 & -4 & 8\end{bmatrix} \tag{1.53}$$?ph62?

Most kiszámoljuk az (f,ϕ_i), $i=1,\dots,4$ skaláris szorzatokat, hogy meghatározzuk az (1.76) egyenletrendszer jobb oldalát. Az (1.43) formulából, ha $1\leq i\leq 3$, akkor

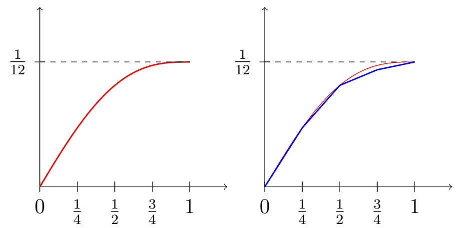
$$\begin{aligned}(f,\phi_i) &= \int\limits_{x_{i_1}}^{x_{i+1}} f(x)\phi_i(x)dx\\ &= \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \underbrace{(x(1-x))}_{f(x)}\cdot\underbrace{(4x+1-i)}_{\phi_i(x)}dx+\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\underbrace{(x(1-x))}_{f(x)}\cdot\underbrace{(-4x+1+i)}_{\phi_i(x)}dx\\ &= \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} -4x^3+(3+i)\,x^2+(1-i)xdx+\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} 4x^3-(5+i)\,x^2+(1+i)xdx\end{aligned}$$

hasonlóan

$$(f,\phi_4)=\int\limits_{x_3}^{1} -4x^3+(3+4)\,x^2+(1-4)xdx$$

Innen

$$\begin{bmatrix}(f,\phi_1)\\(f,\phi_2)\\(f,\phi_3)\\(f,\phi_4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{13}{768}\\ \frac{23}{768}\\ \frac{7}{256}\\ \frac{7}{768}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{7}{256}\\ \frac{23}{768}\\ \frac{13}{768}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{17}{384}\\ \frac{23}{384}\\ \frac{17}{384}\\ \frac{7}{768}\end{bmatrix} \tag{1.54}$$?ph64?



1.8. ábra. A baloldalon a megoldás a jobb oldalon a közelítése, , amikor 4 egyenlő részre osztjuk az intervallumot

```
> with(LinearAlgebra):

> M := <<8,-4,0,0>|<-4,8,-4,0>|<0,-4,8,-4>|<0,0,-4,4>|<17/384,23/384,17/384,7/768>

> LinearSolve(M);
```

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 & 0 & \frac{17}{384} \\ -4 & 8 & -4 & 0 & \frac{23}{384} \\ 0 & -4 & 8 & -4 & \frac{17}{384} \\ 0 & 0 & -4 & 4 & \frac{7}{768} \end{bmatrix}$$

Ezt megoldva:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{121}{3072} \\ \frac{13}{192} \\ \frac{83}{1024} \\ 1/12 \end{bmatrix}$$

Ha $d = 10$:

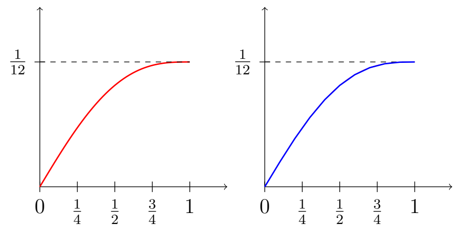
$$\begin{bmatrix} 20 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 20 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 20 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 20 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 20 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 20 & -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 20 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 20 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 20 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 10 \end{bmatrix} \text{ és } \begin{bmatrix} 53/6000 \\ 19/1200 \\ 1/48 \\ 143/6000 \\ 149/6000 \\ 143/6000 \\ 1/48 \\ 19/1200 \\ 53/6000 \\ 19/12000 \end{bmatrix}$$

Az α vector:

$$\begin{bmatrix} 0.01650833333333333264 \\ 0.03213333333333333124 \\ 0.04617499999999999730 \\ 0.05813333333333333077 \\ 0.06770833333333333010 \\ 0.07479999999999999638 \\ 0.07950833333333332920 \\ 0.08213333333333333082 \\ 0.08317499999999999851 \\ 0.08333333333333333149 \end{bmatrix}$$

1.6. A 64. Feladat általánosításai

Tekintsünk egy



1.9. ábra. A baloldalon a megoldás a jobb oldalon a közelítése, amikor 10 egyenlő részre osztjuk az intervallumot.

1.7. Szimmetrikus variációs probléma

Ebben a fejezetben mindig feltételezzük a következőket: Tételezzük fel, hogy:

$$\begin{cases} (1), & (H, (\cdot,\cdot)) \text{ egy Hilbert tér;} \\ (2), & V \text{ zárt altere } H\text{-nak;} \\ (3), & a(\cdot,\cdot) \text{ egy szimmetrikus bilineáris leképzés, amely korlátos a } H\text{-n és coercive a } V\text{-n.} \\ (4), & F \text{ egy korlátos lineáris funkcionál a } H\text{-n.} \end{cases} \tag{1.55}$$

?ph32?

Ekkor a **szimmetrikus variációs probléma** a következő:

65. PROBLÉMA: (Szimmetrikus variációs probléma) Adott egy folytonos lineáris funkcionál $F : V \to \mathbf{R}$. Találjunk egy $u \in V$-t, amelyre:

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V. \tag{1.56}$$

?ph34?

Megoldás: A 46. Lemmából adódóan $(V, a(\cdot,\cdot))$ önmagában is egy Hilbert tér. Alkalmazhatjuk a Riesz reprezentációs tételt. Eszerint létezik olyan $u \in V$, amelyre:

$$F(v) = a(u, v) \quad \forall v \in V.$$

A Riesz tétel bizonyításában az (1.33) formulából következik, hogyha $M = \{v \in V : F(v) = 0\}$ és $M^\perp = \{v \in V : a(v, w) = 0,\ \forall w \in M\}$. Legyen $z \neq 0$ az $M^\perp$ egy tetszőleges eleme. Ekkor

$$\boxed{u = \frac{F(z)}{\|z\|_E^2} \cdot z} \tag{1.57}$$

?ph37?

választás adja a 65. Probléma megoldását, ahol

$$\|z\|_E := \sqrt{a(z, z)}, \quad z \in V. \tag{1.58}$$

?ph43?

□

Stratégia: Ennek az (1.57)-beli u-nak a pontos meghatározása azonban nem mindig lehetséges, ezért választunk a V altérnek egy véges dimenziós alterét, V_h-t és ennek keressük azt az u_h elemét, amely legjobban közelíti a fenti (1.57) formulában adott u megoldást.

66. PROBLÉMA: (Ritz-Garlekin Approximációs probléma) Legyen V_h egy véges dimenziós altere a V-nek. Találjuk meg azt az $u_h \in V_h$ elemet, amelyre

$$\boxed{a(u_h, v) = F(v), \quad \forall v \in V_h.} \tag{1.59}$$?ph38?

Megoldás: Vegyük észre, hogy $(V_h, a(\cdot,\cdot))$ egy Hilbert tér önmagában. Továbbá, az F lineáris funkcionál megszorítása a V_h-ra egy lineáris funkcionál az $(V_h, a(\cdot,\cdot))$ Hilbert téren. Jelöljük őt F_h-val. Ezért alkalmazható az F_h-ra a Riesz reprezentációs tétel. Vagyis, ha $M_h = \{v \in V_h : F_h(v) = 0\}$ és

$M_h^{\perp} = \{v \in V_h : a(v,w) = 0,\ \forall w \in M_h\}$. Legyen $z_h \neq 0$ az $M_h^{\perp}$ egy tetszőleges eleme. Ekkor

$$u_h = \frac{F_h(z_h)}{\|z_h\|_{V_h}^2} \cdot z \tag{1.60}$$?ph40?

választás adja a 66. Probléma megoldását ahol

$$\|z\|_{V_h} := \sqrt{a(z,z)}, \quad z \in V_h. \tag{1.61}$$?ph43?

□

67. TÉTEL: Legyen $u \in V$ és $u_h \in V_h$ definiálva az (1.57) és az (1.60) formulák szerint. Ekkor

$$a(u - u_h, v) = 0, \quad \forall v \in V_h\text{-ra.} \tag{1.62}$$?ph41?

Bizonyítás. Az állítást azonnal kapjuk, ha a következő két egyenletet kivonjuk egymásból és felhasználjuk, hogy a $a(u,v) - a(u_h,v) = a(u-u_h,v)$ (mivel a bilineáris):

$$\begin{aligned} a(u,v) &= F(v) \quad \forall v \in V \\ a(u_h,v) &= F(v) \quad \forall v \in V_h \end{aligned}$$

■ Az (1.62) formula felhasználásával igazolhatjuk a következő tételt:

68. TÉTEL:

$$\|u - u_h\|_E = \min_{v \in V_h} \|u - v\|_E, \tag{1.63}$$?ph42?

ahol $\|\cdot\|_E$ definícióját az (1.32) formulában adtuk meg: $\|w\|_E = \sqrt{a(w,w)}$.

Ez geometriailag azt jelenti, hogy mivel az $u - u_h$ merőleges (az $a(\cdot,\cdot)$ skalár szorzat szerint) a V_h minden elemére ezért az $u_h \in V_h$ éppen az $u \in V$ elem merőleges vetülete a V_h altérre. Tehát a Pitagorasz tétel miatt a V_h altérnek az u-hoz legközelebbi eleme az u_h. A bizonyítás formálisan a következő:

Bizonyítás. Mivel $(V, a(\cdot,\cdot))$ egy Hilbert tér, ezért a Cauchy, Bunyakowszki, Schwartz egyenlőtlenségből (39. Tétel) adódóan:

$$|a(v,w)| \leq \|v\|_E \|w\|_E \quad \forall v, w \in V. \tag{1.64}$$?ph44?

Ezt használjuk az alábbi levezetés utolsó lépésében, A levezetés második lépésében bevezetésre kerülő v-ről feltesszük, hogy a V_h véges dimenziós altér egy tetszőleges eleme és így $v - u_h \in V_h$, vagyis $a(u - u_h, v - v_h) = 0$ teljesül az (1.62) formula miatt. Ezt használjuk a harmadik egyenlőségben:

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_E^2 &= a(u - u_h, u - u_h) \\
&= a(u - u_h, u - v) + a(u - u_h, v - u_h) \\
&= a(u - u_h, u - v) \\
&\leq \|u - u_h\|_E \cdot \|u - v\|_E.
\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$\|u - u_h\|_E \leq \|u - v\|_E \quad \forall v \in V_h.$$

Tehát (1.63) teljesül. ■

69. TÉTEL: (Ritz Módszer) Az u_h az a **hely**, ahol a $Q : V_h \to \mathbb{R}$,

$$Q(v) = a(v,v) - 2F(v) = a(v,v) - 2a(u_h, v), \quad v \in V_h \tag{1.65}$$?ph114?

felveszi a minimumát.

Bizonyítás. Be kell látnunk, hogy

$$\forall v \in V_h\text{-ra: } a(v,v) - 2F(v) \geq a(u_h, u_h) - 2F(u_h). \tag{1.66}$$?ph46?

Mivel $F(u_h) = a(u_h, u_h)$ ezért a fenti jobb oldal egyenlő $-a(u_h, u_h)$-val. Továbbá, $F(v) = a(u_h, v)$, hiszen $v \in V_h$. Tehát az (1.66) egyenlet:

$$a(v, v) - 2a(u_h, v) \geq -a(u_h, u_h).$$

Ez ekvivalens azzal, hogy

$$a(v, v) - a(u_h, v) - (a(u_h, v) - a(u_h, u_h)) \geq 0.$$

Vagyis használva, hogy $a(u_h, v - u_h) = a(v - u_h, u_h)$ kapjuk:

$$a(v-u_h, v)-a(u_h, v-u_h) = a(v-u_h, v)-a(v-u_h, u_h) = a(v-u_h, v-u_h) \geq 0,$$

ami igaz, hiszen $a(\cdot, \cdot)$ coercive. ■

Legyen L egy lineáris differenciál operátor. Tekintsük a

$$Lu = f \tag{1.67}$$?ph109?

differenciálegyenletet és képzeljük el, hogy ehhez adottak bizonyos peremfeltételek (pl. $\{u(0) = 0$ és $u'(1) = 0\}$ vagy $\{u(0) = 0$ és $u(1) = 0\}$). Legyen $V \subset L^2$ azon függvények halmaza, amelyekre az L alkalmazható és kielégítik az előírt peremfeltételeket, továbbá feltesszük, hogy létezik egy szimmetrikus, coercive, korlátos $a(\cdot, \cdot)$ amire

$$a(u, v) := (Lu, v)_{L^2} = \int_0^1 (Lu)(x)v(x)dx, \quad v, \in V,$$

ha $u \in V$ eleget tesz a fenti perem feltételeknek. Ekkor az (1.65) formulában

$$F(v) := (f, v)_{L^2} = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Tekintünk egy $V_d \subset V$ d-dimenziós alteret. Legyen V_d egy tetszőleges (nem feltétlenül ortogonális) bázisa $\phi_1, \ldots, \phi_d$. Ekkor Az eddig ismeretlen u_h felírható, a meghatározandó $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ együtthatókkal vett lineáris kombináció segítségével:

$$\boxed{u_h = \alpha_1\phi_1 + \cdots + \alpha_d\phi_d.} \tag{1.68}$$?ph47?

Vagyis, a most még ismeretlen u_h-t meghatározni a Ritz m0dszer szerint (vagyis az (1.65) formula alapján), annyi mint megtalálni az $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ együtthatókat, amelyekre az

$$a\left(\sum_{i=1}^{d}\alpha_i\phi_i, \sum_{i=1}^{d}\alpha_i\phi_i\right) - 2\left(f, \sum_{i=1}^{d}\alpha_i\phi_i\right) \to \min. \qquad (1.69)$$?ph110?

Most megszakítjuk a Ritz módszer leírását, hogy az eddigieket egy példán szemléltessük:

Példa Ritz módszerre: Legyen

$$-u''(x) = 3x \quad \{u(0) = 0 \text{ és } u'(1) = 0\}. \qquad (1.70)$$?ph115?

Ekkor $L(u) = -u''$, $V = \{v \in H^1 : v(0) = 0\}$, $a(u,v) = \int\limits_0^1 u'(x)v'(x)dx$, $f(x) = 3x$, $F(v) = \int\limits_0^1 3x \cdot v(x)dx$. Tehát az (1.65)-ben szereplő

$$Q(v) = \int\limits_0^1 (v'(x))^2\, dx - 2 \cdot \int\limits_0^1 3x \cdot v(x)dx \qquad (1.71)$$?ph119?

Legyen a bázis $\{\phi_1(x) = x, \phi_2(x) = x^2\}$, ahol $x \in [0,1]$ és így V_2 a 0-ban 0-át felvevő másodfokú polinomok halmaza. Egy $v \in V$ alakja $v(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$. Ahhoz, hogy $u_2 \in V_2$-öt meghatározzuk minimalizálni kell a

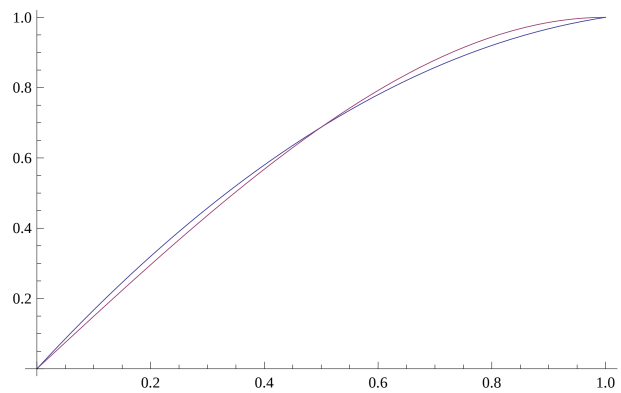
$$\begin{aligned} Q(\alpha_1,\alpha_2) &= \int\limits_0^1 (\alpha_1 + 2\alpha_2 x)^2 dx - 6\int\limits_0^1 x(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2)dx \\ &= \alpha_1^2 + \frac{4}{3}\alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_2 \end{aligned}$$

funkcionált. Ennek minimuma ott lesz ahol

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_1}(\alpha_1,\alpha_2) = 0 \text{ és } \frac{\partial Q}{\partial \alpha_1}(\alpha_1,\alpha_2) = 0. \qquad (1.72)$$?ph116?

Ez egy két ismeretlenes két egyenletből álló egyenletrendszer:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 1 \\ \alpha_1 & + & \frac{4}{3}\alpha_2 & = & \frac{3}{4} \end{array}\right\} \qquad (1.73)$$?ph117?



1.10. ábra. A piros függvény az $u(x)$ a kék az approximáltja. Távolság noha mivel a V teret egy két dimenziós altérrel közelítettük.

melynek megoldása: $\alpha_1 = \frac{7}{4}$ és $\alpha_2 = -\frac{3}{4}$. Ezért

$$u(x) = \frac{7}{4}x - \frac{3}{4}x^2.$$

Kétszeres integrálással könnyen látható, hogy az (1.70) peremérték feladat megoldása

$$u(x) = -\frac{x^3}{2} + \frac{3}{2}x. \tag{1.74}$$?ph121?

Nézzük meg mi lesz, ha V-t a három dimenziós V_3-al közelítjük, ahol a V_3 bázisa

$$\phi_1(x) = x, \phi_2(x) = x^2, \phi_3(x) = x^3.$$

Ekkor az $u(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$ függvényt behelyettesítve (1.71) formulába, kapjuk:

$$Q(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \int_0^1 \left(\alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2\right)^2 dx - 6 \cdot \int_0^1 x \cdot (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3) dx.$$

Az integrálást elvégezve adódik, hogy

$$Q(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -2\alpha_1 + \alpha_1^2 - \frac{3}{2}\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2 + \frac{4}{3}\alpha_2^2 - \frac{6}{5}\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_2\alpha_3 + \frac{9}{5}\alpha_3^2.$$

Most meg kell határoznunk azon $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ együtthatókat, melyekre

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0, \frac{\partial Q}{\partial \alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0, \frac{\partial Q}{\partial \alpha_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$$

Ez a következő három egyenletből álló három ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldását igényli:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 1 \\ \alpha_1 & + & \frac{4}{3}\alpha_2 & + & \frac{3}{2}\alpha_3 & = & \frac{3}{4} \\ \alpha_1 & + & \frac{3}{3}\alpha_2 & + & \frac{9}{5}\alpha_3 & = & \frac{3}{5} \end{array} \right\} \qquad (1.75) \text{ ?ph120?}$$

Ennek megoldása

$$\alpha_1 = \frac{3}{2}, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = -\frac{1}{2}.$$

Ekkor tehát

$$u_3(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^3.$$

Összehasonlítva (1.74)-el látjuk, hogy $u_3 = u$ a helyes megoldás.

Visszatérve a Ritz módszer megoldásnak általános levezetéséhez Ahhoz, hogy meghatározzuk ezen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ együtthatókat bevezetjük a következő mátrixot:

$$K_{i,j} := a(\phi_i, \phi_j) \text{ és } F_i = (f, \phi_i)$$

Az (1.69) kifejezés minimuma ott lehet, ahol az (1.69) minden α_i szerinti deriváltja nulla. Ami, használva, hogy $a(\cdot, \cdot)$ szimmetrikus, ekvivalens a következő egyenletrendszerrel:

$$\sum_{j=1}^{d} a(\phi_i, \phi_j) \cdot \alpha_j = (f, \phi_i), \quad i = 1, \ldots, d.$$

Ez egy egyenletrendszer, amely d egyenletből áll és d ismeretlenből $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ és amelyet mátrixosan felírva:

$$\begin{bmatrix} a(\phi_1, \phi_1) & a(\phi_1, \phi_2) & \ldots & a(\phi_1, \phi_d) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a(\phi_d, \phi_1) & a(\phi_d, \phi_2) & \ldots & a(\phi_d, \phi_d) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f, \phi_1) \\ \vdots \\ (f, \phi_d) \end{bmatrix} \qquad (1.76) \text{ ?ph57?}$$

Mivel a $\{\phi_1, \ldots, \phi_d\}$ vektorok bázist alkotnak, ezért az egyenletrendszer mátrixának rangja d vagyis létezik egyetlen megoldást-$\alpha_1, \ldots, \alpha_d$, amit Gauss eliminációval meghatározhatunk.

A 64. Feladatban, $L(v) := -v''$, $f(x) = x(1-x)$. $V = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\}$ Ekkor minden $v \in V$:

$$a(u,v) := (Lu, v) = \int\limits_0^1 u'(x)w'(x)dx.$$

Mivel H^1 Hilbert tér, ezért a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwartz egyenlőtlenség miatt $a(\cdot,\cdot)$ korlátos és könnyen látható, hogy coercive is. Tehát a Ritz módszer alkalmazása során a 64. Feladat megoldásának lépéseit hajtjuk végre.

1.8. Aszimmetrikus variációs probléma

$$\begin{cases} (1), & (H, (\cdot,\cdot)) \text{ egy Hilbert tér;} \\ (2), & V \text{ a } H\text{-nak egy altere;} \\ (3), & a(\cdot,\cdot) \text{ egy bilineáris leképezés (LEHET nem szimmetrikus);} \\ (4), & a(\cdot,\cdot) \text{ folytonos a } V\text{-n;} \\ (5), & a(\cdot,\cdot) \text{ coercive a } V\text{-n.} \end{cases} \qquad (1.77)$$?ph123?

Legyen F egy korlátos lineáris funkcionál a V Hilbert téren.
Cél: Megtalálni azt az

$$u \in V \text{ amelyre: } \forall v \in V, \quad a(u,v) = F(v). \qquad (1.78)$$?112?

Miért fontos ez? Tekintsük a következő peremérték problémát:

70. FELADAT: Határozzuk meg az $u(x)$ függvényt, melyre

$$-u'' + u' + u = x, \quad x \in [0,1], \quad u(0) = u'(1) = 0.$$

Most le akarjuk írni a 70 Feladattal ekvivalens variációs problémát. Ehhez:
Legyen

$$H := L^2(0,1) \text{ és } V = \left\{ v \in H^1(0,1) : v(0) = 0 \right\}. \qquad (1.79)$$?ph128?

Továbbá:

$$\boldsymbol{a(u,v)} := \int_0^1 (u'v' + u'v + uv)\,dx, \quad \boldsymbol{F(v)} := (f,v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \tag{1.80}$$?ph125?

Az $a(\cdot,\cdot)$ nyilván valóan bilineáris. Az $u'v$ tag miatt az $a(u,v)$ nem szimmetrikus. Viszont: be lehet látni, hogy

$$\forall u,v \in V, \quad |a(u,v)| \leq 2\|u\|_{H^1} \cdot \|v\|_{H^1} \ \Rightarrow a(\cdot,\cdot) \text{ folytonos },$$

$$\forall v \in V, \quad a(v,v) \geq \frac{1}{2}\|\|^2_{H^1} \Rightarrow a(\cdot,\cdot) \text{ coercive }.$$

Tehát az (1.77) feltételei teljesülnek.

71. PROBLÉMA: (A 70. Feladattal ekvivalens variációs probléma:) Határozzuk meg azt az $u \in V$-t, amelyre teljesül, hogy

$$\forall v \in V, \quad \boldsymbol{a(u,v) = F(v)}. \tag{1.81}$$?ph127?

Galjorkin Módszer leírása: Választunk a V-nek egy n-dimenziós alterét V_n-et és ezen meg keressük azt az

$$u_n \in V_n, \text{ amelyre } \forall v \in V_n: \quad a(u_n,v) = F(v). \tag{1.82}$$?ph111?

Ortogonalitás: Mivel

$$\forall v \in V,\ a(u,v) = F(v) \text{ és } \forall v \in V_n,\ a(u_n,v) = F(v) \Rightarrow \forall v \in V_n,\ a(u-u_n,v) = 0.$$

Vagyis a hiba vektor $u - u_n$ merőleges V_n minden elemére.

Az (1.82) egyenlet megoldása:

Legyen $\phi_1, \ldots \phi_n$ egy bázisa a V_n-nek. Ekkor a keresett $u_n \in V_n$ felírható

$$u_n = \alpha_1\phi_1 + \cdots + \alpha_n v_n \tag{1.83}$$?ph129?

alakban valamely $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ együtthatókkal. A továbbiakban ezen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ együtthatókat szeretnénk meghatározni, úgy hogy (1.82) teljesüljön.

Ahelyett, hogy $a(u_n,v) = F(v)$ teljesülését minden $v \in V_n$-re megkövetelnék, elég ha csak a $v = \phi_1, \ldots, \phi_n$ függvényekre követeljük meg mert ebből következik, hogy $a(u_n, v) = F(v)$ minden $v \in V_n$-re. Vagyis Az (1.82) egyenlet megoldásához elég megoldani: elég megkövetelni:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a(\phi_j, \phi_i) = F(\phi_i), \qquad i = 1, \dots, n \tag{1.84}$$?ph112?

n egyenletből álló n ismeretlenes $(\alpha_, \dots, \alpha_n)$ egyenletrendszert, amely tehát úgy néz ki, hogy

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a(\phi_1,\phi_1) & a(\phi_2,\phi_1) & \cdots & a(\phi_n,\phi_1) \\ a(\phi_1,\phi_2) & a(\phi_2,\phi_2) & \cdots & a(\phi_n,\phi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\phi_1,\phi_n) & a(\phi_2,\phi_n) & \cdots & a(\phi_n,\phi_n) \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\alpha}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F(\phi_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ F(\phi_n) \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}}. \tag{1.85}$$?ph113?

A 70. feladat megoldása Garjolkin módszerrel.

Használjuk az (1.79) és az (1.80) formulákban bevezetett jelöléseket. Legyen $n = 10$ és tekintsük a 64. Feladatban bevezetett bázis függvényeket:

Legyen $h := 1/n$ és

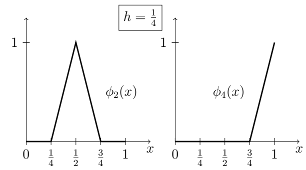
$$x_i := i \cdot h, \qquad i = 1, \dots, (n-1).$$

Ekkor V_h egy bázisa $\{\phi_1, \dots \phi_n\}$, ahol

$$\phi_i(x) := \begin{cases} \frac{1}{h}x + 1 - i, & \text{ha } x \in [x_{i-1}, x_i]; \\ -\frac{1}{h}x + 1 + i, & \text{ha } x \in [x_i, x_{i+1}]; \\ 0, & \text{egyébként}. \end{cases}, \quad \text{ha } 1 \le i < n,$$

továbbá

$$\phi_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{h}x + 1 - n, & \text{ha } x \in [x_{n-1}, 1]; \\ 0, & \text{egyébként}. \end{cases}$$



1.11. ábra. A ϕ_2 és a ϕ_4 bázis elemek, $h = 1/4$ esetén.

Ekkor az (1.85) formula beli A mátrix és $\mathbf{w}$ vektor:

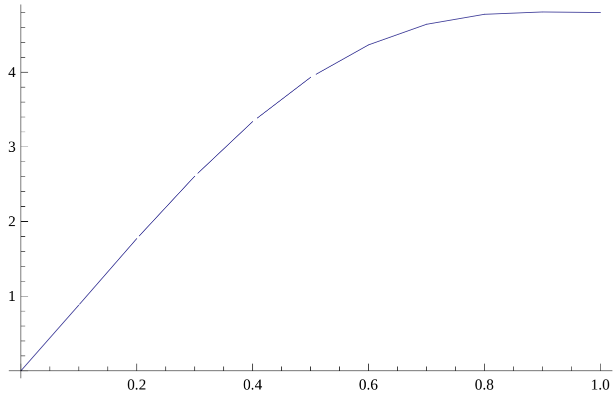
$$A = \begin{bmatrix} \frac{301}{15} & -\frac{569}{60} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{629}{60} & \frac{301}{15} & -\frac{569}{60} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{629}{60} & \frac{301}{15} & -\frac{569}{60} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{629}{60} & \frac{301}{15} & -\frac{569}{60} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{629}{60} & \frac{301}{15} & -\frac{569}{60} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{629}{60} & \frac{301}{15} & -\frac{569}{60} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{629}{60} & \frac{301}{15} & -\frac{569}{60} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{629}{60} & \frac{301}{15} & -\frac{569}{60} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{629}{60} & \frac{301}{15} & -\frac{569}{60} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{629}{60} & \frac{158}{15} \end{bmatrix}$$

és

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \frac{53}{60} \\ \frac{19}{12} \\ \frac{25}{12} \\ \frac{143}{60} \\ \frac{149}{60} \\ \frac{143}{60} \\ \frac{25}{12} \\ \frac{19}{12} \\ \frac{53}{60} \\ \frac{19}{120} \end{bmatrix} \quad \text{az (1.85) m.o.: } \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0.881165 \\ 1.77139 \\ 2.60721 \\ 3.33898 \\ 3.9318 \\ 4.36673 \\ 4.64225 \\ 4.77609 \\ 4.80745 \\ 4.79966 \end{bmatrix}$$

Ezt behelyettesítve az (1.83) formulába:

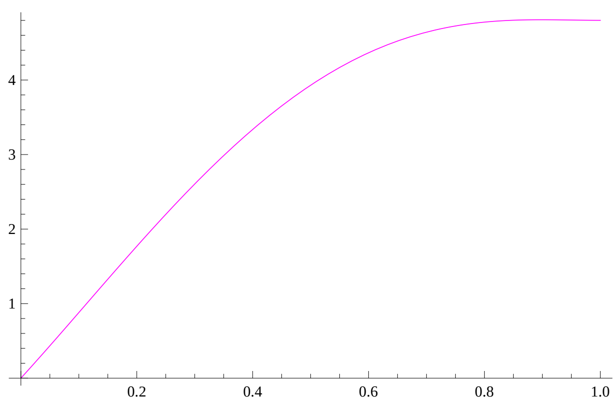
$$\begin{aligned} u_{10}(x) &= 0.881165\varphi_1(x) + 1.77139\varphi_2(x) + 2.60721\varphi_3(x) + 3.33898\varphi_4(x) + 3.9318\varphi_5(x) \\ &+ +4.36673\varphi_6(x) + 4.64225\varphi_7(x) + 4.77609\varphi_8(x) + 4.80745\varphi_9(x) + 4.79966\varphi_{10}(x) \end{aligned}$$



1.12. ábra. A 70. Feladat közelítő megoldása: u_{10}

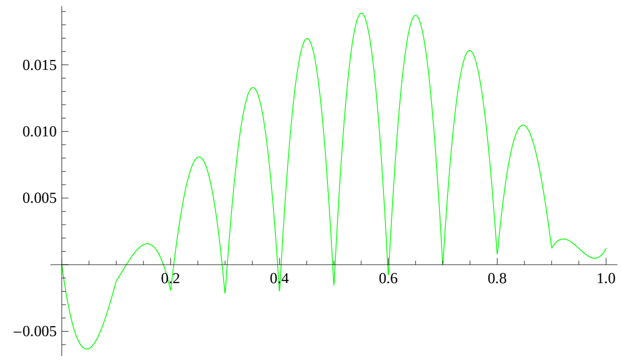
$$\Big(100\, e^{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}\,x}{2}} \Big(5\,(1+\sqrt{5})\, e^{\frac{1}{2}+\sqrt{5}+\frac{x}{2}} + 2\, e^{\frac{1}{2}(\sqrt{5}+x)} + 5\,(-1+\sqrt{5})\, e^{\frac{1}{2}(1+x+2\sqrt{5}\,x)} - 2\, e^{\frac{1}{2}(\sqrt{5}+x+2\sqrt{5}\,x)} - (1+\sqrt{5})\, e^{\frac{1}{2}+\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}\,x}{2}}\,(5-3x+x^2) - (-1+\sqrt{5})\, e^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}\,x)}\,(5-3x+x^2)\Big)\Big) \Big/ \left(-1+\sqrt{5}+(1+\sqrt{5})\, e^{\sqrt{5}}\right)$$

1.13. ábra. A 70. Feladat $u(x)$ megoldása



1.14. ábra. A 70. Feladat $u(x)$ megoldása

A 70. Feladat analitikus megoldása:



1.15. ábra. A 70. Feladatban $u(x) - u_{10}(x)$ megoldása

A Garjolkin módszer egy más természetű alkalmazása.

72. FELADAT: Határozzuk meg az $\boldsymbol{u(x)}$ függvényt, melyre

$$-u'' + u' + u = x, \quad x \in [0, 1], \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Vegyük észre, hogy a különbséget a (70) és a (72) feladatok között a különbség a peremfeltételekben van.

Definiáljuk az L lineáris differenciál operátort:

$$L[u] := -u'' + u' + u, \quad u = u(x),\ x \in [0, 1].$$

és legyen

$$f(x) = -100x(1 - x), x \in [0, 1]$$

A találni akarunk olyan u függvényt, amely eleget tesz a perem feltételeknek

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{1.86}$$?ph136?

és amelyre

$$L[u] + f = 0. \tag{1.87}$$?ph135?

Ezért választunk **bázis** függvényeket, melyek az (1.86) perem feltételeknek megfelelnek:

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \quad \varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0. \tag{1.88}$$?ph137?

Az u megoldás u_n közelítését ezen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ lineáris kombinációjaként

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x), \tag{1.89}$$?ph138?

alakban keressük, ahol az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ meghatározandó konstansokat, abból a feltételből számítjuk ki, hogy

$$\boxed{\forall i = 1, \ldots, n: \quad (L[u] + f, \varphi_i) = \int_0^1 (L[u](x) + f(x)) \cdot \varphi_i(x) dx = 0.} \tag{1.90}$$?ph139?

A (72) feladat megoldásához a bázis függvények lehetnek

$$\varphi_k(x) = sin\,(k\pi \cdot x), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1.91}$$?ph140?

Legyen mostantól $n = 10$. Ekkor az (1.90)-be behelyettesítjük az (1.89)-at minden $i = 1, \ldots, 10$-re. Ez ad 10 egyenletet az $\alpha_1 \ldots, \alpha_{10}$ ismeretlenekre:

$$-\frac{400}{\pi^3} + \frac{1}{2}\left(1+\pi^2\right)\alpha_1 - \frac{4\,\alpha_2}{3} - \frac{8\,\alpha_4}{15} - \frac{12\,\alpha_6}{35} - \frac{16\,\alpha_8}{63} - \frac{20\,\alpha_{10}}{99} == 0$$

$$\frac{4\,\alpha_1}{3} + \left(\frac{1}{2} + 2\,\pi^2\right)\alpha_2 - \frac{4\,(2079\,\alpha_3 + 825\,\alpha_5 + 539\,\alpha_7 + 405\,\alpha_9)}{3465} == 0$$

$$-\frac{400}{27\,\pi^3} + \frac{12\,\alpha_2}{5} + \frac{1}{2}\left(1 + 9\,\pi^2\right)\alpha_3 - \frac{24\,\alpha_4}{7} - \frac{4\,\alpha_6}{3} - \frac{48\,\alpha_8}{55} - \frac{60\,\alpha_{10}}{91} == 0$$

$$\frac{8\,\alpha_1}{15} + \frac{24\,\alpha_3}{7} + \frac{\alpha_4}{2} + 8\,\pi^2\,\alpha_4 - \frac{40\,\alpha_5}{9} - \frac{56\,\alpha_7}{33} - \frac{72\,\alpha_9}{65} == 0$$

$$-\frac{16}{5\,\pi^3} + \frac{20\,\alpha_2}{21} + \frac{40\,\alpha_4}{9} + \frac{\alpha_5}{2} + \frac{25\,\pi^2\,\alpha_5}{2} - \frac{60\,\alpha_6}{11} - \frac{80\,\alpha_8}{39} - \frac{4\,\alpha_{10}}{3} == 0$$

$$\frac{12\,\alpha_1}{35} + \frac{4\,\alpha_3}{3} + \frac{60\,\alpha_5}{11} + \frac{\alpha_6}{2} + 18\,\pi^2\,\alpha_6 - \frac{84\,\alpha_7}{13} - \frac{12\,\alpha_9}{5} == 0$$

$$-\frac{400}{343\,\pi^3} + \frac{28\,\alpha_2}{45} + \frac{56\,\alpha_4}{33} + \frac{84\,\alpha_6}{13} + \frac{\alpha_7}{2} + \frac{49\,\pi^2\,\alpha_7}{2} - \frac{112\,\alpha_8}{15} - \frac{140\,\alpha_{10}}{51} == 0$$

$$\frac{16\,\alpha_1}{63} + \frac{48\,\alpha_3}{55} + \frac{80\,\alpha_5}{39} + \frac{112\,\alpha_7}{15} + \frac{\alpha_8}{2} + 32\,\pi^2\,\alpha_8 - \frac{144\,\alpha_9}{17} == 0$$

$$-\frac{400}{729\,\pi^3} + \frac{36\,\alpha_2}{77} + \frac{72\,\alpha_4}{65} + \frac{12\,\alpha_6}{5} + \frac{144\,\alpha_8}{17} + \frac{\alpha_9}{2} + \frac{81\,\pi^2\,\alpha_9}{2} - \frac{180\,\alpha_{10}}{19} == 0$$

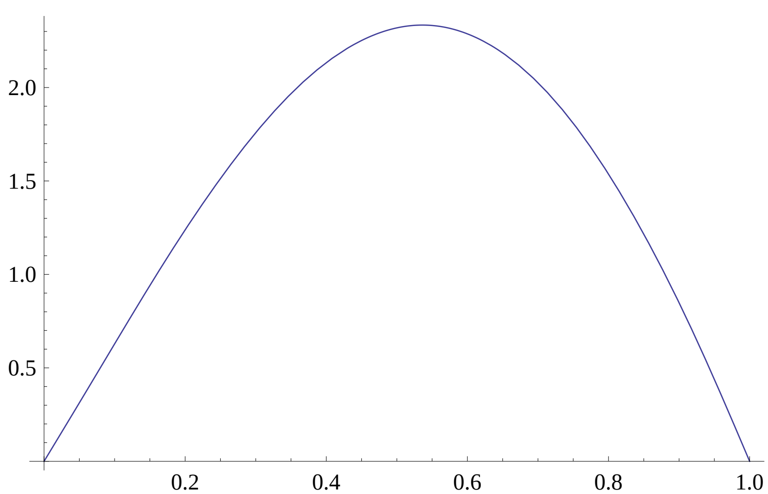
$$\frac{20\,\alpha_1}{99} + \frac{60\,\alpha_3}{91} + \frac{4\,\alpha_5}{3} + \frac{140\,\alpha_7}{51} + \frac{180\,\alpha_9}{19} + \frac{\alpha_{10}}{2} + 50\,\pi^2\,\alpha_{10} == 0$$

Ennek megoldása:

$$\begin{gathered}\alpha_1 = 2.33449\\ \alpha_2 = -0.151602\\ \alpha_3 = 0.0173068\\ \alpha_4 = -0.0162664\\ \alpha_5 = 0.00233412\\ \alpha_6 = -0.00466374\\ \alpha_7 = 0.000711597\\ \alpha_8 = -0.00194561\\ \alpha_9 = 0.000311953\\ \alpha_{10} = -0.000994062\end{gathered}$$

Tehát a közelítő megoldás:

$$u_{10}(x) = \sum_{i=1}^{10} \alpha_i \sin(i\pi x).$$

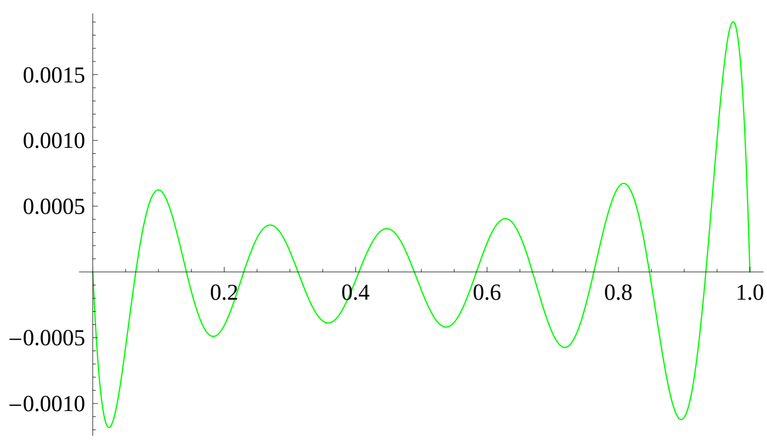


1.16. ábra. A (72)
. Feladat közelítő megoldása.

Az analitikus megoldás

$$y[x] = \frac{1}{-1 + e^{\sqrt{5}}} 100\, e^{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}\, x}{2}} \left(5\, e^{\frac{1}{2} + \sqrt{5} + \frac{x}{2}} - 3\, e^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + x\right)} - 5\, e^{\frac{1}{2}\left(1 + x + 2\sqrt{5}\, x\right)} + 3\, e^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + x + 2\sqrt{5}\, x\right)} - e^{\frac{1}{2} + \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}\, x}{2}} \left(5 - 3x + x^2\right) + e^{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\, x\right)} \left(5 - 3x + x^2\right)\right)$$

1.17. ábra. A 72
. Feladat analitikus és $u_{10}(x)$ közelítő megoldása közötti eltérés.



1.18. ábra. A 72
. Feladat analitikus és $u_{10}(x)$ közelítő megoldása közötti eltérés.

Inhomogén peremfeltételek: Az inhomogén peremfeltételek estét egy példán keresztül tanuljuk meg kezelni:

73. FELADAT: Határozzuk meg az $\boldsymbol{u(x)}$ függvényt, melyre

$$\boldsymbol{-u''(x) + 2u(x) = -200x(1-x), \quad x \in [0,1], \quad u(0) = 0 \text{ és } u(1) = 2.}$$

Legyen

$$L[u(x)] := -u''(x) + u(x) \text{ és } f(x) := 200x(1-x).$$

Ezen jelölésekkel az

$$L[u(x)] + f(x) = 0 \tag{1.92}$$?ph144?

egyenletet akarjuk megoldani az $u(0) = 0,\ u(1) = 2$ peremfeltételekkel. Az inhomogén preremfeltételek esetét úgy tudjuk kezelni, hogy a megoldást

$$u = u_0 + u_n$$

alakban keressük, ahol $u_0(x)$ egy egyenes, amely kielégíti az inhomogén peremfeltételeket. Ez a mi esetünkben

$$u_0(x) = 2x.$$

Ezután $n = 3$-ra választunk bázis függvényeket

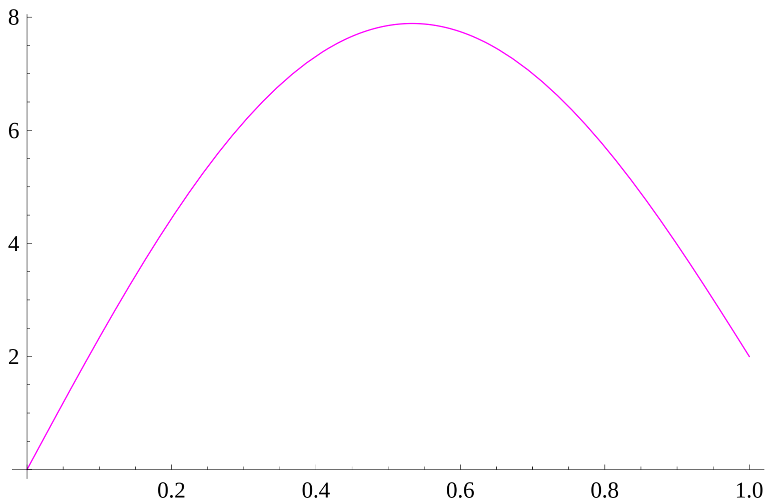
$$\varphi_1(x) = x(1-x),\ \varphi_2(x) = x^2(1-x)^2,\ \varphi_3(x) = x^3(1-x)^3,$$

és felírjuk a keresett

$$u_3(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \varphi_i(x). \tag{1.93}$$?ph143?

Az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ együtthatókat abból a feltételből határozzuk meg, hogy az $\boldsymbol{r(x) = L[u_3] + f(x)}$ függvényre

$$\boxed{(r(x), \varphi_i(x)) = \int_0^1 r(x)\varphi_i(x)dx = 0 \quad i = 1, 2, 3.}$$



1.19. ábra. A közelítő megoldás a (73). feladatban

Ez jelent három egyenletet a három $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ismeretlen együtthatóra. Ezek az egyenletek:

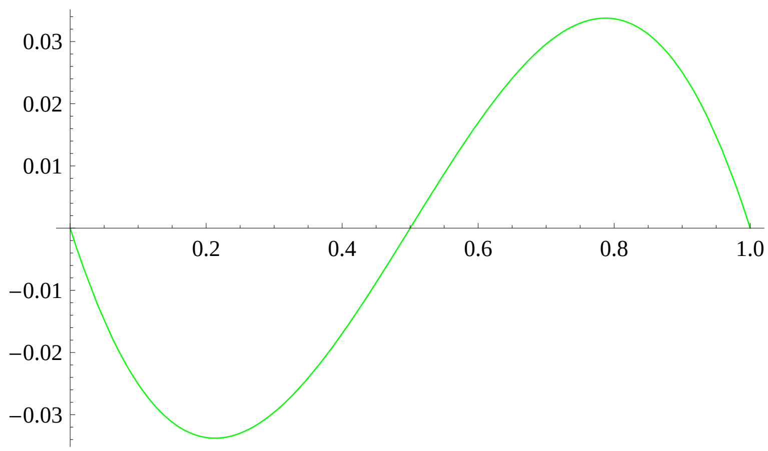
$$-7 - \frac{4\alpha_1}{15} + \frac{11\alpha_2}{210} - \frac{\alpha_3}{90} = 0$$
$$\frac{157}{105} + \frac{11\alpha_1}{210} - \frac{\alpha_2}{63} + \frac{2\alpha_3}{495} = 0$$
$$-\frac{209}{630} - \frac{\alpha_1}{90} + \frac{2\alpha_2}{495} - \frac{17\alpha_3}{15015} = 0$$

Ezek megoldásai:

$$\alpha_1 = -22.0546$$
$$\alpha_2 = 21.0512$$
$$\alpha_3 = -1.44797$$

$$u_3(x) = 2x - 22.0546(-1+x)x + 21.0512(-1+x)^2x^2 - 1.44797(-1+x)^3x^3$$

Az eltérés az analituikus megoldástól



1.20. ábra. Eltérés az analitikus megoldástól a (73). feladatban

Mathematica Program a 73. Feladat megoldására. Vagyis a

$$y'' + 2y = -200x(1-x), \quad y(0) = 0, y(1) = 2$$

peremérték feladat megoldására Gerjalkin módszerrel.

$L[y\_] = y''[x] + 2y[x];$

$f[x\_] = 200x(1-x);$

$\text{ode} = L[y] + f[x] == 0;$

$a = 0;$

$b = 1;$

$\text{za} = 0;$

$\text{zb} = 2;$

$\text{ics} = \{y[a] == \text{za}, y[b] == \text{zb}\};$

Print[„Oldjuk meg a következő d.e.-et”];

Print[ode];

Print[„a következő peremérték feltéelekkel”];

Print[ics];

Oldjuk meg a következő d.e.-et
$200(1-x)x + 2y[x] + y''[x] == 0$
a következő peremérték feltételekkel
$\{y[0] == 0, y[1] == 2\}$
Az első függvény ami a határpontokat összeköti

$\phi_0[x\_] = \text{za} + (\text{zb} - \text{za})\frac{x-a}{b-a};$

$n = 3;$

$\phi_1[x\_] = x(x-1);$

$\phi_2[x\_] = x\hat{}2(x-1)\hat{}2;$

$\phi_3[x\_] = x\hat{}3(x-1)\hat{}3;$

$\Phi[\text{x\_}] = \phi_0[x] + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i[x];$

A residuálist úy kapjuk, hogy u[x]=Φ[x]-et helyettesítünk L[u[x]]+f[x]-be:

$r[\text{x\_}] = \text{ReplaceAll}[L[u] + f[x],$

$\{u[x] \to \Phi[x], u'[x] \to \Phi'[x], u"[x] \to \Phi"[x]\}];$

$\text{vars} = \text{Table}[\alpha_i, \{i, 1, n\}];$

$\text{Print}[L[u] + f[x]];$

$\text{Print}[\text{„Substitute u[x]="}, \Phi[x]];$

$\text{Print}[\text{„Get"}]$

$\text{Print}[\text{„r[x]="}, r[x]];$

$R = 0;$

$\text{For}[i = 1, i \le n, i{+}{+},$

$R = R + \alpha_i \text{Expand}[\text{Coefficient}[\text{Collect}[r[x], \text{vars}], \alpha_i]];$

$S = \text{Expand}[r[x] - R];$

$r[\text{x\_}] = R + S];$

$200(1-x)x + 2u[x] + u''[x]$
Substitute u[x]=$2x + (-1+x)x\alpha_1 + (-1+x)^2x^2\alpha_2 + (-1+x)^3x^3\alpha_3$
Get
r[x]=$200(1-x)x+2\alpha_1+2(-1+x)^2\alpha_2+8(-1+x)x\alpha_2+2x^2\alpha_2+6(-1+x)^3x\alpha_3+18(-1+x)^2x^2\alpha_3+6(-1+x)x^3\alpha_3+2\left(2x + (-1+x)x\alpha_1 + (-1+x)^2x^2\alpha_2 + (-1+x)^3x^3\alpha_3\right)$

Garlekin módszer: a residuális r[x] merőleges az összes ϕ_i − re Itt az $\int_a^b \phi_i[x]r[x]dx = 0$ i=1,..,n egyenleteket kell megoldani

$\text{eqns} = \{\};$

$\text{For}[i = 1, i \le n, i{+}{+},$

$\text{eqns} = \text{Append}\left[\text{eqns}, \int_a^b \phi_i[x]r[x]dx == 0\right];\Big];$

$\text{Print}[\text{TableForm}[\text{eqns}]];$

$-7 - \frac{4\alpha_1}{15} + \frac{11\alpha_2}{210} - \frac{\alpha_3}{90} == 0$
$\frac{157}{105} + \frac{11\alpha_1}{210} - \frac{\alpha_2}{63} + \frac{2\alpha_3}{495} == 0$
$-\frac{209}{630} - \frac{\alpha_1}{90} + \frac{2\alpha_2}{495} - \frac{17\alpha_3}{15015} == 0$

Meghatározzuk az α_i-ket:

```
vars = Table[α_i, {i, 1, n}];
solset = Solve[eqns, vars];
Print[„Megoldandó:"];
Print[TableForm[eqns]];
Print[„a következő változókra:", vars];
Print[„Kapjuk:"];
Print[TableForm[Partition[solset, 1]]];
nsolset = solset;
nsolset[[1,All,2]] = N[solset[[1,All,2]]];
Print[TableForm[Partition[nsolset, 1]]];
```

Megoldandó:

$-7 - \frac{4\alpha_1}{15} + \frac{11\alpha_2}{210} - \frac{\alpha_3}{90} == 0$

$\frac{157}{105} + \frac{11\alpha_1}{210} - \frac{\alpha_2}{63} + \frac{2\alpha_3}{495} == 0$

$-\frac{209}{630} - \frac{\alpha_1}{90} + \frac{2\alpha_2}{495} - \frac{17\alpha_3}{15015} == 0$

a következő változókra: $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

Kapjuk:

$\alpha_1 \to -\frac{329981}{14962}$

$\alpha_2 \to \frac{629937}{29924}$

$\alpha_3 \to -\frac{43329}{29924}$

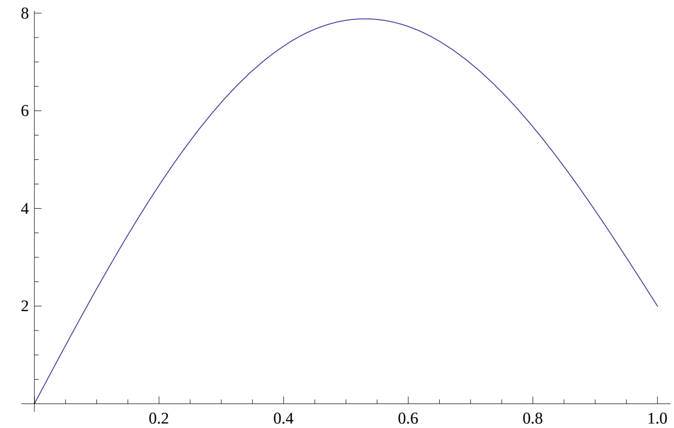
$\alpha_1 \to -22.0546$

$\alpha_2 \to 21.0512$

$\alpha_3 \to -1.44797$

Most meghatározzuk a közelítő megoldást:

```
g[x_] = ReplaceAll[Φ[x], solset[[1]]];
Plot[g[x], {x, a, b}]
Print[ode];
Print[„a peremfeltételekkel:"];
Print[ics];
Print[„a közelítő megoldás a Garlekin módszerből:"];
Print[„y=g[x]=", g[x]];
Print[„y=g[x]=", N[g[x]]];
```



$200(1-x)x+2y[x]+y''[x]==0$
a peremfeltételekkel:
$\{y[0]==0, y[1]==2\}$
a közelítő megoldás a Garlekin módszerből:
y=g[x]=$2x-\frac{329981(-1+x)x}{14962}+\frac{629937(-1+x)^2x^2}{29924}-\frac{43329(-1+x)^3x^3}{29924}$
y=g[x]=$2.x-22.0546(-1.+x)x+21.0512(-1.+x)^2x^2-1.44797(-1.+x)^3x^3$

Most megkeressük a valódi megoldást:

sol = DSolve[{ode, ics}, *y*[*x*], *x*];

sol = MapAll[Simplify, sol];

***z*[x_] = sol$_{[[1,1,2]]}$;**

Print[„Tekintsük a perem feladatot:”];

Print[ode];

Print[ics];

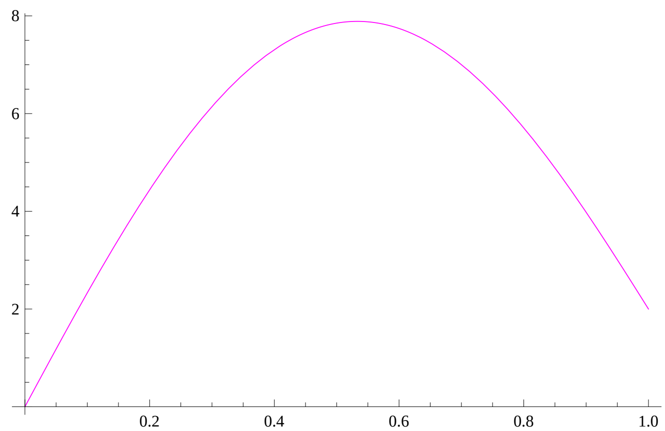
Print[„Ennek analitikus megoldása:”];

Print[„y[x]=”, *z*[*x*]];

Tekintsük a perem feladatot:
$200(1-x)x+2y[x]+y''[x]==0$
$\{y[0]==0, y[1]==2\}$
Ennek analitikus megoldása:
y[x]=$2\left(50\left(-1-x+x^2\right)+50\text{Cos}\left[\sqrt{2}x\right]+\left(-50\text{Cot}\left[\sqrt{2}\right]+51\text{Csc}\left[\sqrt{2}\right]\right)\text{Sin}\left[\sqrt{2}x\right]\right)$

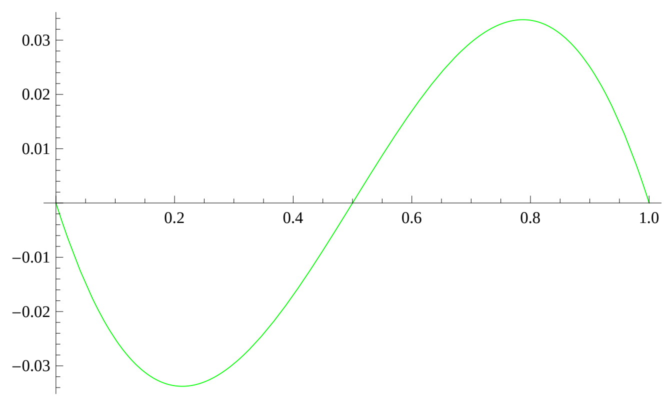
Rajzoljuk le az analítikus megoldást:

Plot[*z*[*x*], {*x*, *a*, *b*}, PlotStyle → Magenta]



Rajzoljuk le a különbséget az analítikus és a közelítő mogoldás között:

Plot[z[x] − g[x], {x, a, b}, PlotStyle → Green]



A 70. Feladat megoldása Mathematica programmal:

$a = 0; b = 1; \mathrm{za} = 0; \mathrm{zb} = 0; \mathrm{ics} = \{y[a] == \mathrm{za}, y'[b] == \mathrm{zb}\};$

$f[\mathrm{x\_}] = 100x(1 - x);$

$\mathrm{ode} = -y\text{"}[x] + y'[x] + y[x] {==} f[x]$

$y[x] + y'[x] - y''[x] == 100(1 - x)x$

$n = 10; h = (b - a)/n;$

$\mathrm{For}[i = 0, i \leq n, i{+}{+},$

$x_i = i * h];$

$\mathrm{For}[i = 1, i \leq n - 1, i{+}{+},$

$\phi_i[\mathrm{x\_}] =$

$\mathrm{Piecewise}[\{\{0, x < x_{i-1}\}, \{x/h + 1 - i, x_{i-1} \leq x < x_i\},$

$\{-x/h + 1 + i, x_i \leq x < x_{i+1}\}, \{0, x_{i+1} \leq x\}\}, \{x, 0, 1\}]]$

$\phi_n[\mathrm{x\_}] = \mathrm{Piecewise}[\{\{0, x < x_{n-1}\}, \{x/h + 1 - n, x_{n-1} \leq x < x_n\}\}, \{x, 0, 1\}];$

$A = \mathrm{Table}\left[\mathrm{Integrate}\left[\phi_j'[x]\phi_i'[x] + \phi_j'[x]\phi_i[x] + \phi_j[x]\phi_i[x], \{x, 0, 1\}\right],\right.$

$\{i, 1, n\}, \{j, 1, n\}];$

$\mathrm{MatrixForm}[A]$

$$\begin{pmatrix} \frac{301}{15} & -\frac{569}{60} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{629}{60} & \frac{301}{15} & -\frac{569}{60} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{629}{60} & \frac{301}{15} & -\frac{569}{60} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{629}{60} & \frac{301}{15} & -\frac{569}{60} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{629}{60} & \frac{301}{15} & -\frac{569}{60} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{629}{60} & \frac{301}{15} & -\frac{569}{60} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{629}{60} & \frac{301}{15} & -\frac{569}{60} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{629}{60} & \frac{301}{15} & -\frac{569}{60} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{629}{60} & \frac{301}{15} & -\frac{569}{60} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{629}{60} & \frac{158}{15} \end{pmatrix}$$

$B = N$[Inverse[A]];

MatrixForm[B]

$$\begin{pmatrix} 0.0905527 & 0.0779419 & 0.0672775 & 0.0582721 & 0.0506816 & 0.0442986 & 0.038947 & 0.0344775 & 0.0307 \\ 0.0861607 & 0.164924 & 0.142359 & 0.123303 & 0.107242 & 0.0937355 & 0.0824117 & 0.0729541 & 0.0650 \\ 0.0822141 & 0.15737 & 0.226858 & 0.196492 & 0.170897 & 0.149374 & 0.131329 & 0.116257 & 0.103 \\ 0.0787183 & 0.150679 & 0.217212 & 0.279471 & 0.243067 & 0.212454 & 0.186789 & 0.165353 & 0.147 \\ 0.075684 & 0.14487 & 0.208839 & 0.268698 & 0.32541 & 0.284427 & 0.250066 & 0.221369 & 0.197 \\ 0.0731277 & 0.139977 & 0.201785 & 0.259623 & 0.314419 & 0.366988 & 0.322653 & 0.285626 & 0.254 \\ 0.071073 & 0.136044 & 0.196116 & 0.252328 & 0.305585 & 0.356677 & 0.406297 & 0.35967 & 0.320 \\ 0.0695511 & 0.133131 & 0.191916 & 0.246925 & 0.299041 & 0.349039 & 0.397597 & 0.445316 & 0.397 \\ 0.0686022 & 0.131315 & 0.189298 & 0.243556 & 0.294961 & 0.344277 & 0.392172 & 0.43924 & 0.486 \\ 0.0682765 & 0.130691 & 0.188399 & 0.2424 & 0.293561 & 0.342642 & 0.390311 & 0.437155 & 0.48 \end{pmatrix}$$

$w =$ Table[Integrate[$\phi_i[x] * f[x], \{x, 0, 1\}$], $\{i, 1, n\}$];

MatrixForm[w]

$$\begin{pmatrix} \frac{53}{60} \\ \frac{19}{12} \\ \frac{25}{12} \\ \frac{143}{60} \\ \frac{149}{60} \\ \frac{143}{60} \\ \frac{25}{12} \\ \frac{19}{12} \\ \frac{53}{60} \\ \frac{19}{120} \end{pmatrix}$$

```
v = B.w;
```

```
v[[4]]
```

3.33898

```
MatrixForm[v]
```

$$\begin{pmatrix} 0.881165 \\ 1.77139 \\ 2.60721 \\ 3.33898 \\ 3.9318 \\ 4.36673 \\ 4.64225 \\ 4.77609 \\ 4.80745 \\ 4.79966 \end{pmatrix}$$

For[$k = 1, k \leq n, k$++,

$\alpha_k = v[[k]]$;

ClearAll[Φ];

$\Phi[x\_] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i[x]$

$$4.79966 \left(\begin{array}{lll} & 0 & x < \frac{9}{10} \\ \{ & -9+10x & \frac{9}{10} \le x < 1 \\ & \{x,0,1\} & \text{True} \end{array} \right) + 0.881165 \left(\begin{array}{lll} & 0 & x < 0 \\ & 10x & 0 \le x < \frac{1}{10} \\ \{ & 2-10x & \frac{1}{10} \le x < \frac{1}{5} \\ & 0 & \frac{1}{5} \le x \\ & \{x,0,1\} & \text{True} \end{array} \right) +$$

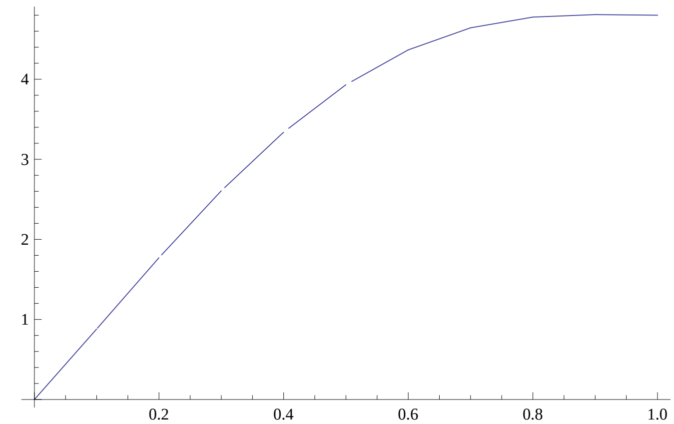
$$1.77139 \left(\begin{array}{lll} & 0 & x < \frac{1}{10} \\ & -1+10x & \frac{1}{10} \le x < \frac{1}{5} \\ \{ & 3-10x & \frac{1}{5} \le x < \frac{3}{10} \\ & 0 & \frac{3}{10} \le x \\ & \{x,0,1\} & \text{True} \end{array} \right) + 2.60721 \left(\begin{array}{lll} & 0 & x < \frac{1}{5} \\ & -2+10x & \frac{1}{5} \le x < \frac{3}{10} \\ \{ & 4-10x & \frac{3}{10} \le x < \frac{2}{5} \\ & 0 & \frac{2}{5} \le x \\ & \{x,0,1\} & \text{True} \end{array} \right) +$$

$$3.33898 \left(\begin{array}{lll} & 0 & x < \frac{3}{10} \\ & -3+10x & \frac{3}{10} \le x < \frac{2}{5} \\ \{ & 5-10x & \frac{2}{5} \le x < \frac{1}{2} \\ & 0 & \frac{1}{2} \le x \\ & \{x,0,1\} & \text{True} \end{array} \right) + 3.9318 \left(\begin{array}{lll} & 0 & x < \frac{2}{5} \\ & -4+10x & \frac{2}{5} \le x < \frac{1}{2} \\ \{ & 6-10x & \frac{1}{2} \le x < \frac{3}{5} \\ & 0 & \frac{3}{5} \le x \\ & \{x,0,1\} & \text{True} \end{array} \right) +$$

$$4.36673 \left(\begin{array}{lll} & 0 & x < \frac{1}{2} \\ & -5+10x & \frac{1}{2} \le x < \frac{3}{5} \\ \{ & 7-10x & \frac{3}{5} \le x < \frac{7}{10} \\ & 0 & \frac{7}{10} \le x \\ & \{x,0,1\} & \text{True} \end{array} \right) + 4.64225 \left(\begin{array}{lll} & 0 & x < \frac{3}{5} \\ & -6+10x & \frac{3}{5} \le x < \frac{7}{10} \\ \{ & 8-10x & \frac{7}{10} \le x < \frac{4}{5} \\ & 0 & \frac{4}{5} \le x \\ & \{x,0,1\} & \text{True} \end{array} \right) +$$

$$4.77609 \left(\begin{array}{lll} & 0 & x < \frac{7}{10} \\ & -7+10x & \frac{7}{10} \le x < \frac{4}{5} \\ \{ & 9-10x & \frac{4}{5} \le x < \frac{9}{10} \\ & 0 & \frac{9}{10} \le x \\ & \{x,0,1\} & \text{True} \end{array} \right) + 4.80745 \left(\begin{array}{lll} & 0 & x < \frac{4}{5} \\ & -8+10x & \frac{4}{5} \le x < \frac{9}{10} \\ \{ & 10-10x & \frac{9}{10} \le x < 1 \\ & 0 & 1 \le x \\ & \{x,0,1\} & \text{True} \end{array} \right)$$

Plot[Φ[x], {x, 0, 1}]



A valódi megoldás:

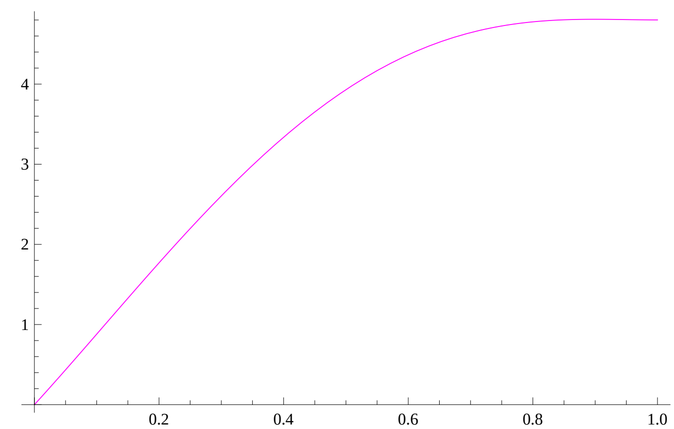
sol = DSolve[{ode, ics}, y[x], x];

sol = MapAll[Simplify, sol];

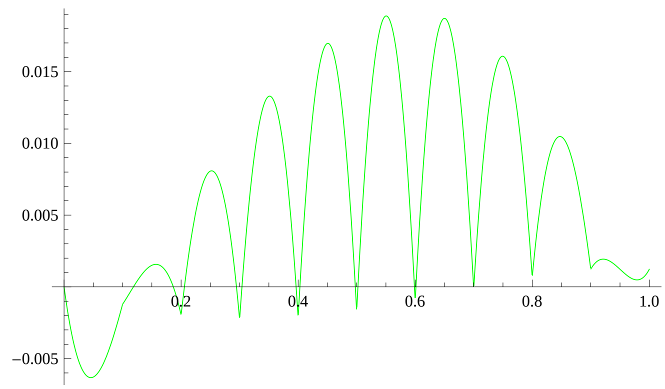
z[x_] = sol$_{[[1,1,2]]}$

$$\Big(100e^{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}x}{2}}\Big(5\left(1+\sqrt{5}\right)e^{\frac{1}{2}+\sqrt{5}+\frac{x}{2}}+2e^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+x\right)}+5\left(-1+\sqrt{5}\right)e^{\frac{1}{2}\left(1+x+2\sqrt{5}x\right)}-2e^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+x+2\sqrt{5}x\right)}-\big(1+\surd$$

Plot[z[x], {x, a, b}, PlotStyle → Magenta]



Plot[z[x] − Φ[x], {x, a, b}, PlotStyle → Green]



0.015
0.010
0.005
−0.005
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Irodalomjegyzék

?BG? [1] Bojtár Imre, Gáspár Zsolt: Végeselemmódszerek építőmérnököknek. Terc, 2003.

sarga [2] Susanne C. Brenner, L. Ridgway Scott: The mathematical Theory of finite element methods. 1994 Springer.

KF [3] A.N. Kolmogorov, Sz. V. Fomin: A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei. Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1981.

?popper? [4] Popper György: A végeselem-módszer matematikai alapjai. Műszaki Könyvkiadó, 1985.

SzNagy [5] Szőkefalvi Nagy Béla: Valósfüggvények és függvénysorok. SzTE Bolyai Intézet, 2002.