Matematika Plus 1
építőmérnök hallgatóknak

Simon Károly

2010.05.10

Tartalomjegyzék

1. I. előadás **3**
1.1. Kiegészítés az A2-ben tanultakhoz: Determináns 3
1.1.1. Elemi sor transzformációk hatása a determinánsra: . 5
1.1.2. Determináns geometriai jelentése: 6

2. II. előadás **8**
2.1. Gauss-Jordan elimináció 8
2.2. Kifeszített altér bázisának meghatározása 12

3. III. előadás **17**
3.1. Áttérés egyik bázisról a másikra 17
3.2. Lineáris transzformációk 19
3.2.1. Lineáris transzformáció mátrixai különböző bázisokban 21

4. IV. előadás **22**
4.1. A mátrix fundamentális alterei 22
4.2. Dimenzió tétel mátrixokra 23
4.3. Az A^TA és az AA^T mátrixok 25
4.4. Négyzetes mátrixok szinguláris érték felbontása 27
4.5. Merőleges vetítések $\mathbb{R}^n$-ben 28
4.6. Altérre vonatkozó projekció mátrixa 32
4.6.1. Alkalmazás I. lineáris egyenletrendszerek 35

5. A hatvány módszer **40**
5.1. Alkalmazás: Internet kereső motorokban 41

6. 5. előadás **45**
6.1. Differenciálszámítás magasabb dimenzióban 45

6.2. Magasabb rendű deriváltak 46

1. fejezet

I. előadás

1.1. Kiegészítés az A2-ben tanultakhoz: Determináns

$^{(Q)}2$

Legyen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

egy $n \times n$-es mátrix. Az A mátrix a_{ij} elemének **minorja** M_{ij} annak a mátrixnak a determinánsa, amelyet úgy kapunk, hogy az A mátrixból eldobjuk az i-edik sort és a j-edik oszlopot. A

$$C_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$$

számot az a_{ij} elem **cofactorának** hívjuk. Ekkor

$$det(A) = a_{i1}C_{i_1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}. \tag{1.1}$$

Ezt a kifejezést a **determináns i-edik sor szerinti cofactor kifejtés**ének mondjuk.

1. PÉLDA: Legyen $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Ekkor tekinthetjük az utolsó sor szerinti cofactor kifejtést:

$$det(A) = (-1)^{3+2} \cdot 2 \cdot (3 \cdot 4 - 2 \cdot 2) = -16$$

A 3×3-as mátrix determinánsát meg kaphatjuk a következő módon is:

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ aa_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \quad (1.2)$$

Ennek egy elmés általánosításaként egy tetszőleges $n \times n$-es determináns kiszámítható. Ennek leírásához szükség van a következő fogalomra: ha az $\{1, 2, \ldots n\}$ számok sorrendjének tetszőleges felcserélésével megkapjuk a $\{j_1, \ldots, j_n\}$ számokat, akkor azt mondjuk, hogy a $\{j_1, \ldots, j_n\}$ számok az $\{1, 2, \ldots n\}$ egy **permutációja**. Azt mondjuk, hogy a $\{j_1, \ldots, j_n\}$ permutáció páros, ha azon cserék száma amivel a $\{j_1, \ldots, j_n\}$–ből az $\{1, 2, \ldots n\}$ vissza nyerhető egy páros szám. Egyébként a permutáció páratlan. Például: ha $n = 3$ az

$$\{1, 2, 3\} \quad , \{2, 3, 1\}, \quad \{3, 1, 2\}$$

permutációk párosak, míg a

$$\{3, 2, 1\}, \quad \{2, 1, 3\}, \quad \{1, 3, 2\}$$

permutációk páratlanok. **Előjeles elemi szorzat**nak nevezzük a

$$\pm a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

alakú szorzatokat, ahol a + jelet akkor választjuk, ha a $\{j_1, \ldots, j_n\}$ permutáció páros egyébként a mínusz jelet választjuk.

1. TÉTEL: $det(A)$ egyenlő az összes lehetséges előjeles elemi szorzatok összegével.

Vegyük észre, hogy ez éppen (1.2) általánosítása. Ezen tételt használva be lehet látni, hogy:

2. TÉTEL: Minden A négyzetes ($n \times n$-es valamilyen n-re) mátrixra

$$det(A) = det(A^T).$$

Ez azt is jelenti, hogy az (1.1)-ben adott sor szerinti cofactor kifejtés helyett az oszlop szerinti cofactor kifejtést is használhatjuk. Vagyis minden $1 \leq j \leq n$-re:

$$det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots A_{nj}C_{nj}. \quad (1.3)$$

1.1.1. Elemi sor transzformációk hatása a determinánsra:

Emlékezzünk, hogy elemi sor transzformációnak neveztük ha

1. Az i-edik sor c-szeresét a j-edik sorhoz adjuk.
2. Az i-edik sort és a j-edik sort felcseréljük.
3. Az i-edik sort egy $c \neq 0$ számmal megszorozzuk.

Vegyük észre, hogy egy:

- Az 1. sor transzformációt megvalósíthatjuk az A mátrixon, ha az A mátrixot balról megszorzunk egy olyan mátrix-al, amely az I_n egység mátrixtól csak abban tér el, hogy a ji edik eleme nem nulla hanem c Jelöljük ezt a mátrixot $E_{ji}(c)$-vel.
- A 2. sor transzformációt megvalósíthatjuk az A mátrixon, ha az A mátrixot balról megszorzunk egy olyan mátrix-al, amely az I_n egység mátrixtól csak abban tér el, hogy
  - ij-edik és ji-edik eleme 1
  - ii-edik és jj-edik eleme 0.

  Legyen ezen a mátrix neve: $E_{i\leftrightarrow j}$
- A 3. sor transzformációt megvalósíthatjuk az A mátrixon, ha az A mátrixot balról megszorzunk egy olyan mátrix-al, amely az I_n egység mátrixtól csak abban tér el, hogy ii-edik eleme nem 1 hanem c. Legyen ezen a mátrix neve: $E_{ii}(c)$.

Mivel

$$det(E_{ij}(c)) = 1, \quad det(E_{i\leftrightarrow j}) = -1, \qquad det(E_{ii}(c)) = c,$$

ezért az 1. sor transzformáció nem változtat a determináns értékén. A második a determinánst előjelét megváltoztatja, a harmadik a determinánst c-szeresére változtatja.

1.1.2. Determináns geometriai jelentése:

Egy (négyzetes) mátrix determinánsa mindig egy szám. Ennek van abszolút értéke és előjele. Először megértjük a determináns abszolút értékének geometriai jelentését, azután pedig a determináns előjelének a geometriai jelentését értjük meg.

A determináns abszolút értékének a jelentése:

Jelöljük az

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrix j-edik oszlop vektorát $\mathbf{u}_j$-vel. Vagyis

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ezt úgy is írhatjuk, hogy

$$A = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n]$$

Vegyük észre, hogy

$$A \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{u}_i,$$

ahol $\mathbf{e}_i$ az i-edik koordináta egység vektor, vagyis az a vektor, aminek minden koordinátája 0 kivéve az i-edik koordinátát ami viszont 1-el egyenlő. Ezért az

$$\mathbf{y} \to A \cdot \mathbf{y} \tag{1.4}$$

leképezés az $\mathbb{R}^n$ egység kockáját vagyis a

$$K = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : 0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1\}$$

halmazt $1-1$ értelműen rá képezi az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ vektorok által kifeszített $P < \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n >$ parallelepipedonra. **A determináns abszolút értéke éppen ezen $P < \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n >$ parallelepipedon térfogata.** Vagyis az A mátris determinánsának abszolút értéke azt mondja meg, hogy az

$$f : \mathbf{y} \to A \cdot \mathbf{y}$$

lineáris leképezés esetén egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz $f(H)$ képének térfogata hányszorosa a H térfogatának. Képletben:

$$\text{térfogat} f(H) = |\det(A)| \cdot \text{térfogat}(H).$$

A determináns előjelének jelentése:

Ha a determináns előjele pozitív, akkor az

$$f : \mathbf{y} \to A \cdot \mathbf{y}$$

leképezés irányítás tartó (mint például a forgatások). Ha a determináns előjele negatív az f irányítás váltó (mint például a tükrözések).

2. fejezet

II. előadás

2.1. Gauss-Jordan elimináció

Az A2 előadáson tanult Gauss elimináció során a mátrixot sor-echelon alakra hoztuk elemi sor transzformációk egymás utáni alkalmazásaival. Emlékeztetek, hogy egy mátrix sor echelon alakban van ha:

1. A csupa nullából álló sorok (ha vannak a mátrixban egyáltalán) a mátrix utolsó sorai.
2. Ha egy sornak van nem nulla eleme, akkor az első nem nulla elem egyes.
3. Két egymás utáni sor mindegyike tartalmaz nem nulla elemet, akkor az első nem nulla elem (ami szükségszerűen egyes) az alsó sorban, jobbra van a felső sor első nem nulla elemétől (ami szintén egyes).

Nevezzük a fenti definícióban szereplő minden nem csupa nulla sor elején álló egyeseket pivot elemeknek és ezen elemek oszlopait pivot oszlopoknak. A sor echelon alakból a redukált sor echelon alakot úgy kapjuk hogy ha a sor-echelon alakból indulva, a pivot elemek sorainak megfelelő többszöröseit levonva a felettük lévő sorokból elérjük, hogy a mátrixban a pivot elemek felett csak nullák legyenek.

2. PÉLDA:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Az A mátrixból sor-echelon alakra hozás után kapjuk az:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixot, ahol a pirossal írt elemek a pivot elemek. Most alakítjuk ki a redukált sor-echelon formát:

Az utolsó nem csupa nulla sor (vagyis a mi esetünkben a harmadik sor) megfelelő szám szorosait hozzáadjuk a megelőző sorokhoz, hogy az utolsó nem csupa nulla sor pivot eleme felett csak nullák legyenek:

Vagyis az utolsó sor $\frac{7}{2}$-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz és ugyanebben a lépésben az utolsó sor -6 szorosát hozzáadjuk az első sorhoz. Kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

ahol a kék szín jelöli az újonnan kialakított nullákat az utolsó sor pivot eleme (piros 1-es) felett. Most az így kapott mátrix második sorának pivot eleme feletti pozíción akarunk nullát kialakítani. Ehhez, hozzáadjuk a második sor 5-szörösét az első sorhoz. Ennek eredményeként kapjuk a redukált sor-echelon alakú mátrixot:

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy az A' sor-echelon alakban és az A'' redukált sor-echelon alakban a pivot elemek ugyanazok.

Azt a folyamatot, amelynek során az A mátrixból a redukált sor-echelon alakú A'' mátrixot létrehoztuk **Gauss-Jordán eliminációnak** hívjuk.

```
> with(linalg):
```

```
> A:=matrix(3,6,[0,0,-2,0,7,12,2,4,-10,6,12,28,2,4,-5,6,-5,-1]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

```
>gaussjord(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. PÉLDA: Adott a síkon 4 pont, melyek x koordinátái különbözőek. Ehhez létezik egyetlen olyan legfeljebb harmadfokú polinom, amely mind a négy adott ponton átmegy. Határozzuk meg ezt a polinomot, ha a pontok

$$P_1 = (-2, -2),\ P_2 = (-1, 4),\ P_3 = (1, 2),\ P_4 = (2, 3).$$

Megoldás: Jelöljük a keresett (legfeljebb) harmadfokú polinomot $p(x)$-el. Ekkor

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

Azt hogy a $p(x)$ polinom átmegy az adott négy ponton a következő négy egyenlet írja le:

$$\begin{aligned} a_0 + (-2)a_1 + (-2)^2 a_2 + (-2)^3 a_3 &= -2 \\ a_0 + (-1)a_1 + (-1)^2 a_2 + (-1)^3 a_3 &= 4 \\ a_0 + (1)a_1 + (1)^2 a_2 + (1)^3 a_3 &= 2 \\ a_0 + (2)a_1 + (2)^2 a_2 + (2)^3 a_3 &= 3 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ezt Gauss-Jordan eliminációval redukált sor-echelon alakra hozzuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{23}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

Az utolsó oszlopban álló elemek adják rendre a_0, a_1, a_2, a_3 értékét. Vagyis a keresett polinom:

$$p(x) = \frac{23}{6} - \frac{7}{4}x - \frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{4}x^3.$$

Ezt az ábrát a következő MAPLE program eredményezi:

```
> x1:=[-2,-1,1,2]:

> y1:=[-2,4,2,3]:

> #corresponding data points:

> with(stats):with(plots):

Warning, these names have been redefined: anova, describe, fit,
importdata, random, statevalf, statplots, transform


> pts:=zip((x,y)->[x,y],x1,y1):

> pt_plot:=pointplot(pts):

> inter_poly:=interp(x1,y1,x):

> ip_plot:=plot(inter_poly, x=-3..4,color=GREEN):

> ls_fit1:=fit[leastsquare[[x,y],y=a*x+b, {a,b}]]([x1,y1]):

> ls_plot1:=plot(rhs(ls_fit1),x=-3..4,color=blue):

> ls_fit2:=fit[leastsquare[[x,y],y=a*x^2+b*x+c, {a,b,c}]]([x1,y1]):

> ls_plot2:=plot(rhs(ls_fit2),x=-3..4,color=red):

> display([pt_plot,ls_plot1,ls_plot2,ip_plot]);
```

2.2. Kifeszített altér bázisának meghatározása

Adottak az $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s\} \in \mathbb{R}^d$-beli vektorok. Legyen $W \subset \mathbb{R}^d$ az S által kifeszített altér. Vagyis W azon vektorok összesége, amelyek előállnak

S-beli vektorok lineáris kombinációjaként.

$$W = \{\mathbf{w} : \exists \alpha_1, \dots, \alpha_s;\ \mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_s \mathbf{v}_s\}.$$

Két természetes probléma fordul elő nagyon gyakran:

1. Találjuk meg W egy *tetszőleges* bázisát.
2. Találjuk meg W egy olyan bázisát, *amely S-beli vektorokból áll*.

Az első problémát megoldottuk A2-ben. Nevezetesen az S-beli vektorokból mint sor vektorokból alkottunk egy B mátrixot. Ezt a B mátrixot Gauss eliminációval sor-echelon alakra hoztuk. A nem nulla sor vektorok alkották a W egy bázisát. Ez így egyszerű és nagyon gyors, viszont az ilymódon kapott bázis vektorok általában nem az S-beli vektorok közül kerülnek ki tehát ez a módszer megoldja az első problémát de nem oldja meg a nehezebb második problémát. A második probléma megoldásához szükséges a következő észrevétel:

<u>Észrevétel:</u>
Legyen A egy $k \times s$ méretű mátrix melynek oszlop vektorai $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_s \in \mathbb{R}^k$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{ks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \dots & \mathbf{c}_s \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Tegyük fel, hogy az oszlop vektorok között fennáll

$$\mathbf{c}_i = \sum_{k \neq i} \alpha_k \mathbf{c}_k.$$

Hajtsunk végre egy tetszőleges elemi sor transzformációt az A mátrixon. Így kapjuk az A' mátrixot, melynek oszlop vektorait jelöljük $\mathbf{c}'_1, \dots, \mathbf{c}'_s \in \mathbb{R}^k$-vel. Vagyis az elemi sor transzformáció eredménye:

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{k1} & \dots & a'_{ks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}'_1 & \dots & \mathbf{c}'_s \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

3. TÉTEL: Használva a fenti jelöléseket:

$$\mathbf{c}'_i = \sum_{k \neq i} \alpha_k \mathbf{c}'_k.$$

Vagyis az A' mátrix oszlop vektorai között ugyanazok az összefüggőségi viszonyok vannak mint az A mátrix esetén.

A fenti 2. probléma megoldása az Észrevétel segítségével:

Legyen A az a $k \times s$ méretű mátrix, melynek oszlop vektorait az S elemei ugyanazon sorrendben.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{ks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_s \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Hajtsuk végre a Gauss-Jordan eliminációt. Vagyis az A mátrixból kiindulva hajtsuk végre elemi sor transzformációk azon sorozatát, melynek eredményeként kapunk egy redukált sor-echelon alakú mátrixot, melyet A'-nek nevezünk. Ennek a pivot oszlopainak megfelelő S-beli elemek alkotják a W-nek S-beli bázisát.

4. PÉLDA: Legyen W a következő vektorok által kifeszített altere $\mathbb{R}^4$-nek:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg a W egy olyan bázisát, melynek minden eleme ezen $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5$ vektorok közül kerül ki.

Megoldás: Legyen A az a mátrix, melynek oszlop vektorai az adott vektorok:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Alkalmazzuk a Gauss-Jordan eliminációt a MAPLE segítségével::

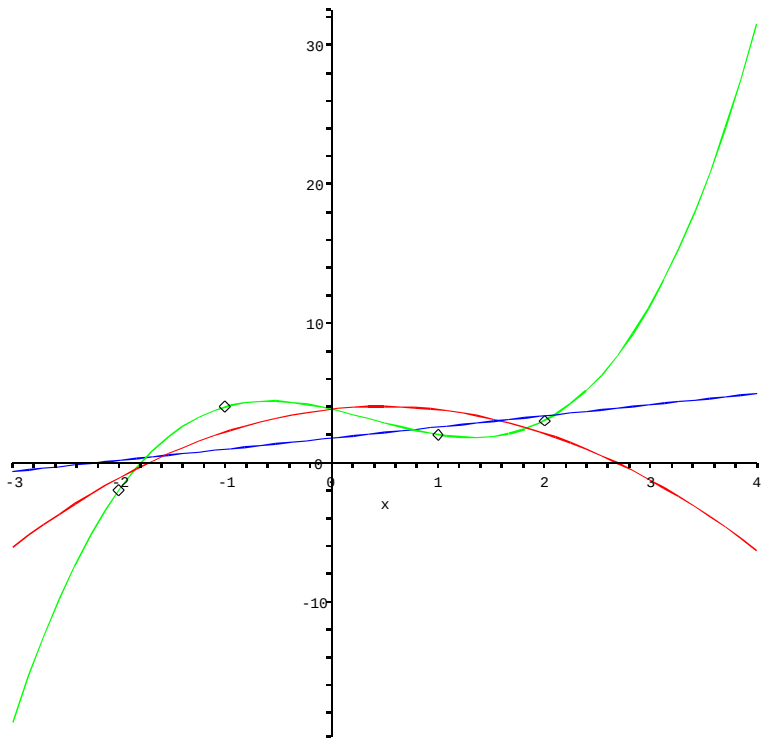
```
> with(linalg):
> A:=matrix(4,5,[1,2,0,2,5,-2,-5,1,-1,-8,0,-3,3,4,1,3,6,0,-7,2]):
> gaussjord(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ahol a kékkel írt elemek a pivot elemek az oszlopaik a pivot oszlopok. A tétel értelmében a pivot oszlopoknak megfelelő sorszámú $\mathbf{v}$ vektorok alkotják a W bázisát. Vagyis a

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$$

a W egy bázisát adja.



2.1. ábra. A $P_1, \ldots, P_4$ pontokat legjobban megközelítő első- (kék) másod- (piros) és harmadfokú (zöld) polinomok.

3. fejezet

III. előadás

3.1. Áttérés egyik bázisról a másikra

Az $\mathbf{R}^n$ természetes bázisának hívjuk a $T = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ bázist, ahol

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \ldots \ \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{v}$ vektor természetes bázisban vett koordinátáit vagy $[\mathbf{v}]_T$-vel jelöljük vagy egyszerűen csak $\mathbf{v}$-t írunk.

Ha $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ egy tetszőleges bázisa az $\mathbf{R}^n$-nek, akkor $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ vektor egyértelműen felírható

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{u}_n$$

alakban. Ekkor azt mondjuk a B bázisban a $\mathbf{v}$ vektor koordinátái: $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$.

Jelben:

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

5. PÉLDA: Ha $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \end{bmatrix}$, akkor

$$\mathbf{v} = \mathbf{2u}_1 - 3\mathbf{u}_2$$

tehát $[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, ahol a $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ bázis.

4. TÉTEL: Ha $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ egy tetszőleges bázisa az $\mathbf{R}^n$-nek, akkor $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ vektorra:

$$[\mathbf{v}]_T = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] \cdot [\mathbf{v}]_B \,,$$

ahol $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ egy mátrix, melynek első oszlopa $\mathbf{u}_1$, második oszlopa $\mathbf{u}_2$, ... ,n-edik oszlopa $\mathbf{u}_n$. Ezt a jelölést később is használjuk.

Bizonyítás. Ha $[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, akkor

$$[\mathbf{v}]_T = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{u}_n = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] \cdot [\mathbf{v}]_B. \quad \blacksquare$$

1. KÖVETKEZMÉNY: Egy $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ vektor koordinátáit a $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ bázisban a következő formula adja:

$$[\mathbf{v}]_B = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]^{-1} \cdot [\mathbf{v}]_T \,. \tag{3.1}$$

2. KÖVETKEZMÉNY: Ha $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ és $B' = \{\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_n\}$ bázisai az $\mathbf{R}^n$-nek és $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$, akkor

$$[\mathbf{v}]_{B'} = [\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_n]^{-1} \cdot [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] \cdot [\mathbf{v}]_B \tag{3.2}$$

1. DEFINÍCIÓ: A $[\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_n]^{-1} \cdot [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ mátrixot a B bázisról a B' bázisra való áttérés mátrixának hívjuk.

6. PÉLDA: Határozzuk meg a $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektor koordinátáit a $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ bázisban!

Megoldás: Legyen $P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. A 1. Következmény miatt $[\mathbf{v}]_B = P^{-1}\mathbf{v}$. Mivel $\det(P) = 10$, ezért $P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Tehát

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ -0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.8 \\ -0.4 \end{bmatrix}.$$

7. PÉLDA: Adottak a következő bázisok:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \qquad B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \tag{3.3}$$

ha $\mathbf{w}$ vektor koordinátái a B-ben $[\mathbf{w}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ kérdés mik a $\mathbf{w}$ koordinátái a B'-ben?

Megoldás: Alkalmazhatjuk a (3.2) formulát:

$$[\mathbf{w}]_{B'} = [\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2']^{-1} \cdot [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \cdot [\mathbf{w}]_B. \tag{3.4}$$

Ehhez: Legyen $P := [\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2'] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Ekkor $\det(P) = 2$, tehát $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. Tehát $[\mathbf{w}]_{B'} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{35}{2} \\ -\frac{99}{2} \end{bmatrix}$.

3.2. Lineáris transzformációk

2. DEFINÍCIÓ: Az $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^s$ leképezést lineáris transzformációnak hívjuk, ha

a. $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$;

b. $\mathrm{F}(c\mathbf{u}) = cF(\mathbf{u}); \forall c \in \mathbf{R}$ és $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$.

8. PÉLDA: A sík és az egyenes lineáris transzformációi:

1. Számegyenes lineáris transzformációi az $F(x) = cx$ alakú függvények.
2. A sík lineáris transzformációi például az origó körüli forgatások, origón átmenő egyenesre tükrözések, vagy $F(x_1, x_2) = (2x_1, 3x_2)$.

9. PÉLDA: Határozzuk meg az origó körüli (pozitív irányú) 30°-os szöggel való forgatás mátrixát, majd ennek segítségével számítsuk ki a $\mathbf{v} = [1, 5]$ vektor 30°-os szöggel való elforgatásával kapott $\mathbf{w}$ vektort!

Megoldás: Mivel *nem* specifikáltuk, hogy melyik bázisról van szó, ezért az $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ természetes bázisban dolgozunk. Itt először meghatározzuk $\mathbf{b}_1 = F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ és $\mathbf{b}_2 = F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ értékeket, majd ezekből képezzük a $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$ mátrixot

$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ és $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$. Tehát $B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$. Ennek segítségével megkaphatjuk annak a $\mathbf{w}$ vektornak a koordinátáit, amit a $\mathbf{v} = (1, 5)$ vektor origó körüli (pozitív irányú) 30^0-os forgatásával kapunk:

$$\mathbf{w} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

3. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy a $B := \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ bázisban az $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció mátrixa M_B, ha minden

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2$$

vektorra:

$$[F(\mathbf{a})]_B = M_B \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = M_B \cdot [\mathbf{a}]_B \tag{3.5}$$

teljesül.

Alkalmazva a definíciót az $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorokra, kapjuk, hogy

$$\boxed{M_B = \begin{bmatrix} [F(\mathbf{u}_1)]_B & [F(\mathbf{u}_2)]_B \end{bmatrix}}, \tag{3.6}$$

vagyis, a 2×2-es M_B mátrix első oszlopa $[F(\mathbf{u}_1)]_B$ és második oszlopa: $[F(\mathbf{u}_2)]_B$.

3.2.1. Lineáris transzformáció mátrixai különböző bázisokban

5. TÉTEL: Legyen $P := [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ és legyen M_T, a F lineáris transzformáció mátrixa a természetes bázis ban, és M_B a $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ bázisban. Ekkor

$$\boxed{M_B = P^{-1} \cdot M_T \cdot P}. \tag{3.7}$$

Bizonyítás. Emlékezzünk, hogy definíció szerint M_B az a mátrix, amelyre teljesül, hogy bármely $\mathbf{a}$ vektorra:

$$[F(\mathbf{a})]_B = M_B \cdot [\mathbf{a}]_B. \tag{3.8}$$

Legyen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tetszőleges rögzített. Alkalmazzuk a (3.1) formulát a $\mathbf{v} = F(\mathbf{a})$-ra:

$$\begin{aligned} [F(\mathbf{a})]_B &= P^{-1} \cdot [F(\mathbf{a})]_T \\ &= P^{-1} \cdot M_T \cdot [\mathbf{a}]_T \\ &= \underbrace{P^{-1} \cdot M_T \cdot P}_{M_B} \cdot [\mathbf{a}]_B \end{aligned}$$

■

4. fejezet

IV. előadás

4.1. A mátrix fundamentális alterei

4. DEFINÍCIÓ: Adott egy $k \times s$ méretű A mátrix, melynek:
oszlop vektorai: $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{v}_s \in \mathbb{R}^k$ és a sor vektorai $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_k \in \mathbb{R}^s$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{ks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \ldots & \mathbf{c}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

1. $\mathbb{R}^k$-ban azon alteret, melyet az A mátrix $\{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_s\}$ oszlop vektorai feszítenek ki $\mathrm{col}(A)$-val jelöljük.

2. $\mathbb{R}^s$-ben azon alteret, melyet az A mátrix $\{\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_k\}$ sor vektorai feszítenek ki $\mathrm{row}(A)$-val jelöljük.

3. A2-ben tanultuk, hogy a sor vektorok és az oszlop vektorok által kifeszített alterek (noha az első $\mathbb{R}^s$-beli a második $\mathbb{R}^k$-beli) dimenziói egyenlőek. Ezen közös dimenziót hívjuk a mátrix rangjának, jele: $\mathrm{rank}(A)$.

4. Az A mátrix nullterének hívjuk azon $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^s$ vektorok alterét, melyekre: $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, jele $\mathrm{null}(A)$. Az A nulltérének dimenziója az A nulluty-je, jele $\mathrm{nullity}(A)$.

Mivel az A mátrix-al együtt az A^T transzponált mátrix is fontos ezért a transzponált mátrixra is fel akarjuk írni ugyanezeket a mennyiségeket. Vi-

szont a transzponálás sort oszlopba visz és viszont, ezért:

$$\mathrm{row}(A^T) = \mathrm{col}(A) \text{ és } \mathrm{row}(A) = \mathrm{col}(A^T).$$

5. DEFINÍCIÓ: Az A mátrix fundamentális alterei:

$$\mathrm{row}(A), \qquad \mathrm{col}(A), \qquad \mathrm{null}(A), \qquad \mathrm{null}(A^T).$$

4.2. Dimenzió tétel mátrixokra

6. TÉTEL: (Dimenzió tétel mátrixokra) Legyen A egy $k \times s$ méretű (tehát nem feltétlen négyzetes) mátrix. Ekkor

$$\boxed{\mathrm{rank}(A) + \mathrm{nullity}(A) = s.} \tag{4.2}$$

Bizonyítás. Tekintsük az

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

egyenletet (itt $\mathbf{x}, \mathbf{0} \in \mathbb{R}^s$). Gauss eliminációt alkalmazva ezen egyenlet kiegészített mátrixát sor-echelon alakra hozzuk. Tegyük fel, hogy a nem csupa nulla sorok száma r-el egyenlő. Ekkor $\mathrm{rank}(A) = r$. Minden nem csupa nulla sor egy ki nem küszöbölhető egyenletet jelent ami meg köt egy változót. Tehát az összesen s változóból megkötünk r változót. Így tehát marad $s - r$ szabad változónk. Vagyis:

$$\text{szabad változók száma } = s - \mathrm{rank}(A)$$

Más szavakkal:

$$\mathrm{rank}(A) + \text{ szabad változók száma } = s.$$

Másrészt a szabad változók száma éppen az $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenlet megoldásai által meghatározott altér dimenziója. Más szavakkal:

$$\mathrm{nullity}(A) = \text{ szabad változók száma }.$$

Összetéve a két utolsó egyenletet kapjuk a tétel állítását. ■ Legyen $S \subset \mathbb{R}^d$. Ekkor az S merőleges alterének hívjuk azon $\mathbb{R}^d$-beli vektorok halmazát, melyek az S **összes** elemére merőlegesek, jele $S^\perp$.

$$S^\perp := \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d : \forall \mathbf{v} \in S;\ \mathbf{v} \perp \mathbf{w} \right\}.$$

7. TÉTEL: (Alterekre vonatkozó dimenzió tétel) Legyen W az $\mathbb{R}^s$ egy altere. Ekkor

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = s.$$

Bizonyítás. Ha W az $\mathbb{R}^s$-nek a két triviális altere $(\mathbf{0}, \mathbb{R}^s)$ közül az egyik, akkor a tétel triviálisan igaz. Egyébként pedig választunk egy bázist a W. Tegyük fel, hogy ez a bázis k elemű. Ebből a bázisból mint sor vektorokból képezzük a $k \times s$ méretű A mátrixot. Nyilván

$$\mathrm{row}(A) = W \text{ és } \mathrm{null}(A) = W^\perp. \tag{4.3}$$

■ Tehát az előző tételt használva:

$$\dim W + \dim W^\perp = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{nullity}(A) = s.$$

Házi feladat: Igazoljuk, hogy minden A mátrixra:

(a)

$$\boxed{\mathrm{col}(A)^\perp = \mathrm{null}(A^T).} \tag{4.4}$$

(b)

$$\boxed{\mathrm{row}(A)^\perp = \mathrm{null}(A).} \tag{4.5}$$

A fenti tétel következtében belátható, hogy:

8. TÉTEL: Legyen A egy $n \times n$-es (tehát négyzetes) mátrix. Legyen továbbá $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ az A mátrixhoz tartozó lineáris leképezés melyet a következőképpen definiálunk:

$$\mathbf{x} \mapsto A \cdot \mathbf{x}.$$

Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

(a) Az A mátrix redukált sor-echelon alakja egyenlő az n-dimenziós egység mátrix-al I_n-el.

(b) Az A mátrixot felírhatjuk elemi mátrixok szorzataként.

(c) Az A mátrix invertálható.

(d) $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$-nak a triviális $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ az egyetlen megoldása.

(f) Minden $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$-re az $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$-nek pontosan egy megoldása van.

(g) $\det(A) \neq 0$.

(h) $\lambda = 0$ nem sajátértéke az A mátrixnak.

(i) T_A leképezés $1-1$ értelmű.

(j) T_A leképezés ráképezés $\mathbb{R}^n$-re.

(k) Az A mátrix oszlop vektorai lineárisan függetlenek.

(l) Az A mátrix sor vektorai lineárisan függetlenek.

(m) Az A mátrix oszlop vektorai az $\mathbb{R}^n$ egy bázisát alkotják.

(n) Az A mátrix sor vektorai az $\mathbb{R}^n$ egy bázisát alkotják.

(o) $\operatorname{rank}(A) = n$.

(p) $\operatorname{nullity}(A) = 0$.

A 7. Tétel egy másik következménye:

9. TÉTEL: Legyen W az $\mathbb{R}^n$-nek egy $n-1$ dimenziós altere. Ekkor létezik egy $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ vektor, hogy

$$W^\perp = \{c \cdot \mathbf{a} : c \in \mathbb{R}\}.$$

Vagyis $W^\perp$ az $\mathbf{a}$ vektor által meghatározott egyenes. Az ilyen W altereket hipersíkoknak hívjuk.

Bizonyítás. 7. Tételből tudjuk, hogy ekkor $\dim(W^\perp) = 1$ vagyis $W^\perp$ egy origón átmenő egyenes. ■

4.3. Az $A^T A$ és az AA^T mátrixok

Adott az A az a $k \times s$ méretű mátrix, melynek oszlop vektorait $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_s$ és sor vektorai: $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_k$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{ks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \ldots & \mathbf{c}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_s \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Ekkor

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \dots & \mathbf{c}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_1 & \dots & \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{c}_s \cdot \mathbf{c}_1 & \dots & \mathbf{c}_s \cdot \mathbf{c}_s \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \dots & \mathbf{r}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 & \dots & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_1 & \dots & \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_k \end{bmatrix}$$

10. TÉTEL: Legyen A egy $k \times s$ méretű mátrix. Ekkor

(a) $\mathrm{null}(A) = \mathrm{null}(A^T A)$,

(b) $\mathrm{row}(A) = \mathrm{row}(A^T A)$,

(c) $\mathrm{col}(A^T) = \mathrm{col}(A^T A)$,

(d) $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^T A)$.

Bizonyítás. Csak az (a) részt bizonyítjuk: Tehát megmutatjuk, hogy

$$\mathrm{null}(A) = \mathrm{null}(A^T A). \tag{4.7}$$

Ehhez két dolgot kell megmutatni:

(i) Ha $\mathbf{a} \in \mathrm{null}(A)$, akkor $\mathbf{a} \in \mathrm{null}(A^T A)$

(ii) Ha $\mathbf{a} \in \mathrm{null}(A^T A)$, akkor $\mathbf{a} \in \mathrm{null}(A)$

Az (i) triviális hiszen

$$\mathbf{a} \in \mathrm{null}(A) \Leftrightarrow A \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow A^T \cdot (A \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{0} \Rightarrow (A^T A) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Most megmutatjuk, hogy a (ii) rész is teljesül: Legyen $\mathbf{a} \in \mathrm{null}(A^T A)$. Ez azt jelenti, hogy $A^T A \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^s$ vektor merőleges a $\mathrm{row} A^T A$ altérre. Vegyük észre, hogy

$$(A^T A)^T = A^T A$$

vagyis az $A^T A$ mátrix szimmetrikus. Ezért az $\mathbf{a}$ vektor merőleges a $\mathrm{col}(A^T A) = \mathrm{row}(A^T A)$ altérre is. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{a}$ vektor merőleges minden $A^T A \cdot \mathbf{y}$ alakú vektorra bármi is az $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$ vektor. Tehát az $\mathbf{a}$ vektor merőleges az $A^T A \cdot \mathbf{a}$ vektorra is. Ezért:

$$0 = \mathbf{a}^T \cdot ((A^T A)\mathbf{a}) = (\mathbf{a}^T A^T) \cdot (A\mathbf{a}) = (A\mathbf{a})^T \cdot (A\mathbf{a}).$$

Innen pedig $\mathbf{0} = A\mathbf{a}$ vagyis $\mathbf{a} \in \mathrm{null}(A)$. ■

4.4. Négyzetes mátrixok szinguláris érték felbontása

Mi itt csak a négyzetes mátrixok szinguláris érték felbontását tárgyaljuk. Legyen A egy $d \times d$-es mátrix, melyre

$$\operatorname{rank}(A) = k \leq d. \tag{4.8}$$

Legyenek az $A^T A$ mátrix sajátértékei csökkenő sorrendben:

$$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_d,$$

ezek közül az első k nem nulla de mindegyik nem negatív. Ez azért van mert ha $\mathbf{v}_j$ az $A^T A$ mátrixnak a λ_j-hez tartozó egység hosszú sajátvektora, akkor:

$$\|A\mathbf{v}_j\|^2 = A\mathbf{v}_j \cdot A\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j \cdot A^T A\mathbf{v}_j = \lambda_j \cdot (\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_j) = \lambda_j \cdot \|\mathbf{v}_j\|^2,$$

tehát $\lambda_j \geq 0$. Mivel ezek a $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ számok mind nem negatívak tekinthetjük a négyzetgyökeiket:

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_d.$$

Ezeket hívjuk az A mátrix szinguláris értékeinek. Tekintsük a

$$V = [\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_d]$$

ortogonális mátrixot. Végül legyen

$$\mathbf{u}_i := \frac{A\mathbf{v}_i}{\alpha_i}.$$

Ha $i \neq j$, akkor:

$$A\mathbf{v}_i \cdot A\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i \cdot \underbrace{A^T A\mathbf{v}_j}_{\lambda_j \mathbf{v}_j} = \lambda_j \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0.$$

Tehát az $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d\}$ rendszer ortonormált rendszer. Képezzük az

$$U = [\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_d]$$

mátrixot és legyen D az a diagonális mátrix, melynek főátlójában az $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ állnak.

11. TÉTEL: A fenti jelölésekkel:

$$A = U \cdot D \cdot V^T. \tag{4.9}$$

Az $\mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}_d$ vektorok a **baloldali szinguláris vektorok** és a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$ a **jobboldali szinguláris vektorok**.

Bizonyítás.

$$UD = [\alpha_1 \mathbf{u}_1, \ldots, \alpha_d \mathbf{u}_d].$$

Továbbá

$$AV =$$

$$\begin{aligned} UD &= [\alpha_1 \mathbf{u}_1, \ldots, \alpha_d \mathbf{u}_d] \\ &= [A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_d] \\ &= A \cdot V \end{aligned}$$

Innen:

$$UDV^{-1} = A.$$

Viszont tudjuk, hogy V ortogonális, vagyis $V^{-1} = V^T$. Tehát

$$UDV^T = A.$$

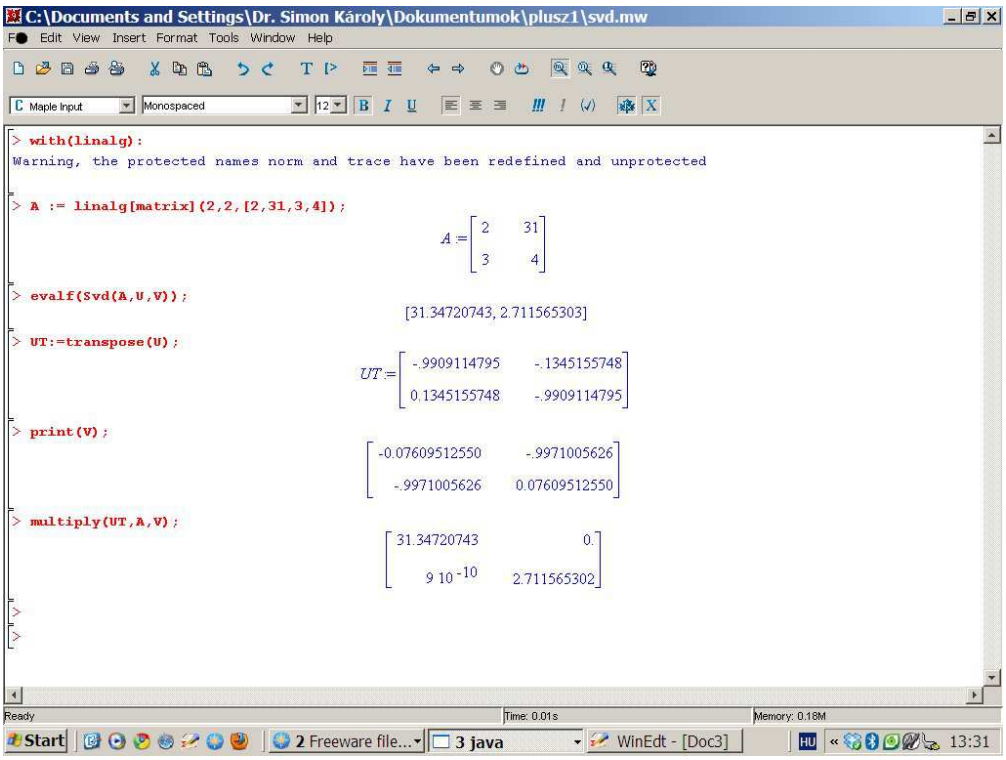
■

4.5. Merőleges vetítések $\mathbb{R}^n$-ben

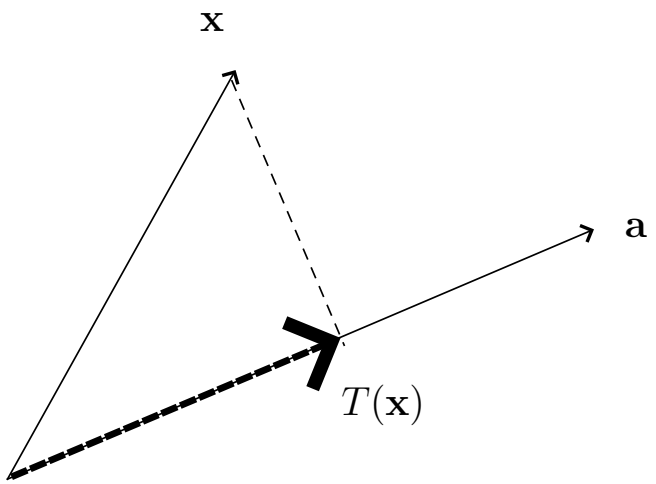
1. FELADAT: (Merőleges vetítés $\mathbb{R}^2$-ben) Rögzítsünk egy $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ vektort. Legyen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az a lineáris transzformáció, amely minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ vektorhoz hozzá rendeli ezen $\mathbf{x}$ vektornak az $\mathbf{a}$ vektor egyenesére vett merőleges vetület vektorát (l. 4.2. ábra).

2. FELADAT: (Merőleges vetítés $\mathbb{R}^3$-ban) Rögzítsünk $\mathbb{R}^3$-ban egy olyan S síkot, amely átmegy az origón. Legyen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az a lineáris transzformáció, amely minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ vektorhoz hozzá rendeli ezen $\mathbf{x}$ vektornak az S síkra vett merőleges vetület vektorát (l. 4.3. ábra).

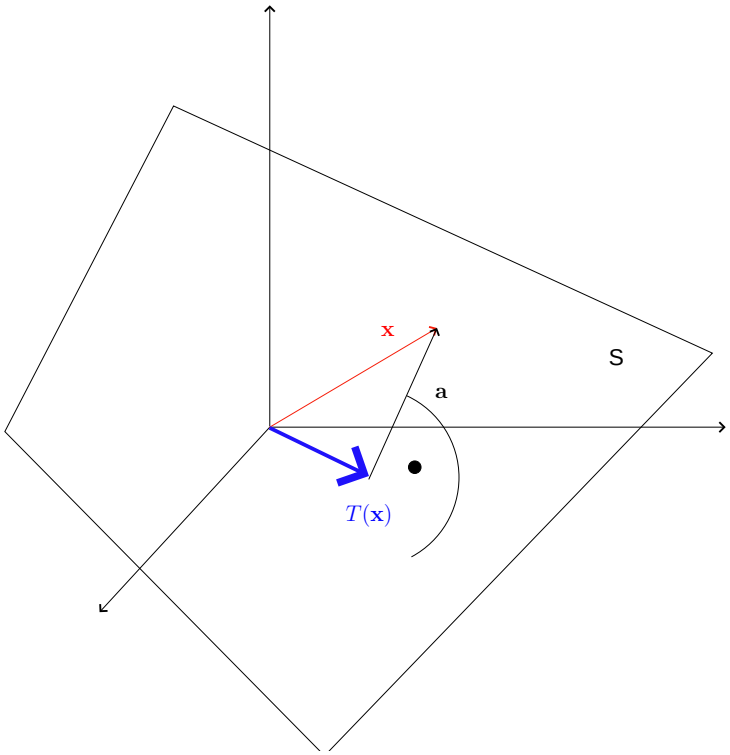
Most a fentiekhez hasonló feladatok megoldásait tanuljuk meg abban az esetben mikor n dimenziós térben valamely $k < n$ dimenziós altérre vetítünk.



4.1. ábra. Szinguláris érték felbontás Maple-ben.



4.2. ábra. $T(\mathbf{x})$ az $\mathbf{a}$ vektor egyenesére való merőleges vetület **vektor**



4.3. ábra. $T(\mathbf{x})$ az S síkra való merőleges vetület **vektor**

A fenti **4.2. Feladat megoldása**:

$$T(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{x} \cdot \frac{1}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{a}}_{\text{az } \mathbf{x}\text{-nek az } \mathbf{a}\text{-ra vett vetületének hossza}} \cdot \frac{1}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{a}$$

Tehát

$$T(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \cdot \mathbf{a}.$$

Nyilvánvalóan a nevezőt felírhatjuk mint $\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}$. Házi feladat meggondolni, hogyha tekintjük a

$$P = \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

$n \times n$-es mátrixot, akkor erre

$$T(\mathbf{x}) = P \cdot \mathbf{x} \tag{4.10}$$

teljesül, vagyis a T lineáris transzformáció mátrixa a természetes bázisban a P mátrix.

4.6. Altérre vonatkozó projekció mátrixa

12. TÉTEL: (Alterekre vonatkozó projekciós tétel) Adott egy nem triviális W altere $\mathbb{R}^n$-nek. Legyen $T_W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ az a lineáris transzformáció, amely minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz hozzárendeli az $\mathbf{x}$ vektornak a W altérre való merőleges vetületét. Ekkor a T lineáris transzformáció P mátrixát a természetes bázisban megkapjuk a következőképpen:

$$P = M(M^TM)^{-1}M^T, \tag{4.11}$$

ahol M egy olyan mátrix, melynek oszlop vektorai a W egy bázisának elemei.

1. MEGJEGYZÉS: Így persze az M mátrix választása nem egyértelmű, de attól függetlenül a P mátrix természetesen ugyanaz lesz az M minden lehetséges értékeire.

10. PÉLDA: Legyen S az $x - 4y + 2z = 0$ sík.

(a) Határozzuk meg az S-re való merőleges vetítés P mátrixát!

(b) Használva az előző rész eredményét számítsuk ki az $A = (1, 3, 7)$ pontnak az S síkra eső merőleges vetületét!

Megoldás (a): Vegyünk két nem párhuzamos vektort az S síkból. Ezek nyílván az S egy bázisát adják. Ezt megtehetjük úgy hogy az egyik pont esetén: $y = 1, z = 0$ majd a másik pont esetén $y = 0, z = 1$ értékeket választjuk. Ekkor az első esetben $x = 4$ a másodikban pedig $x = -2$. Tehát az S sík egy bázisa:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{-2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ezért az M mátrix:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & \text{-2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maple használatával:

```
> with(linalg):

> M:=matrix(3,2,[4,-2,1,0,0,1]):

> B:=inverse(multiply(transpose(M),M)):

> P:=multiply(M,B,transpose(M));
```

$$P = \begin{bmatrix} \frac{20}{21} & \frac{4}{21} & -\frac{2}{21} \\ \frac{4}{21} & \frac{5}{21} & \frac{8}{21} \\ -\frac{2}{21} & \frac{8}{21} & \frac{17}{21} \end{bmatrix}$$

Tehát

$$P = M(M^T M)^{-1} M^T = \frac{1}{21} \cdot \begin{bmatrix} 20 & 4 & \text{-2} \\ 4 & 5 & 8 \\ \text{-2} & 8 & 17 \end{bmatrix}.$$

Megoldás (b): $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$T(\mathbf{x}) = P \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{20}{21} & \frac{4}{21} & -\frac{2}{21} \\ \frac{4}{21} & \frac{5}{21} & \frac{8}{21} \\ -\frac{2}{21} & \frac{8}{21} & \frac{17}{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{25}{7} \\ \frac{47}{7} \end{bmatrix}.$$

12. Tétel bizonyítása. Legyen $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ egy bázisa W-nek. Legyen M az az $n \times k$ méretű mátrix, melynek oszlopai a $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ vektorok. Jelben:

$$M = [\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k]$$

Ekkor mint azt (4.5)-ban láttuk

$$W = \mathrm{col}(M) \text{ és } W^{\perp} = \mathrm{null}(M^T),$$

Az $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ fel lehet írni mint W-beli és $W^{\perp}$-beli összetevők összegeként (hasonlóan mint a (4.3). ábrán). A W-beli összetevő a $T(\mathbf{x})$ a $W^{\perp}$-beli összetevőt jelöljük $\mathbf{a}$-val. Tehát

$$\mathbf{x} = T(\mathbf{x}) + \mathbf{a}, \tag{4.12}$$

ahol $T(\mathbf{x}) \in \mathrm{col}(M)$ és $M^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$ teljesül. Vegyük észre, hogy

$$T(\mathbf{x}) \in \mathrm{col}(M) \Leftrightarrow \exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^k : \; T(\mathbf{x}) = M \cdot \mathbf{v} \tag{4.13}$$

és

$$M^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \Leftrightarrow M^T(\underbrace{\mathbf{x} - T(\mathbf{x})}_{\mathbf{a}}) = \mathbf{0}. \tag{4.14}$$

Tehát HA be tudjuk látni, hogy létezik **egyetlen** $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ amire:

$$M^T \cdot (\mathbf{x} - M \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \tag{4.15}$$

akkor

$$T(\mathbf{x}) = M \cdot \mathbf{v} \text{ és } \mathbf{a} = \mathbf{x} - T(\mathbf{x}) \tag{4.16}$$

adja a fent keresett megoldást egyértelműen. Ehhez írjuk át a (4.15) egyenletet:

$$(M^T M) \cdot \mathbf{v} = M^T \cdot \mathbf{x}. \tag{4.17}$$

Ennek az egyenletnek létezik és egyértelmű a megoldása az ismeretlen $\mathbf{v}$ vektorra, mivel

- az $M^T M$ egy $k \times k$-as mátrix,
- $\operatorname{rank}(M^T M) = k$.

A második állítás abból jön, hogy egyrészt $\operatorname{rank}(M) = k$, másrészt minden B mátrixra $\operatorname{rank}(B^T B) = \operatorname{rank}(B)$ (ez a **??**. Tétel). Tehát a (4.17) egyenletnek létezik és egyértelmű megoldása az ismeretlen $\mathbf{v}$ vektorra. Nevezetesen:

$$\mathbf{v} = \left(M^T M\right)^{-1} M^T \mathbf{x}.$$

Innen és (4.16) egyenletből adódik, a keresett

$$T(\mathbf{x}) = M \left(M^T M\right)^{-1} M^T \mathbf{x}.$$

■

4.6.1. Alkalmazás I. lineáris egyenletrendszerek

Adott egy lineáris egyenletrendszer, amely m egyenletből és n ismeretlenből áll. Legyen ennek mátrixa A. Ekkor az egyenletrendszer leírható:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{4.18}$$

alakban. Ha ezt meg tudjuk oldani akkor jó. Ha viszont nem megoldható akkor is tehetünk valamit, nevezetesen meg lehet keresni azt az $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektort, amire

$$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$$

a minimális. Mivel

$$\operatorname{col}(A) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m : \exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{w} = A \cdot \mathbf{y}\}$$

ezért értelemszerűen azt az $\mathbf{x}$ vektort amire $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$ értéke a minimális megkapjuk mint a $\mathbf{b}$ merőleges vetületét a $\operatorname{col}(A)$ altérre. Nevezetesen: Legyen

$$\mathbf{b}^* \text{ a } \mathbf{b} \text{ vektornak a } \operatorname{col}(A)\text{-ra vett merőleges vetülete.}$$

A 12. Tétel segítségével a $\mathbf{b}^*$ vektor meghatározható. Mivel definíció szerint $\mathbf{b}^* \in \operatorname{col}(A)$ ezért a

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}^* \tag{4.19}$$

egyenletnek van legalább egy (esetleg végtelen sok) megoldása. Megoldva ezt az egyenletet meg kapjuk a (4.18) egyenlet ún. **legkisebb négyzetes** megoldását.

Egyszerűbb úton is eljuthatunk a (4.18) egyenlet **legkisebb négyzetes** megoldásához:

Nevezetesen: a (4.19) egyenlet ekvivalens a

$$\mathbf{b} - A\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{b}^*.$$

Beszrozva mind két oldalt A^T-vel:

$$A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = A^T(\mathbf{b} - \mathbf{b}^*). \tag{4.20}$$

Házi feladat belátni, hogy ennek az egyenletnek a jobb oldala a $\mathbf{0}$ vektorral egyenlő. Így: a (4.18) egyenlet **legkisebb négyzetes x** megoldása kielégíti a

$$\boxed{(A^T A)\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}.} \tag{4.21}$$

egyenletet, melyet a (4.18) egyenlet ún. normál egyenletének hívunk.

Legkisebb négyzetek módszere: Adottak az x, y változók,

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

melyekről okunk van feltételezni lineáris kapcsolat van közöttük. Vagyis valamilyen **meghatározandó, általunk még ismeretlen** $a, b \in \mathbb{R}$-re:

$$y_i = ax_i + b \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Azonban az adatokat mérések eredményeként kapjuk és ezért hibával terheltek. Hogyan adhatjuk az adatok alapján elérhető lehető legjobb becslést az a, b értékére?

Megoldás: Az a, b-nek mint **ismeretleneknek** ki kellene elégíteni az

$$\begin{aligned} y_1 &= a + bx_1 \\ y_2 &= a + bx_2 \\ &\vdots \\ y_n &= a + bx_n \end{aligned} \tag{4.22}$$

a mérési hibák miatt azonban ilyen a, b nem létezhet. Tehát keressük azt a megoldást, melyre legalább is a hibák négyzeteinek összege minimális. Ezt a (4.22) egyenletrendszer legkisebb négyzetek megoldása adja. Ez az egyenletrendszer mátrixos alakban:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \tag{4.23}$$

Felírjuk tehát a (4.21) normál egyenletet:

$$(A^T A) \cdot \mathbf{x} = A^T \cdot \mathbf{b}. \tag{4.24}$$

Vegyük észre, hogy $A^T A$ egy 2×2-es mátrix. Vagyis a (4.24) egyenletrendszer egy két egyenletből és két ismeretlenből álló rendszer. Mivel $\operatorname{rank}(A) = 2$ ezért a **??**. Tétel miatt $\operatorname{rank}(A^T A) = 2$ tehát a 8. Tétel miatt létezik egyetlen megoldása. Ez a megoldása adja a keresett a, b értékeket.

11. PÉLDA: Hooke törvényéből következik, hogy ha egy függőlegesen felfüggesztett rugóra x súlyt helyezünk és ennek hatására a rúgó y hosszúra nyúlik, akkor az x és y között lineáris összefüggés van vagyis valamely a, b-re

$$y = a + bx \tag{4.25}$$

teljesül. A következő mérési eredmények ismeretében határozzuk meg az a és b értékét:

súly N-ban	1	2	4	6	8
tömeg cm-ben	6.9	7.6	8.7	10.4	11.6

Megoldás: A (4.23) egyenletbeli A mátrix és $\mathbf{b}$ vektor:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6.9 \\ 1 & 7.6 \\ 1 & 8.7 \\ 1 & 10.4 \\ 1 & 11.6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6.9 \\ 7.6 \\ 8.7 \\ 10.4 \\ 11.6 \end{bmatrix}$$

Innen a normál egyenlet

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 21 \\ 21 & 121 \end{bmatrix}}_{A^TA} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 45.2 \\ 212.1 \end{bmatrix}}_{A^T\mathbf{b}}.$$

Ennek megoldása

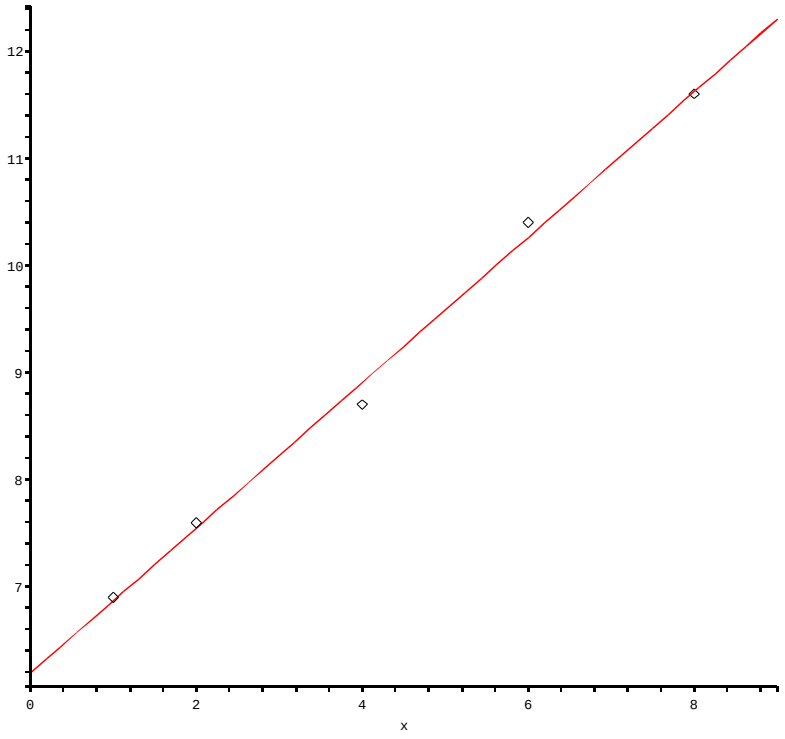
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.2 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

Tehát

$$a = 6.189634146 \text{ és } b = 0.6786585366$$

A keresett úgynevezett regressziós egyenes:

$$y = 0.6786585366 \cdot x + 6.189634146.$$



4.4. ábra. Legkisebb négyzetek módszere.

5. fejezet

A hatvány módszer

Elméletileg a mátrix sajátértékeit meghatározhatjuk mint a karakterisztikus egyenletének gyökeit. Azonban ez a módszer annyi számítási nehézséget tartalmaz, hogy a gyakorlatban szinte soha nem használjuk. Ebben a fejezetben egy olyan módszert tanulunk, mellyel jó becslést adható a legnagyobb sajátértékre és a hozzátartozó sajátvektorra. Ezt a módszert internet kereső motoroknál is alkalmazzák.

6. DEFINÍCIÓ: Legyen $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Az

$$\mathbf{x}_0, A \cdot \mathbf{x}_0, A^2 \cdot \mathbf{x}_0, \ldots, A^k \cdot \mathbf{x}_0, \ldots$$

vektor sorozatot az A mátrix által generált hatványsorozatnak hívjuk.

Ebben a fejezetben a hatvány sorozat konvergenciájának segítségével számoljuk ki a legnagyobb sajátértéket és a hozzátartozó sajátvektorokat.

7. DEFINÍCIÓ: Ha az A mátrix λ_1 sajátértékének abszolút értéke nagyobb az A mint az bármely más sajátértékének abszolút értéke, akkor azt mondjuk, hogy a λ_1 a domináns sajátérték és a λ_1-hez tartozó sajátvektorokat domináns sajátvektoroknak hívjuk.

13. TÉTEL: Legyen A egy $n \times n$-es szimmetrikus mátrix, melynek legnagyobb sajátértéke $\lambda > 0$. Ha $\mathbf{x}_0$ nem merőleges a λ sajátvektoraiból álló altérre, akkor a normalizált hatványsorozat:

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 = \frac{A \cdot \mathbf{x}_0}{\|A \cdot \mathbf{x}_0\|}, \ldots, \mathbf{x}_k = \frac{A \cdot \mathbf{x}_{k-1}}{\|A \cdot \mathbf{x}_{k-1}\|}, \ldots \tag{5.1}$$

konvergál egy egység hosszú domináns sajátvektorhoz és a

$$\mathbf{x}_1^T \cdot A\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k^T \cdot A\mathbf{x}_k, \ldots$$

konvergál a λ domináns sajátértékhez.

5.1. Alkalmazás: Internet kereső motorokban

A Google kereső motorban alkalmazzák az ún. PageRank algoritmust. Ennek során definiálnak egy mátrixot, amely tartalmazza a keresés szempontjából releváns oldalak hivatkozási struktúráját. Ezek után a domináns sajátvektort használva fontosság szerinti csökkenő sorrendbe rendezik a releváns oldalakat. A keresés szempontjából releváns oldalakat a következő módon találják meg:

- Amikor a felhasználó keres egy szót vagy kifejezést a Google először egy standard szöveg alapú kereső motorral kiválasztja az oldalak kezdeti S_0 halmazát.

- Ez tartalmaz sok felesleges oldalt (hiszen a keresett szónak több számunkra irreleváns jelentése is lehet) továbbá lehetnek számunkra fontos oldalak, amelyek S_0 ban nem szerepelnek. Nevezetesen olyan oldalak, amelyek azt a dolgot amire keresünk a keresésbe általunk beírt szó szinonimájával fejezik ki. Ezért a Google itt nem részletezendő módon az S_0 oldal halmazt kiterjeszti oldalak S halmazára, amelyekről feltételezzük, hogy a számunkra érdekes oldalakat már tartalmazza.

- A kereső motor feladata, hogy az oldalak ezen S halmazát (ami több ezer oldalt is tartalmazhat) a keresés szempontjából vett fontosság szerinti csökkenő sorrendbe állítsa. Itt játszik szerepét az ebben a fejezetben tanult hatvány módszer. Itt az ún. PageRank algoritmus

egy variációját az ún. HITS (Hypertext Induced Topic Search) algoritmust ismertetjük, melyet 1998-ban fejlesztettek ki a **Clever** search engine (IBM) számára:

http://www.research.ibm.com/topics/popups/innovate/hci/html/chow.html

A HITS algoritmus során először is felírjuk az ún. adjacency (szomszédossági) mátrixot. Ha az oldalak fent említett S halmaza n elemű, akkor az A adjacency mátrix egy $n \times n$ mátrix és az A mátrix (i, j)-edik elemére teljesül, hogy

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik oldal hivatkozik a } j\text{-edik oldalra;} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

12. PÉLDA: Egy tipikus példa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

Ez azt jelenti, hogy:
az 1. oldal hivatkozik a 3. és 4. oldalakra.
A 2. oldal hivatkozik az 1. oldalra.
A 3. oldal hivatkozik az 1. és a 4. oldalakra.
A 4. oldal hivatkozik az 1. 2. és 3. oldalakra.

Egy oldalnak két fontos szerepe lehet:
hub: sok más oldalra hivatkozik
authority: őt hivatkozza sok más oldal.

A fenti (5.2) példában a 4. oldal hivatkozik három másik oldalra tehát a 3. oldalnak mint hubnak a nagysága 3. A 4. oldalra hivatkozik két oldal tehát a 4. oldalnak mit authoritynek a nagysága 2. Az i-edik sorban található elemek összege mutatja meg, hogy az i-edik elem hány oldalra hivatkozik és az i-edik oszlopban álló elemek összege mutatja meg, hogy az i oldalt hányan hivatkozzák. Tehát a sor vektorok összegéből képzett vektor az ún. kezdeti hub vektor $\mathbf{h}_0$ és az oszlop vektorok összegéből álló vektor az

ún. kezdeti authority vektor $\mathbf{a}_0$. Jelen esetben:

$$\mathbf{h}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \qquad \mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{a}_0$ vektorra célszerű úgy gondolni mint az A^T mátrix sor összeg vektorára. Általában: ha az A $n \times n$ mátrix egy adjacency mátrix, akkor a kezdeti authority és a kezdeti hub vektorokat a fenti módon számítjuk ki.

Azonban mivel a fenti példánkban az 1. oldal a legnagyobb authority ezért azoknak a huboknak akik őt hivatkozzák több súlyt kell adni. Hasonlóan kezdetben a 4. oldalt tekinthetjük a fő hub-nak ezért azon oldalaknak akikre a 4. oldal hivatkozik nagyobb súlyt kell adni. Ezért képezzük a

$$\mathbf{h}_1 := \frac{A \cdot \mathbf{a}_0}{\|A \cdot \mathbf{a}_0\|} \approx \begin{bmatrix} 0.431 \\ 0.323 \\ 0.539 \\ 0.647 \end{bmatrix} \quad \text{és az } \mathbf{a}_1 := \frac{A^T \cdot \mathbf{h}_1}{\|A \cdot \mathbf{h}_1\|}$$

vektorokat. A számlálók:

$$A \cdot \mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mindkét esetben a nevező az egységre normálást végzi. A számlálóban az A oszlop vektorainak lineáris kombinációja van az együtthatók az authority vektor elemei. Az így kapott $\mathbf{h}_1$ vektor egy egység vektor amelynek i-edik eleme azt méri, hogy az $i$edik oldal mekkora hub az $\mathbf{a}_0$ vektorból jövő súlyozással véve.

A második formula nevezője: 2.19141. A számlálójában az A^T oszlop vektorainak lineáris kombinációit vesszük, ahol a súlyokat a $\mathbf{h}_1$ vektor szol-

gáltatja.

$$
\begin{aligned}
A^T\mathbf{h}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.431 \\ 0.323 \\ 0.539 \\ 0.647 \end{bmatrix} \\
&\approx 0.431 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.323 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.539 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.647 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1.509 \\ 0.647 \\ 1.078 \\ 0.970 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Mivel az A^T oszlopai az A sorai ezért a normálás után kapott vektor egy súlyozott authority vektor. Tehát

$$
\mathbf{a}_1 = \frac{1}{2.191} \begin{bmatrix} 1.509 \\ 0.647 \\ 1.078 \\ 0.970 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.688 \\ 0.295 \\ 0.492 \\ 0.442 \end{bmatrix}.
$$

Ezt folytatva kapjuk az $\mathbf{a}_2$-öt majd abból a $\mathbf{h}_2$-öt és így tovább. Vegyük észre, hogy

$$
\mathbf{a}_k = \frac{(A^TA)\mathbf{a}_{k-1}}{\|(A^TA)\mathbf{a}_{k-1}\|} \text{ és } \mathbf{h}_k = \frac{(AA^T)\mathbf{h}_{k-1}}{\|(AA^T)\mathbf{h}_{k-1}\|}
$$

Ezért $\mathbf{a}_k$ és $\mathbf{h}_k$ konvergál az A^TA és a AA^T mátrixok domináns sajátvektoraihoz. Az A^TA domináns sajátvektora elemeinek sorrendje adja a keresett fontossági sorrendet.

6. fejezet

5. előadás

6.1. Differenciálszámítás magasabb dimenzióban

Legyenek X, Y normált terek, vagyis olyan vektor terek, melyeken értelmezett egy norma. Emlékeztetek, hogy $\|\cdot\|$ egy norma az X vektor téren, ha

1. $\|x\| = 0$ akkor és csak akkor ha $x = 0$,
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ minden $x, y \in X$,
3. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ minden $x \in X$ és $\alpha \in \mathbb{R}$-re teljesül.

8. DEFINÍCIÓ: Legyen $G \subset X$ nyílt. Azt mondjuk, hogy az $F : G \to Y$ leképezés egy adott $x \in X$ pontban differenciálható, ha van olyan $L_x \in \mathcal{L}(X, Y)$ korlátos lineáris operátor, melyre teljesül, hogy: tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra létezik $\delta > 0$, hogy minden $\|h\| < \delta$ vektorra fennáll, hogy:

$$\|F(x + h) - F(x) - L_x \cdot h\| \leq \varepsilon \cdot \|h\|. \tag{6.1}$$

Jelben:

$$F(x + h) - F(x) - L_x \cdot h = o(h). \tag{6.2}$$

Az $L_x \cdot h \in Y$ elemet az F leképezés x pontbeli *erős differenciáljának* hívjuk. Az L_x lineáris operátort az F leképezés x pontbeli erős deriváltjának nevezzük és $F'(x)$-el jelöljük.

A derivált néhány tulajdonsága:

Legyenek F, G olyan leképezések mint fent az F volt és legyen $a \in \mathbb{R}$. Ekkor

1. $(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x)$.
2. $(a \cdot F)'(x) = a \cdot F'(x)$.
3. $(F \circ G)'(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x)$.

6.2. Magasabb rendű deriváltak

Legyen az F leképezés olyan mint fent vagyis $F : X \to Y$, ahol X, Y normált terek. Ekkor definíció szerint mint láttuk:

$$F'(x) \in \mathcal{L}(X, Y) \text{ vagyis } F' : X \to \mathcal{L}(X, Y).$$

9. DEFINÍCIÓ: Ha az F' leképezés deriválható, akkor azt mondjuk, hogy az F' deriváltja az F második deriváltja. Jelben: F''. Ekkor az $F''(x)$ olyan lineáris operátor, amely az X teret az $\mathcal{L}(X, Y)$ térbe képezi. Vagyis

$$F''(x) \in \mathcal{L}\left(X, \mathcal{L}(X, Y)\right) \text{ vagyis } F'' : X \to \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, y)).$$

Most belátjuk, hogy ennek az $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ térnek az elemeit egy másik módon, kényelmesebben is tekinthetjük. Nevezetesen: Nevezetesen belátható, hogy