

Matematika Plus 1  
építőmérnök hallgatóknak

Simon Károly

2007.04.11



# Tartalomjegyzék

<b>1. I. előadás</b>	<b>5</b>
1.1. Kiegészítés az A2-ben tanultakhoz: Determináns . . . . .	5
1.1.1. Elemi sor transzformációk hatása a determinánsra: .	7
1.1.2. Determináns geometriai jelentése: . . . . .	8
<b>2. II. előadás</b>	<b>11</b>
2.1. Gauss-Jordan elimináció . . . . .	11
2.2. Kifeszített altér bázisának meghatározása . . . . .	15
2.3. A mátrix fundamentális alterei . . . . .	18
<b>3. III. előadás</b>	<b>21</b>
3.1. Dimenzió tétel mátrixokra . . . . .	21
3.2. Merőleges vetítések $\mathbb{R}^n$ -ben . . . . .	25
3.3. Altérre vonatkozó projekció mátrixa . . . . .	27
3.3.1. Alkalmazás I. lineáris egyenletrendszerek . . . . .	30
<b>4. A hatvány módszer</b>	<b>35</b>
4.1. Alkalmazás: Internet kereső motorokban . . . . .	36



# 1. fejezet

## I. előadás

### 1.1. Kiegészítés az A2-ben tanultakhoz: Determináns

Legyen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

egy  $n \times n$ -es mátrix. Az  $A$  mátrix  $a_{ij}$  elemének **minorja**  $M_{ij}$  annak a mátrixnak a determinánsa, amelyet úgy kapunk, hogy az  $A$  mátrixból eldobjuk az  $i$ -edik sort és a  $j$ -edik oszlopot. A

$$C_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$$

számot az  $a_{ij}$  elem **cofactorának** hívjuk. Ekkor

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}. \quad (1.1) \text{ ?4?}$$

Ezt a kifejezést a **determináns  $i$ -edik sor szerinti cofactor kifejtésének** mondjuk.

**1. PÉLDA:** Legyen  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ . Ekkor tekinthetjük az utolsó sor szerinti cofactor kifejtést:

$$\det(A) = (-1)^{3+2} \cdot 2 \cdot (3 \cdot 4 - 2 \cdot 2) = -16$$

A  $3 \times 3$ -as mátrix determinánsát meg kaphatjuk a következő módon is:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \quad (1.2) \{?\}$$

Ennek egy elmés általánosításaként egy tetszőleges  $n \times n$ -es determináns kiszámítható. Ennek leírásához szükség van a következő fogalomra: ha az  $\{1, 2, \dots, n\}$  számok sorrendjének tetszőleges felcserélésével megkapjuk a  $\{j_1, \dots, j_n\}$  számokat, akkor azt mondjuk, hogy a  $\{j_1, \dots, j_n\}$  számok az  $\{1, 2, \dots, n\}$  egy **permutációja**. Azt mondjuk, hogy a  $\{j_1, \dots, j_n\}$  permutáció páros, ha azon cserék száma amivel a  $\{j_1, \dots, j_n\}$ -ből az  $\{1, 2, \dots, n\}$  vissza nyerhető egy páros szám. Egyébként a permutáció páratlan. Például: ha  $n = 3$  az

$$\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 1\}, \{3, 1, 2\}$$

permutációk párosak, míg a

$$\{3, 2, 1\}, \{2, 1, 3\}, \{1, 3, 2\}$$

permutációk páratlanok. **Előjeles elemi szorzat**nak nevezzük a

$$\pm a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

alakú szorzatokat, ahol a  $+$  jelet akkor választjuk, ha a  $\{j_1, \dots, j_n\}$  permutáció páros egyébként a mínusz jelet választjuk.

**1. TÉTEL:**  $\det(A)$  egyenlő az összes lehetséges előjeles elemi szorzatok összegével.

Vegyük észre, hogy ez éppen (1.2) általánosítása. Ezen tételt használva be lehet látni, hogy:

**2. TÉTEL:** Minden  $A$  négyzetes ( $n \times n$ -es valamilyen  $n$ -re) mátrixra

$$\det(A) = \det(A^T).$$

Ez azt is jelenti, hogy az (1.1)-ben adott sor szerinti cofactor kifejtés helyett az oszlop szerinti cofactor kifejtést is használhatjuk. Vagyis minden  $1 \leq j \leq n$ -re:

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}. \quad (1.3) \{?\}$$

### 1.1.1. Elemi sor transzformációk hatása a determinánssra:

Emlékezzünk, hogy elemi sor transzformációnak neveztük ha

1. Az  $i$ -edik sor  $c$ -szeresét a  $j$ -edik sorhoz adjuk.
2. Az  $i$ -edik sort és a  $j$ -edik sort felcseréljük.
3. Az  $i$ -edik sort egy  $c \neq 0$  számmal megszorozzuk.

Vegyük észre, hogy egy:

- Az 1. sor transzformációt megvalósíthatjuk az  $A$  mátrixon, ha az  $A$  mátrixot balról megszorozunk egy olyan mátrix-al, amely az  $I_n$  egység mátrixtól csak abban tér el, hogy a  $ji$  edik eleme nem nulla hanem  $c$ . Jelöljük ezt a mátrixot  $E_{ji}(c)$ -vel.
- A 2. sor transzformációt megvalósíthatjuk az  $A$  mátrixon, ha az  $A$  mátrixot balról megszorozunk egy olyan mátrix-al, amely az  $I_n$  egység mátrixtól csak abban tér el, hogy
  - $ij$ -edik és  $ji$ -edik eleme 1
  - $ii$ -edik és  $jj$ -edik eleme 0.

Legyen ezen a mátrix neve:  $E_{i \leftrightarrow j}$

- A 3. sor transzformációt megvalósíthatjuk az  $A$  mátrixon, ha az  $A$  mátrixot balról megszorozunk egy olyan mátrix-al, amely az  $I_n$  egység mátrixtól csak abban tér el, hogy  $ii$ -edik eleme nem 1 hanem  $c$ . Legyen ezen a mátrix neve:  $E_{ii}(c)$ .

Mivel

$$\det(E_{ij}(c)) = 1, \quad \det(E_{i \leftrightarrow j}) = -1, \quad \det(E_{ii}(c)) = c,$$

ezért az 1. sor transzformáció nem változtat a determináns értékén. A második a determinánst előjelét megváltoztatja, a harmadik a determinánst  $c$ -szeresére változtatja.

### 1.1.2. Determináns geometriai jelentése:

Egy (négyzetes) mátrix determinánsa mindig egy szám. Ennek van abszolút értéke és előjele. Először megértjük a determináns abszolút értékének geometriai jelentését, azután pedig a determináns előjelének a geometriai jelentését értjük meg.

**A determináns abszolút értékének a jelentése:**

Jelöljük az

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrix  $j$ -edik oszlop vektorát  $\mathbf{u}_j$ -vel. Vagyis

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ezt úgy is írhatjuk, hogy

$$A = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n]$$

Vegyük észre, hogy

$$A \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{u}_i,$$

ahol  $\mathbf{e}_i$  az  $i$ -edik koordináta egység vektor, vagyis az a vektor, aminek minden koordinátája 0 kivéve az  $i$ -edik koordinátát ami viszont 1-el egyenlő. Ezért az

$$\mathbf{y} \rightarrow A \cdot \mathbf{y} \tag{1.4} \text{?6?}$$

leképezés az  $\mathbb{R}^n$  egység kockáját vagyis a

$$K = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : 0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1\}$$

halmazt 1 – 1 értelműen rá képezi az  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  vektorok által kifeszített  $P < \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n >$  paralelepipedonra. **A determináns abszolút értéke éppen ezen  $P < \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n >$  paralelepipedon térfogata.** Vagyis az  $A$  mátrix determinánsának abszolút értéke azt mondja meg, hogy az

$$f : \mathbf{y} \rightarrow A \cdot \mathbf{y}$$

## 1.1. KIEGÉSZÍTÉS AZ A2-BEN TANULTAKHOZ: DETERMINÁNS 9

lineáris leképezés esetén egy  $H \subset \mathbb{R}^n$  halmaz  $f(H)$  képének térfogata hány-szorosa a  $H$  térfogatának. Képletben:

$$\text{térfogat } f(H) = |\det(A)| \cdot \text{térfogat}(H).$$

**A determináns előjelének jelentése:**

Ha a determináns előjele pozitív, akkor az

$$f : \mathbf{y} \rightarrow A \cdot \mathbf{y}$$

leképezés irányítás tartó (mint például a forgatások). Ha a determináns előjele negatív az  $f$  irányítás váltó (mint például a tükrözések).



## 2. fejezet

### II. előadás

#### 2.1. Gauss-Jordan elimináció

Az A2 előadáson tanult Gauss elimináció során a mátrixot sor-echelon alakra hoztuk elemi sor transzformációk egymás utáni alkalmazásaival. Emlékeztetek, hogy egy mátrix sor echelon alakban van ha:

1. A csupa nullából álló sorok (ha vannak a mátrixban egyáltalán) a mátrix utolsó sorai.
2. Ha egy sornak van nem nulla eleme, akkor az első nem nulla elem egyes.
3. Két egymás utáni sor mindegyike tartalmaz nem nulla elemet, akkor az első nem nulla elem (ami szükségszerűen egyes) az alsó sorban, jobbra van a felső sor első nem nulla elemétől (ami szintén egyes).

Nevezzük a fenti definícióban szereplő minden nem csupa nulla sor elején álló egyeseket **pivot elemeknek** és ezen elemek oszlopait **pivot oszlopoknak**. A sor echelon alakból a redukált sor echelon alakot úgy kapjuk hogy ha a sor-echelon alakból indulva, a pivot elemek sorainak megfelelő többszöröseit levonva a felettük lévő sorokból elérjük, hogy a mátrixban a pivot elemek felett csak nullák legyenek.

#### 2. PÉLDA:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Az  $A$  mátrixból sor-echelon alakra hozás után kapjuk az:

$$A' = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixot, ahol a pirossal írt elemek a pivot elemek. Most alakítjuk ki a redukált sor-echelon formát:

Az utolsó nem csupa nulla sor (vagyis a mi esetünkben a harmadik sor) megfelelő szám szorosait hozzáadjuk a megelőző sorokhoz, hogy az utolsó nem csupa nulla sor pivot eleme felett csak nullák legyenek:

Vagyis az utolsó sor  $\frac{7}{2}$ -szeresét hozzáadjuk a második sorhoz és ugyanebben a lépésben az utolsó sor  $-6$  szorosát hozzáadjuk az első sorhoz. Kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & \mathbf{0} & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{bmatrix},$$

ahol a kék szín jelöli az újonnan kialakított nullákat az utolsó sor pivot eleme (piros 1-es) felett. Most az így kapott mátrix második sorának pivot eleme feletti pozíción akarunk nullát kialakítani. Ehhez, hozzáadjuk a második sor 5-szörösét az első sorhoz. Ennek eredményeként kapjuk a redukált sor-echelon alakú mátrixot:

$$A'' = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy az  $A'$  sor-echelon alakban és az  $A''$  redukált sor-echelon alakban a pivot elemek ugyanazok.

Azt a folyamatot, amelynek során az  $A$  mátrixból a redukált sor-echelon alakú  $A''$  mátrixot létrehoztuk **Gauss-Jordán eliminációnak** hívjuk.

> with(linalg):

> A:=matrix(3,6,[0,0,-2,0,7,12,2,4,-10,6,12,28,2,4,-5,6,-5,-1]);

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

>gaussjord(A);

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**3. PÉLDA:** Adott a síkon 4 pont, melyek  $x$  koordinátái különbözőek. Ehhez létezik egyetlen olyan legfeljebb harmadfokú polinom, amely mind a négy adott ponton átmegy. Határozzuk meg ezt a polinomot, ha a pontok

$$P_1 = (-2, -2), P_2 = (-1, 4), P_3 = (1, 2), P_4 = (2, 3).$$

Megoldás: Jelöljük a keresett (legfeljebb) harmadfokú polinomot  $p(x)$ -el. Ekkor

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

Azt hogy a  $p(x)$  polinom átmegy az adott négy ponton a következő négy egyenlet írja le:

$$\begin{aligned} a_0 + (-2)a_1 + (-2)^2a_2 + (-2)^3a_3 &= -2 \\ a_0 + (-1)a_1 + (-1)^2a_2 + (-1)^3a_3 &= 4 \\ a_0 + (1)a_1 + (1)^2a_2 + (1)^3a_3 &= 2 \\ a_0 + (2)a_1 + (2)^2a_2 + (2)^3a_3 &= 3 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

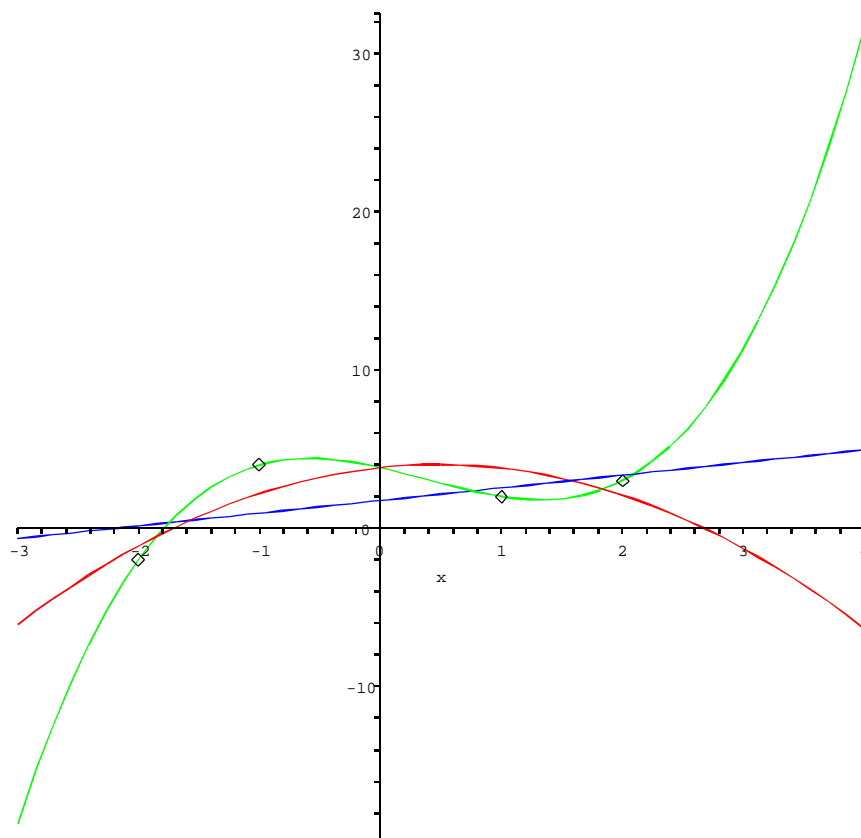
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ezt Gauss-Jordan eliminációval redukált sor-echelon alakra hozzuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{23}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

Az utolsó oszlopban álló elemek adják rendre  $a_0, a_1, a_2, a_3$  értékét. Vagyis a keresett polinom:

$$p(x) = \frac{23}{6} - \frac{7}{4}x - \frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{4}x^3.$$



2.1. ábra. A  $P_1, \dots, P_4$  pontokat legjobban megközelítő első- (kék) másod- (piros) és harmadfokú (zöld) polinomok.

Ezt az ábrát a következő MAPLE program eredményezi:

```
> x1:=[-2,-1,1,2]:
> y1:=[-2,4,2,3]:
> #corresponding data points:
> with(stats):with(plots):

Warning, these names have been redefined: anova, describe, fit,
importdata, random, statevalf, statplots, transform

> pts:=zip((x,y)->[x,y],x1,y1):
> pt_plot:=pointplot(pts):
> inter_poly:=interp(x1,y1,x):
> ip_plot:=plot(inter_poly, x=-3..4,color=GREEN):
> ls_fit1:=fit[leastsquare][[x,y],y=a*x+b, {a,b}][[x1,y1]]:
> ls_plot1:=plot(rhs(ls_fit1),x=-3..4,color=blue):
> ls_fit2:=fit[leastsquare][[x,y],y=a*x^2+b*x+c, {a,b,c}][[x1,y1]]:
> ls_plot2:=plot(rhs(ls_fit2),x=-3..4,color=red):
> display([pt_plot,ls_plot1,ls_plot2,ip_plot]);
```

## 2.2. Kifeszített altér bázisának meghatározása

Adottak az  $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s\} \in \mathbb{R}^d$ -beli vektorok. Legyen  $W \subset \mathbb{R}^d$  az  $S$  által kifeszített altér. Vagyis  $W$  azon vektorok összesége, amelyek előállnak

$S$ -beli vektorok lineáris kombinációjaként.

$$W = \{\mathbf{w} : \exists \alpha_1, \dots, \alpha_s; \mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_s \mathbf{v}_s\}.$$

Két természetes probléma fordul elő nagyon gyakran:

1. Találjuk meg  $W$  egy *tetszőleges* bázisát.
2. Találjuk meg  $W$  egy olyan bázisát, *amely  $S$ -beli vektorokból áll.*

Az első problémát megoldottuk A2-ben. Nevezetesen az  $S$ -beli vektorokból mint *sor vektorokból* alkottunk egy  $B$  mátrixot. Ezt a  $B$  mátrixot Gauss eliminációval sor-echelon alakra hoztuk. A nem nulla sor vektorok alkották a  $W$  egy bázisát. Ez így egyszerű és nagyon gyors, viszont az ily módon kapott bázis vektorok általában nem az  $S$ -beli vektorok közül kerülnek ki tehát ez a módszer megoldja az első problémát de nem oldja meg a nehezebb második problémát. A második probléma megoldásához szükséges a következő észrevétel:

**Észrevétel:**

Legyen  $A$  egy  $k \times s$  méretű mátrix melynek oszlop vektorai  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_s \in \mathbb{R}^k$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{ks} \end{bmatrix} = [\mathbf{c}_1 \quad \dots \quad \mathbf{c}_s]. \quad (2.1) \text{ ?\underline{7}}?$$

Tegyük fel, hogy az oszlop vektorok között fennáll

$$\mathbf{c}_i = \sum_{k \neq i} \alpha_k \mathbf{c}_k.$$

Hajtsunk végre egy tetszőleges elemi sor transzformációt az  $A$  mátrixon. Így kapjuk az  $A'$  mátrixot, melynek oszlop vektorait jelöljük  $\mathbf{c}'_1, \dots, \mathbf{c}'_s \in \mathbb{R}^k$ -vel. Vagyis az elemi sor transzformáció eredménye:

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{k1} & \dots & a'_{ks} \end{bmatrix} = [\mathbf{c}'_1 \quad \dots \quad \mathbf{c}'_s]. \quad (2.2) \text{ ?\underline{8}}?$$

**3. TÉTEL:** Használva a fenti jelöléseket:

$$\mathbf{c}'_i = \sum_{k \neq i} \alpha_k \mathbf{c}'_k.$$

Vagyis az  $A'$  mátrix oszlop vektorai között ugyanazok az összefüggőségi viszonyok vannak mint az  $A$  mátrix esetén.

**A fenti 2. probléma megoldása az Észrevétel segítségével:**

Legyen  $A$  az a  $k \times s$  méretű mátrix, melynek oszlop vektorait az  $S$  elemei ugyanazon sorrendben.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{ks} \end{bmatrix} = [ \mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_s ]. \quad (2.3) \text{??}$$

Hajtsuk végre a Gauss-Jordan eliminációt. Vagyis az  $A$  mátrixból kiindulva hajtsuk végre elemi sor transzformációk azon sorozatát, melynek eredményeként kapunk egy redukált sor-echelon alakú mátrixot, melyet  $A'$ -nek nevezünk. Ennek a pivot oszlopainak megfelelő  $S$ -beli elemek alkotják a  $W$ -nek  $S$ -beli bázisát.

**4. PÉLDA:** Legyen  $W$  a következő vektorok által kifeszített altere  $\mathbb{R}^4$ -nek:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg a  $W$  egy olyan bázisát, melynek minden eleme ezen  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5$  vektorok közül kerül ki.

**Megoldás:** Legyen  $A$  az a mátrix, melynek oszlop vektorai az adott vektorok:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Alkalmazzuk a Gauss-Jordan eliminációt a **MAPLE** segítségével::

```
> with(linalg):
> A:=matrix(4,5,[1,2,0,2,5,-2,-5,1,-1,-8,0,-3,3,4,1,3,6,0,-7,2]):
> gaussjordan(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ahol a kézzel írt elemek a pivot elemek az oszlopaik a pivot oszlopok. A tétel értelmében a pivot oszlopoknak megfelelő sorszámú  $\mathbf{v}$  vektorok alkotják a  $W$  bázisát. Vagyis a

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$$

a  $W$  egy bázisát adja.

### 2.3. A mátrix fundamentális alterei

**1. DEFINÍCIÓ:** Adott egy  $k \times s$  méretű  $A$  mátrix, melynek: oszlop vektorai:  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{v}_s \in \mathbb{R}^k$  és a sor vektorai  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k \in \mathbb{R}^s$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{ks} \end{bmatrix} = [\mathbf{c}_1 \quad \dots \quad \mathbf{c}_s] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k \end{bmatrix}. \quad (2.4) \text{??}$$

1.  $\mathbb{R}^k$ -ben azon alteret, melyet az  $A$  mátrix  $\{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_s\}$  oszlop vektorai feszítenek ki  $\text{col}(A)$ -val jelöljük.
2.  $\mathbb{R}^s$ -ben azon alteret, melyet az  $A$  mátrix  $\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k\}$  sor vektorai feszítenek ki  $\text{row}(A)$ -val jelöljük.
3. A2-ben tanultuk, hogy a sor vektorok és az oszlop vektorok által kifeszített alterek (noha az első  $\mathbb{R}^s$ -beli a második  $\mathbb{R}^k$ -beli) dimenziói egyenlőek. Ezen közös dimenziót hívjuk a mátrix rangjának, jele:  $\text{rank}(A)$ .
4. Az  $A$  mátrix nullterének hívjuk azon  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^s$  vektorok alterét, melyekre:  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ , jele  $\text{null}(A)$ . Az  $A$  nullterének dimenziója az  $A$  nulltuty-je, jele  $\text{nullity}(A)$ .

Mivel az  $A$  mátrix-al együtt az  $A^T$  transzponált mátrix is fontos ezért a transzponált mátrixra is fel akarjuk írni ugyanezeket a mennyiségeket. Viszont a transzponálás sort oszlopba visz és viszont, ezért:

$$\text{row}(A^T) = \text{col}(A) \text{ és } \text{row}(A) = \text{col}(A^T).$$

**2. DEFINÍCIÓ:** Az  $A$  mátrix fundamentális alterei:

$$\text{row}(A), \quad \text{col}(A), \quad \text{null}(A), \quad \text{null}(A^T).$$

Szükségünk lesz még a merőleges altér fogalmára:

**3. DEFINÍCIÓ:**



## 3. fejezet

### III. előadás

#### 3.1. Dimenzió tétel mátrixokra

**4. TÉTEL: (Dimenzió tétel mátrixokra)** Legyen  $A$  egy  $k \times s$  méretű (tehát nem feltétlen négyzetes) mátrix. Ekkor

$$\boxed{\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = s.} \quad (3.1) \text{ ?11?}$$

**Bizonyítás.** Tekintsük az

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

egyenletet (itt  $\mathbf{x}, \mathbf{0} \in \mathbb{R}^s$ ). Gauss eliminációt alkalmazva ezen egyenlet kiegészített mátrixát sor-echelon alakra hozzuk. Tegyük fel, hogy a nem csupa nulla sorok száma  $r$ -el egyenlő. Ekkor  $\text{rank}(A) = r$ . Minden nem csupa nulla sor egy ki nem küszöbölhető egyenletet jelent ami meg köt egy változót. Tehát az összesen  $s$  változóból megkötünk  $r$  változót. Így tehát marad  $s - r$  szabad változónk. Vagyis:

$$\text{szabad változók száma} = s - \text{rank}(A)$$

Más szavakkal:

$$\text{rank}(A) + \text{szabad változók száma} = s.$$

Másrészt a szabad változók száma éppen az  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$  egyenlet megoldásai által meghatározott altér dimenziója. Más szavakkal:

$$\text{nullity}(A) = \text{szabad változók száma} .$$

Összetéve a két utolsó egyenletet kapjuk a tétel állítását. ■ Legyen  $S \subset \mathbb{R}^d$ . Ekkor az  $S$  merőleges alterének hívjuk azon  $\mathbb{R}^d$ -beli vektorok halmazát, melyek az  $S$  összes elemére merőlegesek, jele  $S^\perp$ .

$$S^\perp := \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d : \forall \mathbf{v} \in S; \mathbf{v} \perp \mathbf{w}\}.$$

**5. TÉTEL: (Alterekre vonatkozó dimenzió tétel)** Legyen  $W$  az  $\mathbb{R}^s$  egy altere. Ekkor

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = s.$$

**Bizonyítás.** Ha  $W$  az  $\mathbb{R}^s$ -nek a két triviális altere  $(\mathbf{0}, \mathbb{R}^s)$  közül az egyik, akkor a tétel triviálisan igaz. Egyébként pedig választunk egy bázist a  $W$ . Tegyük fel, hogy ez a bázis  $k$  elemű. Ebből a bázisból mint sor vektorokból képezzük a  $k \times s$  méretű  $A$  mátrixot. Nyilván

$$\text{row}(A) = W \text{ és } \text{null}(A) = W^\perp. \quad (3.2) \text{ ?18?}$$

■ Tehát az előző tételt használva:

$$\dim W + \dim W^\perp = \text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = s.$$

**Házi feladat:** Igazoljuk, hogy minden  $A$  mátrixra:

(a)

$$\text{col}(A)^\perp = \text{null}(A^T). \quad (3.3) \text{ ?32?}$$

(b)

$$\text{row}(A)^\perp = \text{null}(A). \quad (3.4) \text{ ?33?}$$

A fenti tétel következtében belátható, hogy:

**6. TÉTEL:** Legyen  $A$  egy  $n \times n$ -es (tehát négyzetes) mátrix. Legyen továbbá  $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  az  $A$  mátrixhoz tartozó lineáris leképezés melyet a következőképpen definiálunk:

$$\mathbf{x} \mapsto A \cdot \mathbf{x}.$$

Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- (a) Az  $A$  mátrix redukált sor-echelon alakja egyenlő az  $n$ -dimenziós egység mátrix-al  $I_n$ -el.
- (b) Az  $A$  mátrixot felírhatjuk elemi mátrixok szorzataként.
- (c) Az  $A$  mátrix invertálható.
- (d)  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ -nak a triviális  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  az egyetlen megoldása.
- (f) Minden  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ -re az  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ -nek pontosan egy megoldása van.
- (g)  $\det(A) \neq 0$ .
- (h)  $\lambda = 0$  nem sajátértéke az  $A$  mátrixnak.
- (i)  $T_A$  leképezés 1 – 1 értelmű.
- (j)  $T_A$  leképezés ráképezés  $\mathbb{R}^n$ -re.
- (k) Az  $A$  mátrix oszlop vektorai lineárisan függetlenek.
- (l) Az  $A$  mátrix sor vektorai lineárisan függetlenek.
- (m) Az  $A$  mátrix oszlop vektorai az  $\mathbb{R}^n$  egy bázisát alkotják.
- (n) Az  $A$  mátrix sor vektorai az  $\mathbb{R}^n$  egy bázisát alkotják.
- (o)  $\text{rank}(A) = n$ .
- (p)  $\text{nullity}(A) = 0$ .

Az 5. Tétel egy másik következménye:

**7. TÉTEL:** Legyen  $W$  az  $\mathbb{R}^n$ -nek egy  $n - 1$  dimenziós altere. Ekkor létezik egy  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  vektor, hogy

$$W^\perp = \{c \cdot \mathbf{a} : c \in \mathbb{R}\}.$$

Vagyis  $W^\perp$  az  $\mathbf{a}$  vektor által meghatározott egyenes. Az ilyen  $W$  altereket **hipersíkok**nak hívjuk.

**Bizonyítás.** 5. Tételből tudjuk, hogy ekkor  $\dim(W^\perp) = 1$  vagyis  $W^\perp$  egy origón átmenő egyenes. ■

Az 5. tétel alkalmazásaként kapjuk a következő tételt is, amelyet a későbbiekben használni fogunk:

**8. TÉTEL:** Legyen  $A$  egy tetszőleges mátrix. Ekkor

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T A).$$

**Bizonyítás.** Jelöljük az  $A$  sorainak számát  $k$ -el es oszlopainak számát  $s$ -val. Tehát az  $A$  egy  $k \times s$  méretű mátrix. A 4. Tételből miatt elég azt belátni, hogy

$$\text{nullity}(A) = \text{nullity}(A^T A).$$

Ehhez elég megmutatni, hogy

$$\text{null}(A) = \text{null}(A^T A). \quad (3.5) \text{ ?26?}$$

Ehhez két dolgot kell megmutatni:

(a) Ha  $\mathbf{a} \in \text{null}(A)$ , akkor  $\mathbf{a} \in \text{null}(A^T A)$

(b) Ha  $\mathbf{a} \in \text{null}(A^T A)$ , akkor  $\mathbf{a} \in \text{null}(A)$

Az (a) triviális hiszen

$$\mathbf{a} \in \text{null}(A) \Leftrightarrow A \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow A^T \cdot (A \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{0} \Rightarrow (A^T A) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

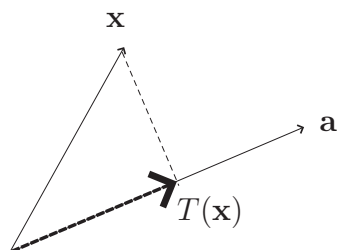
Most megmutatjuk, hogy a (b) rész is teljesül: Legyen  $\mathbf{a} \in \text{null}(A^T A)$ . Ez azt jelenti, hogy  $A^T A \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$ . Ez azt jelenti, hogy az  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^s$  vektor merőleges a  $\text{row } A^T A$  altérre. Vegyük észre, hogy

$$(A^T A)^T = A^T A$$

vagyis az  $A^T A$  mátrix szimmetrikus. Ezért az  $\mathbf{a}$  vektor merőleges a  $\text{col}(A^T A) = \text{row}(A^T A)$  altérre is. Ez azt jelenti, hogy az  $\mathbf{a}$  vektor merőleges minden  $A^T A \cdot \mathbf{y}$  alakú vektorra bármi is az  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$  vektor. Tehát az  $\mathbf{a}$  vektor merőleges az  $A^T A \cdot \mathbf{a}$  vektorra is. Ezért:

$$0 = \mathbf{a}^T \cdot ((A^T A)\mathbf{a}) = (\mathbf{a}^T A^T) \cdot (A\mathbf{a}) = (A\mathbf{a})^T \cdot (A\mathbf{a}).$$

Innen pedig  $\mathbf{0} = A\mathbf{a}$  vagyis  $\mathbf{a} \in \text{null}(A)$ . ■



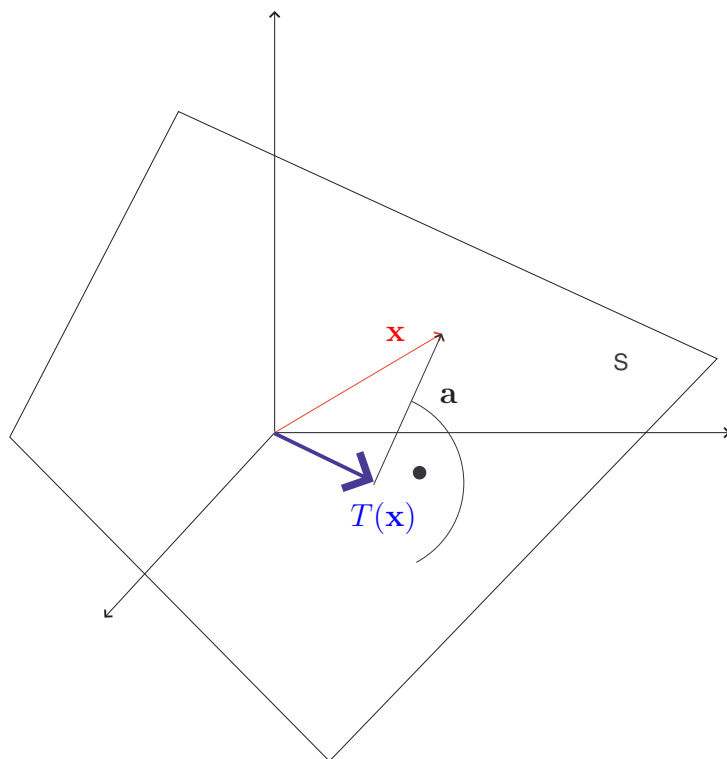
3.1. ábra.  $T(\mathbf{x})$  az  $\mathbf{a}$  vektor egyenesére való merőleges vetület **vektor**

## 3.2. Merőleges vetítések $\mathbb{R}^n$ -ben

**1. FELADAT: (Merőleges vetítés  $\mathbb{R}^2$ -ben)** Rögzítsünk egy  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$  vektort. Legyen  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  az a lineáris transzformáció, amely minden  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  vektorhoz hozzá rendeli ezen  $\mathbf{x}$  vektornak az  $\mathbf{a}$  vektor egyenesére vett merőleges vetület vektorát (l. 3.1. ábra).

**2. FELADAT: (Merőleges vetítés  $\mathbb{R}^3$ -ban)** Rögzítsünk  $\mathbb{R}^3$ -ban egy olyan  $S$  síkot, amely átmegy az origón. Legyen  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  az a lineáris transzformáció, amely minden  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  vektorhoz hozzá rendeli ezen  $\mathbf{x}$  vektornak az  $S$  síkra vett merőleges vetület vektorát (l. 3.2. ábra).

Most a fentiekhez hasonló feladatok megoldásait tanuljuk meg abban az esetben mikor  $n$  dimenziós térben valamely  $k < n$  dimenziós altérre vetítünk.



3.2. ábra.  $T(\mathbf{x})$  az  $S$  síkra való merőleges vetület **vektor**

A fenti **3.1. Feladat megoldása:**

$$T(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{x} \cdot \frac{1}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{a}}_{\text{az } \mathbf{x}\text{-nek az } \mathbf{a}\text{-ra vett vetületének hossza}} \cdot \frac{1}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{a}$$

Tehát

$$T(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \cdot \mathbf{a}.$$

Nyilvánvalóan a nevezőt felírhatjuk mint  $\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}$ . Házi feladat meg-gondolni, hogyha tekintjük a

$$P = \frac{1}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} \cdot \mathbf{a} \mathbf{a}^T$$

$n \times n$ -es mátrixot, akkor erre

$$T(\mathbf{x}) = P \cdot \mathbf{x} \tag{3.6} \text{ ?15?}$$

teljesül, vagyis a  $T$  lineáris transzformáció mátrixa a természetes bázisban a  $P$  mátrix.

### 3.3. Altérre vonatkozó projekció mátrixa

**9. TÉTEL: (Altérre vonatkozó projekciós tétel)** Adott egy nem tri-viális  $W$  altér  $\mathbb{R}^n$ -nek. Legyen  $T_W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  az a lineáris transzformáció, amely minden  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  vektorhoz hozzárendeli az  $\mathbf{x}$  vektornak a  $W$  altérre való merőleges vetületét. Ekkor a  $T$  lineáris transzformáció  $P$  mátrixát a természetes bázisban megkapjuk a következőképpen:

$$P = M(M^T M)^{-1} M^T, \tag{3.7} \text{ ?16?}$$

ahol  $M$  egy olyan mátrix, melynek oszlop vektorai a  $W$  egy bázisának elemei.

**1. MEGJEGYZÉS:** Így persze az  $M$  mátrix választása nem egyértelmű, de attól függetlenül a  $P$  mátrix természetesen ugyanaz lesz az  $M$  minden lehetséges értékeire.

**5. PÉLDA:** Legyen  $S$  az  $x - 4y + 2z = 0$  sík.

- (a) Határozzuk meg az  $S$ -re való merőleges vetítés  $P$  mátrixát!
- (b) Használva az előző rész eredményét számítsuk ki az  $A = (1, 3, 7)$  pontnak az  $S$  síkra eső merőleges vetületét!

**Megoldás (a):** Vegyünk két nem párhuzamos vektort az  $S$  síkból. Ezek nyilván az  $S$  egy bázisát adják. Ezt megtehetjük úgy hogy az egyik pont esetén:  $y = 1, z = 0$  majd a másik pont esetén  $y = 0, z = 1$  értékeket választjuk. Ekkor az első esetben  $x = 4$  a másodikban pedig  $x = -2$ . Tehát az  $S$  sík egy bázisa:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ezért az  $M$  mátrix:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maple használatával:

```
> with(linalg):
> M:=matrix(3,2,[4,-2,1,0,0,1]):
> B:=inverse(multiply(transpose(M),M)):
> P:=multiply(M,B,transpose(M));
```

$$P = \begin{bmatrix} \frac{20}{21} & \frac{4}{21} & -\frac{2}{21} \\ \frac{4}{21} & \frac{5}{21} & \frac{8}{21} \\ -\frac{2}{21} & \frac{8}{21} & \frac{17}{21} \end{bmatrix}$$

Tehát

$$P = M(M^T M)^{-1} M^T = \frac{1}{21} \cdot \begin{bmatrix} 20 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 8 \\ -2 & 8 & 17 \end{bmatrix}.$$

Megoldás (b):  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$T(\mathbf{x}) = P \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{20}{21} & \frac{4}{21} & -\frac{2}{21} \\ \frac{4}{21} & \frac{5}{21} & \frac{8}{21} \\ -\frac{2}{21} & \frac{8}{21} & \frac{17}{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{25}{7} \\ \frac{47}{7} \end{bmatrix}.$$

**9. Tétel bizonyítása.** Legyen  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$  egy bázisa  $W$ -nek. Legyen  $M$  az az  $n \times k$  méretű mátrix, melynek oszlopai a  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$  vektorok. Jelben:

$$M = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k]$$

Ekkor mint azt (3.4)-ban láttuk

$$W = \text{col}(M) \text{ és } W^\perp = \text{null}(M^T),$$

Tehát az  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  vektort fel kell írni mint

$$\mathbf{x} = T(\mathbf{x}) + \mathbf{a}, \quad (3.8) \text{ ?23?}$$

ahol  $T(\mathbf{x}) \in \text{col}(M)$  és  $M^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$  teljesül. Vegyük észre, hogy

$$T(\mathbf{x}) \in \text{col}(M) \Leftrightarrow \exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^k : T(\mathbf{x}) = M \cdot \mathbf{v} \quad (3.9) \text{ ?19?}$$

és

$$M^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \Leftrightarrow M^T \underbrace{(\mathbf{x} - T(\mathbf{x}))}_{\mathbf{a}} = \mathbf{0}. \quad (3.10) \text{ ?20?}$$

Tehát **HA** be tudjuk látni, hogy létezik **egyetlen**  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$  amire:

$$M^T \cdot (\mathbf{x} - M \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad (3.11) \text{ ?21?}$$

akkor

$$T(\mathbf{x}) = M \cdot \mathbf{v} \text{ és } \mathbf{a} = \mathbf{x} - T(\mathbf{x}) \quad (3.12) \text{ ?22?}$$

adja a fent keresett megoldást egyértelműen. Ehhez írjuk át a (3.11) egyenletet:

$$(M^T M) \cdot \mathbf{v} = M^T \cdot \mathbf{x}. \quad (3.13) \text{ ?24?}$$

Ennek az egyenletnek létezik és egyértelmű a megoldása az ismeretlen  $\mathbf{v}$  vektorra, mivel

- az  $M^T M$  egy  $k \times k$ -as mátrix,
- $\text{rank}(M^T M) = k$ .

A második állítás abból jön, hogy egyrészt  $\text{rank}(M) = k$ , másrészt minden  $B$  mátrixra  $\text{rank}(B^T B) = \text{rank}(B)$  (ez a 8. Tétel). Tehát a (3.13) egyenletnek létezik és egyértelmű megoldása az ismeretlen  $\mathbf{v}$  vektorra. Nevezetesen:

$$\mathbf{v} = (M^T M)^{-1} M^T \mathbf{x}.$$

Innen és (3.12) egyenletből adódik, a keresett

$$T(\mathbf{x}) = M (M^T M)^{-1} M^T \mathbf{x}.$$

■

### 3.3.1. Alkalmazás I. lineáris egyenletrendszerek

Adott egy lineáris egyenletrendszer, amely  $m$  egyenletből és  $n$  ismeretlenből áll. Legyen ennek mátrixa  $A$ . Ekkor az egyenletrendszer leírható:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{3.14} \text{ ?28?}$$

alakban. Ha ezt meg tudjuk oldani akkor jó. Ha viszont nem megoldható akkor is tehetünk valamit, nevezetesen meg lehet keresni azt az  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  vektort, amire

$$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$$

a minimális. Mivel

$$\text{col}(A) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m : \exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{w} = A \cdot \mathbf{y}\}$$

ezért értelemszerűen azt az  $\mathbf{x}$  vektort amire  $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$  értéke a minimális megkapjuk mint a  $\mathbf{b}$  merőleges vetületét a  $\text{col}(A)$  altérre. Nevezetesen: Legyen

$\mathbf{b}^*$  a  $\mathbf{b}$  vektornak a  $\text{col}(A)$ -ra vett merőleges vetülete.

A 9. Tétel segítségével a  $\mathbf{b}^*$  vektor meghatározható. Mivel definíció szerint  $\mathbf{b}^* \in \text{col}(A)$  ezért a

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}^* \tag{3.15} \text{ ?29?}$$

egyenletnek van legalább egy (esetleg végtelen sok) megoldása. Megoldva ezt az egyenletet meg kapjuk a (3.14) egyenlet ún. **legkisebb négyzetes** megoldását.

Egyszerűbb úton is eljuthatunk a (3.14) egyenlet **legkisebb négyzetes** megoldásához:

Nevezetesen: a (3.15) egyenlet ekvivalens a

$$\mathbf{b} - A\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{b}^*.$$

Beszorozva mind két oldalt  $A^T$ -vel:

$$A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = A^T(\mathbf{b} - \mathbf{b}^*). \quad (3.16) \text{ ?30?}$$

Házi feladat belátni, hogy ennek az egyenletnek a jobb oldala a  $\mathbf{0}$  vektorral egyenlő. Így: a (3.14) egyenlet **legkisebb négyzetes**  $\mathbf{x}$  megoldása kielégíti a

$$\boxed{(A^T A)\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}.} \quad (3.17) \text{ ?31?}$$

egyenletet, melyet a (3.14) egyenlet ún. **normál egyenletének** hívunk.

**Legkisebb négyzetek módszere:** Adottak az  $x, y$  változók,

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

melyekről okunk van feltételezni lineáris kapcsolat van közöttük. Vagyis valamilyen **meghatározandó, általunk még ismeretlen**  $a, b \in \mathbb{R}$ -re:

$$y_i = ax_i + b \quad i = 1, \dots, n.$$

Azonban az adatokat mérések eredményeként kapjuk és ezért hibával terhelték. Hogyan adhatjuk az adatok alapján elérhető lehető legjobb becslést az  $a, b$  értékére?

**Megoldás:** Az  $a, b$ -nek mint **ismeretleneknek** ki kellene elégíteni az

$$\begin{aligned} y_1 &= ax_1 + b \\ y_2 &= ax_2 + b \\ &\vdots \\ y_n &= ax_n + b \end{aligned} \quad (3.18) \text{ {?}}$$

a mérési hibák miatt azonban ilyen  $a, b$  nem létezhet. Tehát keressük azt a megoldást, melyre legalább is a hibák négyzeteinek összege minimális. Ezt a (3.18) egyenletrendszer legkisebb négyzetek megoldása adja. Ez az egyenletrendszer mátrixos alakban:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad (3.19) \text{ ?35?}$$

Felírjuk tehát a (3.17) normál egyenletet:

$$(A^T A) \cdot \mathbf{x} = A^T \cdot \mathbf{b}. \quad (3.20) \text{ ?36?}$$

Vegyük észre, hogy  $A^T A$  egy  $2 \times 2$ -es mátrix. Vagyis a (3.20) egyenletrendszer egy két egyenletből és két ismeretlenből álló rendszer. Mivel  $\text{rank}(A) = 2$  ezért a 8. Tétel miatt  $\text{rank}(A^T A) = 2$  tehát a 6. Tétel miatt létezik egyetlen megoldása. Ez a megoldása adja a keresett  $a, b$  értékeket.

**6. PÉLDA:** Hooke törvényéből következik, hogy ha egy függőlegesen fel-függesztett rugóra  $x$  súlyt helyezünk és ennek hatására a rugó  $y$  hosszúra nyúlik, akkor az  $x$  és  $y$  között lineáris összefüggés van vagyis valamely  $a, b$ -re

$$y = a + bx \quad (3.21) \text{ ?38?}$$

teljesül. A következő mérési eredmények ismeretében határozzuk meg az  $a$  és  $b$  értékét:

súly N-ban	1	2	4	6	8
tömeg cm-ben	6.9	7.6	8.7	10.4	11.6

**Megoldás:** A (3.19) egyenletbeli  $A$  mátrix és  $\mathbf{b}$  vektor:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6.9 \\ 2 & 7.6 \\ 4 & 8.7 \\ 6 & 10.4 \\ 8 & 11.6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6.9 \\ 7.6 \\ 8.7 \\ 10.4 \\ 11.6 \end{bmatrix}$$

Innen a normál egyenlet

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 21 \\ 21 & 121 \end{bmatrix}}_{A^T A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 45.2 \\ 212.1 \end{bmatrix}}_{A^T \mathbf{b}}.$$

Ennek megoldása

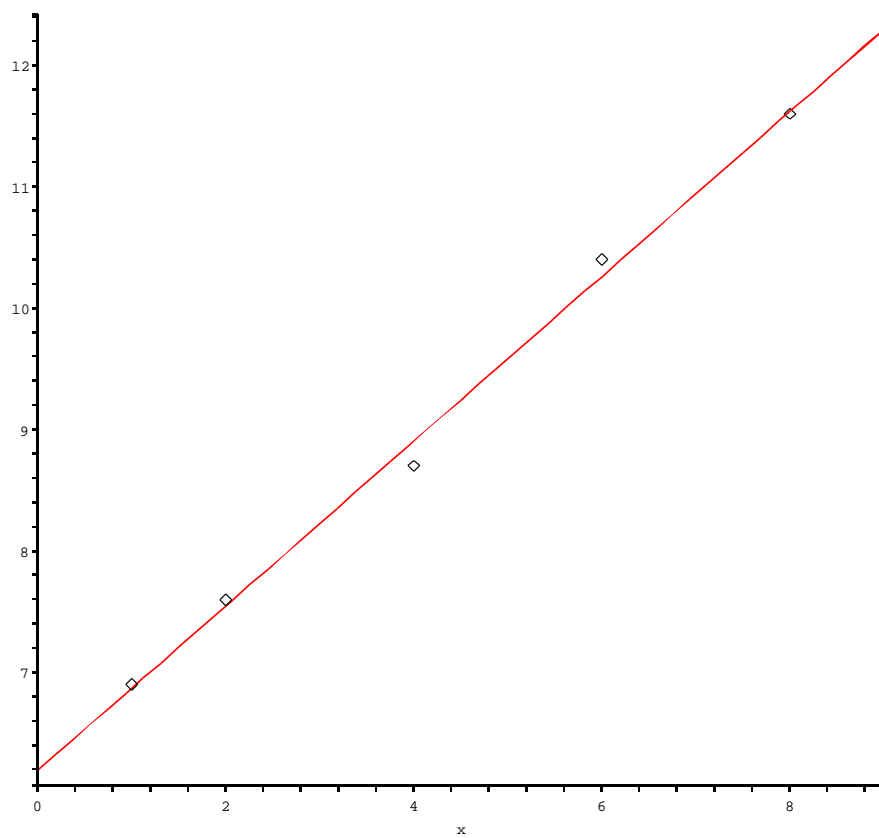
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.2 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

Tehát

$$a = 6.189634146 \text{ és } b = 0.6786585366$$

A keresett úgynevezett regressziós egyenes:

$$y = 0.6786585366 \cdot x + 6.189634146.$$



3.3. ábra. Legkisebb négyzetek módszere.

## 4. fejezet

# A hatvány módszer

Elméletileg a mátrix sajátértékeit meghatározhatjuk mint a karakterisztikus egyenletének gyökeit. Azonban ez a módszer annyi számítási nehézséget tartalmaz, hogy a gyakorlatban szinte soha nem használjuk. Ebben a fejezetben egy olyan módszert tanulunk, mellyel jó becslést adható a legnagyobb sajátértékre és a hozzá tartozó sajátvektorra. Ezt a módszert internet kereső motoroknál is alkalmazzák.

**4. DEFINÍCIÓ:** Legyen  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Az

$$\mathbf{x}_0, A \cdot \mathbf{x}_0, A^2 \cdot \mathbf{x}_0, \dots, A^k \cdot \mathbf{x}_0, \dots$$

vektor sorozatot **az  $A$  mátrix által generált hatványsorozatnak hívjuk.**

Ebben a fejezetben a hatvány sorozat konvergenciájának segítségével számoljuk ki a legnagyobb sajátértéket és a hozzá tartozó sajátvektorokat.

**5. DEFINÍCIÓ:** Ha az  $A$  mátrix  $\lambda_1$  sajátértékének abszolút értéke nagyobb az  $A$  mint az bármely más sajátértékének abszolút értéke, akkor azt mondjuk, hogy a  $\lambda_1$  a domináns sajátérték és a  $\lambda_1$ -hez tartozó sajátvektorokat domináns sajátvektoroknak hívjuk.

**10. TÉTEL:** Legyen  $A$  egy  $n \times n$ -es szimmetrikus mátrix, melynek legnagyobb sajátértéke  $\lambda > 0$ . Ha  $\mathbf{x}_0$  **nem** merőleges a  $\lambda$  sajátvektoraiból álló altérre, akkor a normalizált hatványsorozat:

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 = \frac{A \cdot \mathbf{x}_0}{\|A \cdot \mathbf{x}_0\|}, \dots, \mathbf{x}_k = \frac{A \cdot \mathbf{x}_{k-1}}{\|A \cdot \mathbf{x}_{k-1}\|}, \dots \quad (4.1) \text{ ?39?}$$

konvergál egy egység hosszú domináns sajátvektorhoz és a

$$\mathbf{x}_1^T \cdot A\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k^T \cdot A\mathbf{x}_k, \dots$$

konvergál a  $\lambda$  domináns sajátértékhez.

## 4.1. Alkalmazás: Internet kereső motorokban

A Google kereső motorban alkalmazzák az ún. PageRank algoritmust. Ennek során definiálnak egy mátrixot, amely tartalmazza a keresés szempontjából releváns oldalak hivatkozási struktúráját. Ezek után a domináns sajátvektort használva fontosság szerinti csökkenő sorrendbe rendezik a releváns oldalakat. A keresés szempontjából releváns oldalakat a következő módon találják meg:

- Amikor a felhasználó keres egy szót vagy kifejezést a Google először egy standard szöveg alapú kereső motorral kiválasztja az oldalak kezdeti  $S_0$  halmazát.
- Ez tartalmaz sok felesleges oldalt (hiszen a keresett szónak több számunkra irreleváns jelentése is lehet) továbbá lehetnek számunkra fontos oldalak, amelyek  $S_0$  ban nem szerepelnek. Nevezetesen olyan oldalak, amelyek azt a dolgot amire keresünk a keresésbe általunk beírt szó szinonimájával fejezik ki. Ezért a Google itt nem részletezendő módon az  $S_0$  oldal halmazt kiterjeszti oldalakra  $S$  halmazára, amelyekről feltételezzük, hogy a számunkra érdekes oldalakat már tartalmazza.
- A kereső motor feladata, hogy az oldalak ezen  $S$  halmazát (ami több ezer oldalt is tartalmazhat) a keresés szempontjából vett fontosság szerinti csökkenő sorrendbe állítsa. Itt játszik szerepét az ebben a fejezetben tanult hatvány módszer. Itt az ún. PageRank algoritmus

egy variációját az ún. HITS (Hypertext Induced Topic Search) algoritmust ismertetjük, melyet 1998-ban fejlesztettek ki a **Clever** search engine (IBM) számára:

<http://www.research.ibm.com/topics/popups/innovate/hci/html/chow.html>

A HITS algoritmus során először is felírjuk az ún. adjacency (szomszédosági) mátrixot. Ha az oldalak fent említett  $S$  halmaza  $n$  elemű, akkor az  $A$  adjacency mátrix egy  $n \times n$  mátrix és az  $A$  mátrix  $(i, j)$ -edik elemére teljesül, hogy

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik oldal hivatkozik a } j\text{-edik oldalra;} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

**7. PÉLDA:** Egy tipikus példa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2) \text{ ?40?}$$

Ez azt jelenti, hogy:

- az 1. oldal hivatkozik a 3. és 4. oldalakra.
- A 2. oldal hivatkozik az 1. oldalra.
- A 3. oldal hivatkozik az 1. és a 4. oldalakra.
- A 4. oldal hivatkozik az 1. 2. és 3. oldalakra.

Egy oldalnak két fontos szerepe lehet:

**hub:** sok más oldalra hivatkozik

**authority:** őt hivatkozza sok más oldal.

A fenti (4.2) példában a 4. oldal hivatkozik három másik oldalra tehát a 3. oldalnak mint hubnak a nagysága 3. A 4. oldalra hivatkozik két oldal tehát a 4. oldalnak mint authoritynek a nagysága 2. Az  $i$ -edik sorban található elemek összege mutatja meg, hogy az  $i$ -edik elem hány oldalra hivatkozik és az  $i$ -edik oszlopban álló elemek összege mutatja meg, hogy az  $i$  oldalt hányan hivatkozzák. Tehát a sor vektorok összegéből képzett vektor az ún. **kezdeti hub vektor**  $\mathbf{h}_0$  és az oszlop vektorok összegéből álló vektor az

ún. **kezdeti authority vektor**  $\mathbf{a}_0$ . Jelen esetben:

$$\mathbf{h}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Az  $\mathbf{a}_0$  vektorra célszerű úgy gondolni mint az  $A^T$  mátrix sor összeg vektorára. Általában: ha az  $A$   $n \times n$  mátrix egy adjacency mátrix, akkor a kezdeti authority és a kezdeti hub vektorokat a fenti módon számítjuk ki.

Azonban mivel a fenti példánkban az 1. oldal a legnagyobb authority ezért azoknak a huboknak akik őt hivatkozzák több súlyt kell adni. Hasonlóan kezdetben a 4. oldalt tekinthetjük a fő hub-nak ezért azon oldalaknak akikre a 4. oldal hivatkozik nagyobb súlyt kell adni. Ezért képezzük a

$$\mathbf{h}_1 := \frac{A \cdot \mathbf{a}_0}{\|A \cdot \mathbf{a}_0\|} \approx \begin{bmatrix} 0.431 \\ 0.323 \\ 0.539 \\ 0.647 \end{bmatrix} \quad \text{és az} \quad \mathbf{a}_1 := \frac{A^T \cdot \mathbf{h}_1}{\|A \cdot \mathbf{h}_1\|}$$

vektorokat. A számlálók:

$$A \cdot \mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mindkét esetben a nevező az egységre normálást végzi. A számlálóban az  $A$  oszlop vektorainak lineáris kombinációja van az együttthatók az authority vektor elemei. Az így kapott  $\mathbf{h}_1$  vektor egy egység vektor amelynek  $i$ -edik eleme azt méri, hogy az  $i$ -edik oldal mekkora hub az  $\mathbf{a}_0$  vektorból jövő súlyozással véve.

A második formula nevezője: 2.19141. A számlálójában az  $A^T$  oszlop vektorainak lineáris kombinációit vesszük, ahol a súlyokat a  $\mathbf{h}_1$  vektor szol-

gáztatja.

$$\begin{aligned}
 A^T \mathbf{h}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.431 \\ 0.323 \\ 0.539 \\ 0.647 \end{bmatrix} \\
 &\approx 0.431 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.323 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.539 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.647 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1.509 \\ 0.647 \\ 1.078 \\ 0.970 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Mivel az  $A^T$  oszlopai az  $A$  sorai ezért a normálás után kapott vektor egy súlyozott authority vektor. Tehát

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{2.191} \begin{bmatrix} 1.509 \\ 0.647 \\ 1.078 \\ 0.970 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.688 \\ 0.295 \\ 0.492 \\ 0.442 \end{bmatrix}.$$

Ezt folytatva kapjuk az  $\mathbf{a}_2$ -öt majd abból a  $\mathbf{h}_2$ -öt és így tovább. Vegyük észre, hogy

$$\mathbf{a}_k = \frac{(A^T A) \mathbf{a}_{k-1}}{\|(A^T A) \mathbf{a}_{k-1}\|} \quad \text{és} \quad \mathbf{h}_k = \frac{(A A^T) \mathbf{h}_{k-1}}{\|(A A^T) \mathbf{h}_{k-1}\|}$$

Ezért  $\mathbf{a}_k$  és  $\mathbf{h}_k$  konvergál az  $A^T A$  és a  $A A^T$  mátrixok domináns sajátvektoraihoz. Az  $A^T A$  domináns sajátvektora elemeinek sorrendje adja a keresett fontossági sorrendet.