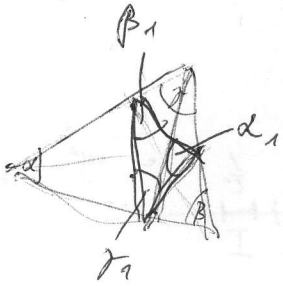
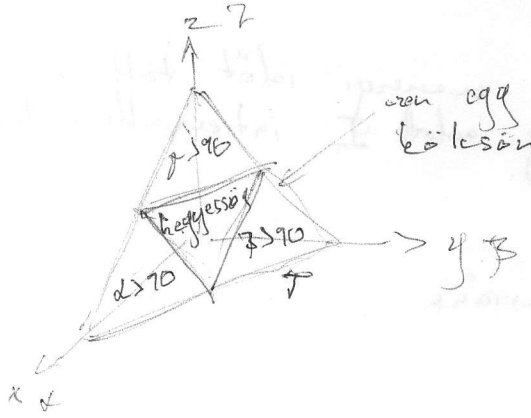


talpponti háromszög – iteráljuk

előfordul-e minden háromszög?
milyen gyakoriak maradnak a hegyesszögűek?



az egy pont fedi meg egy háromszöget kölcsönösen egyértelműen

$F : T \longrightarrow T$

$F(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$

hegyesszögű	$180-2\alpha,\ 180-2\beta,\ 180-2\gamma$
$\alpha > 90$	$2\alpha-180,\ 2\beta,\ 2\gamma$
$\beta > 90$	$2\alpha,\ 2\beta-180,\ 2\gamma$
$\gamma > 90$	$2\alpha,\ 2\beta,\ 2\gamma-180$

F lokális inverzei

$$S_0(\alpha,\beta,\gamma) = \left(90-\frac{\alpha}{2},\ 90-\frac{\beta}{2},\ 90-\frac{\gamma}{2}\right)$$
$$S_1(\alpha,\beta,\gamma) = \left(90+\frac{\alpha}{2},\ \frac{\beta}{2},\ \frac{\gamma}{2}\right)$$
$$S_2(\alpha,\beta,\gamma) = \left(\frac{\alpha}{2},\ 90+\frac{\beta}{2},\ \frac{\gamma}{2}\right)$$
$$S_3(\alpha,\beta,\gamma) = \left(\frac{\alpha}{2},\ \frac{\beta}{2},\ 90+\frac{\gamma}{2}\right)$$

az F-en való orbit az (α,β,γ) elemen

kódolás

$$\underset{0}{\begin{pmatrix}9\\89\\82\end{pmatrix}} \longrightarrow \underset{1}{\begin{pmatrix}162\\2\\16\end{pmatrix}} \longrightarrow \underset{1}{\begin{pmatrix}144\\4\\32\end{pmatrix}} \longrightarrow \underset{1}{\begin{pmatrix}108\\8\\64\end{pmatrix}} \longrightarrow \underset{3}{\begin{pmatrix}36\\16\\128\end{pmatrix}} \longrightarrow \underset{0}{\begin{pmatrix}72\\32\\256\end{pmatrix}}$$

kódok halmaza: Σ

balra tolás

$\sigma(i_1, i_2, \dots) = (i_2, i_3, \dots)$

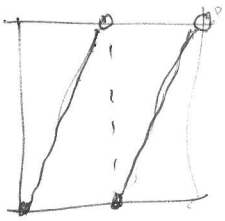
van-e olyan háromszög, amelynek talppontú háromszög-sorozatában minden háromszög előfordul?

véges sorozatok felsorolásával

dekódolás

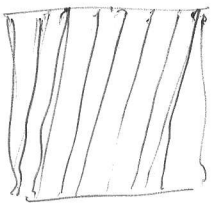
invariáns mérték: lép és inverz mértéke azonos

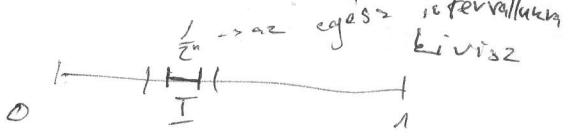
ergodikus: nem esik szét két részre, ha egy halmaz és inverz képe megegyezik, nullmértékű vagy teljes mértékű



$T: x \mapsto 2x \pmod 1$

T^n

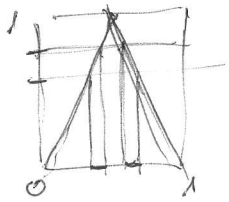




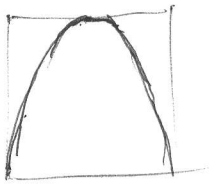
$x \in [0;1[$

$A_n(x) := \frac{1}{n} \# \{ 0 \le i < n : T^i x \in I \}$ átlagosan mennyi időt tölt az orbit egy adott I intervallumban

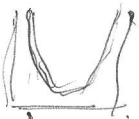
$\lim_{n\to\infty} A_n(x) =: A(x) \underset{\text{basic ergodics theorem}}{=} |I|$



$\Rightarrow$ Lebesgue-mérték invariáns ergodikus is



$x \mapsto 4x(1-x)$ van invariáns ergodikus mértéke és valószínűsége: intervallumban mérték szerinti integrál


ilyen jellegű

eltolás nem érdekes
talppont háromszögeknél 2-szeresére nyújt (–: forgatás)
$\Rightarrow$ a normalizált Lebesgue-mérték megfelelő
$\Rightarrow$ minden 4. talppontú háromszög hegyesszögű

$\mathbb{R}^d$

$L: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$
invertálható lineáris leképezés, minden sajátérték 1-től különböző

pl. $d=3$

$x, Lx, L^2x, \dots, L^n x$

triviális eset: $\forall$ sajátérték $|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3| < 1$

$L(x) = \underline{\underline{A}}x$ $\quad L^n(x) = A^n(x)$
természetes bázisban

$\|L^n(x)\| = \|A^n x\| \longrightarrow 0$

$|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3| > 1$ is hasonlóan triviális invertálással elegendő

$|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1; \quad |\lambda_3| > 1$

1. eset $\quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 > \lambda_1$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

választható ilyen bázis (nem a természetes) (v_1, v_2, v_3)

2. eset $\quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \quad \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$W^u = \langle v_3 \rangle$

$W^s = \langle v_1, v_2 \rangle$

kifeszített altér

$LW^u = W^u$

$L^{-1}W^u = W^u$

$LW^s \subset W^s$

$L^{-1}W^s \subset W^s$

$L^n \bar{u} = L^n \bar{a} + L^n \bar{b} \qquad \bar{u} = \underset{W^s}{\bar{a}} + \underset{W^u}{\bar{b}}$

$\downarrow$

0

(X, ρ) metrikus tér $\quad T: X \to X$ topologikusan tranzitív, ha $\exists x: \{T^n x\}_{n=1}^{\infty}$ sűrű $\quad T^n = \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{n}$

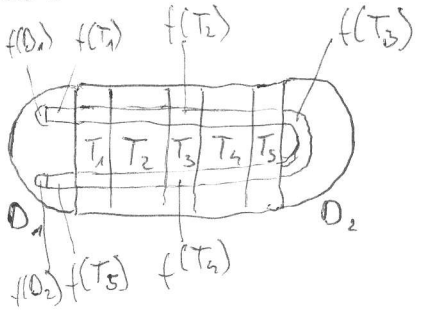
1. fa. T top. tranz., ha $\forall\, U, V \neq \emptyset$ nyílt $\exists n$, hogy $T^n U \cap V \neq \emptyset$

T topologikusan keverő, ha $\forall\, U, V \neq \emptyset$ nyílt $\exists N$, ha $n > N$ $T^n U \cap V \neq \emptyset$

$(\Sigma, \sigma) \qquad \Sigma = \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$

$\sigma(i_1, i_2, \ldots) = (i_2, i_3, \ldots)$

horseshoe



$S := \bigcup_{i=1}^{5} T_i \qquad Q = S \cup D_1 \cup D_2$

tfh. $f|_{T_2 \cup T_4}$ affin $\quad f \in C^2$

$\exists X \in D_1$

$\forall x \in D_1 \quad f^n(x) \to X$

$\forall y \in D_2 \quad f(y) \in D_1 \quad \lim_{n\to\infty} f^n(y) \to X$

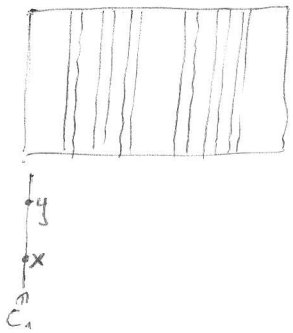
$z \in T_1 \cup T_3 \cup T_5 \Rightarrow f^2(z) \in D_1$

$\lim_{n\to\infty} f^n(z) = X$

$\Lambda^+ = \{x : \forall n \geq 0 \quad f^n x \in S\} = C_1 \times [0;1]$

1. lépésben 2 sáv éli túl
2. 2^2
3. 2^3

$\mathrm{dist}(f^n(x), f^n(y)) < \lambda^n$



$W^s(x) = \{y : \mathrm{dist}(f^n(x), f^n(y)) \to 0\}$

$W^u(x) = \{y : \mathrm{dist}(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to 0\}$

$\Lambda^- = \{y : f^{-n}(y) \text{ értelmes } \forall n > 0\}$

első körben 2 sáv éli túl: $f(T_2)$ és $f(T_1)$

$[0;1] \times C_2$

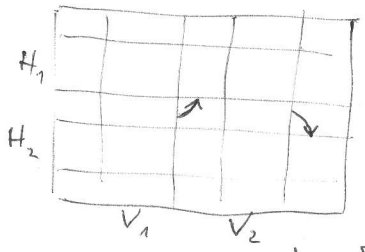
$\Lambda := \Lambda^- \cap \Lambda^+ = C_1 \times C_2$

$\Sigma = \{1;2\}^{\mathbb{Z}}$

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & \Sigma \arrow[d, "\pi"] \\ \Lambda \arrow[r, "f"] & \Lambda \end{tikzcd}$$

$\sigma(\ldots i_{-n} \ldots i_{-1} \bullet i_0 i_1 i_2 \ldots) =$

$= (\ldots i_{-2} i_{-1} i_0 \bullet i_1 i_2 \ldots)$



$H_i := f(V_i)$

$\bar{i} = (\ldots i_{-n} \ldots i_{-1} \bullet i_0 i_1 \ldots i_n \ldots) \in \Sigma$

$V_{i_0 i_1 \ldots i_m} = V_{i_0} \cap f^{-1} V_{i_1} \cap \ldots \cap f^{-m} V_{i_m}$

$\pi(\bar{i}) = \lim_{n,m \to \infty} S_{i_{-n} \ldots i_{-1} i_0 \ldots i_m}$

$V_{i_0} \cap f^{-1} V_{i_1} = \{x \in V_{i_0}, f(x) \in V_{i_1}\}$

$H_{i_{-1} \ldots i_{-n}} = H_{i_{-1}} \cap f H_{i_{-2}} \cap \ldots \cap f^{n-1} H_{i_{-n}}$

$S_{i_{-n} \ldots i_{-1} i_0 i_1 \ldots i_m} = H_{i_{-1} \ldots i_{-n}} \cap V_{i_0 \ldots i_m}$

$f(S_{i_{-n} \ldots i_{-1} \bullet i_0 \ldots i_m}) = S_{i_{-n} \ldots i_0 \bullet i_1 \ldots i_m}$

p k-adrendű periodikus pont, ha $f^k(p) = p$, de $\forall n < k \quad f^n(p) = p$

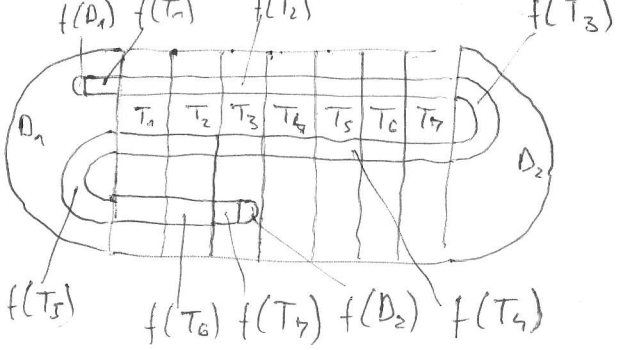
$x = \pi(\bar{i})$ $\qquad F_x$ az x-et tartalmazó függőleges egyenes

$F_x \cap \Lambda = \pi\{\bar{j} \in \Sigma : j_k = i_k \ \forall k \geq 0\}$

$\bigcup_{n \geq 0} \pi\{\bar{j} \in \Sigma : j_k = i_k \ \forall k \geq n\}$

$\bigcup_{n \geq 1} \pi\{\bar{j} \in \Sigma : j_k = i_k \ \forall k \leq -n\}$

hf.:



$A = ?$

az előbb bármilyen sorozat megengedett volt

$$\Sigma_A = \{ i \in \Sigma : A_{i_k i_{k+1}} = 1 \}$$

$\mathbb{T} := \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ tórusz

$\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}$ természetes

$\begin{matrix} (x_1, y_1) \\ (x_2, y_2) \end{matrix}$ ekvivalens, ha $(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \in \mathbb{Z}^2$

$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris, $L\bar{x} = A\bar{x}$ (↑ természetes bázisban)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

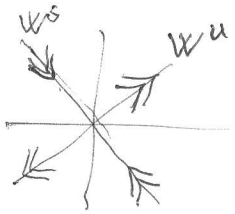
(i) $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

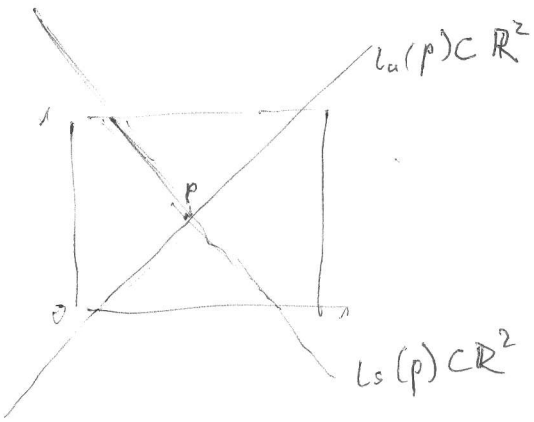
(ii) $|\det(A)| = 1$

(iii) $|\lambda_1|, |\lambda_2| \neq 1$

$L_A : \pi \circ L$

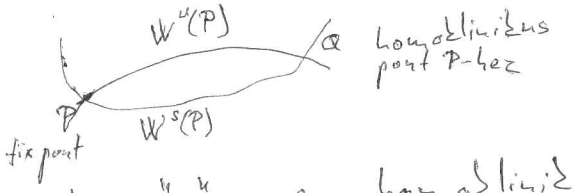
hiperbolikus: $|\lambda_1| > 1$; $|\lambda_2| < 1$





$W^s(p) = \pi\, L_s(p)$

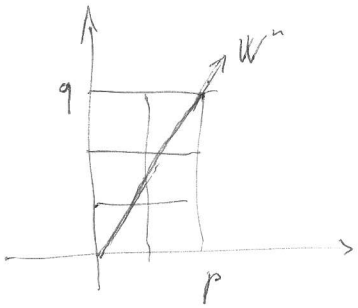
$W^u(p) = \pi\, L_u(p)$



mikor vannak sűrűen a homoklinikus pontok? ha a szög irrac

tfh. a szög racionális

$r = \frac{p}{q}$



$B = A^{-1}$ mátrix

$\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$B \cdot \bar{v} = \bar{v}_1 \neq \bar{0}$ mert B egy-egyértelmű

$\bar{v}_1 \in \mathbb{Z}^2$

$B^2 \bar{v} = \bar{v}_2 \neq \bar{0}$

$\bar{v}_2 \in \mathbb{Z}^2$

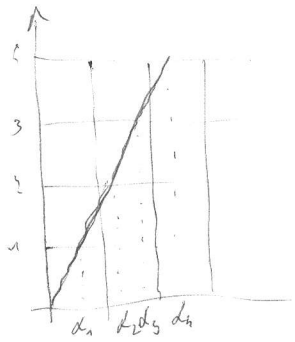
$\vdots$

$B^n \bar{v} = \bar{v}_n \neq \bar{0}$

$\bar{v}_n \in \mathbb{Z}^2$

$\{\bar{v}_n\}$ egészvektorokból álló sorozat konvergál $\bar{0}$-hoz, de az nem szerepel benne ↯

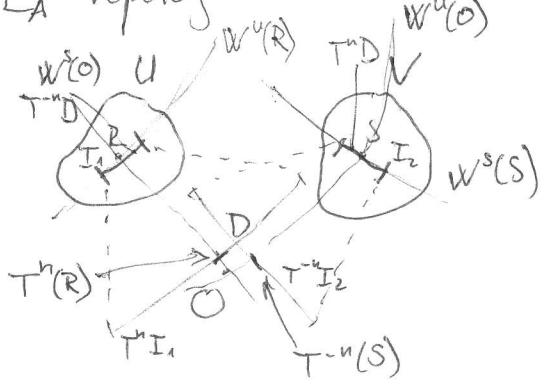
ha a szög irracionális



$\alpha_n = n\alpha \pmod 1$

$\{n\alpha \pmod 1\}$ sűrű

↳ topologikusan tranzitív

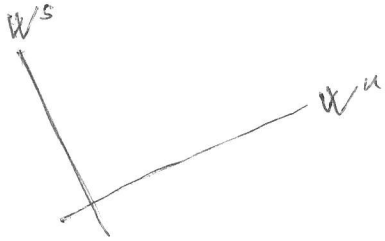


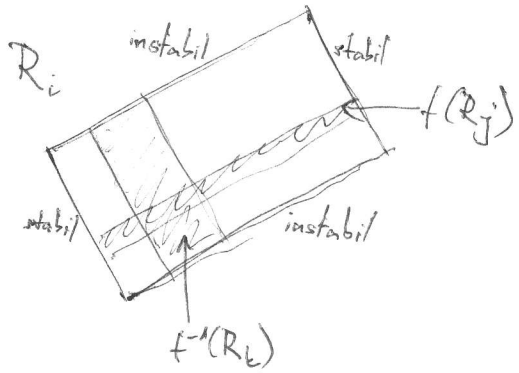
R, S O-hoz homoklinikus pontok

a definícióba 2n-et írva kapjuk

Markov partició

$$\mathbb{T} = \bigcup_{i=1}^{m} R_i$$





ha $f(R_j) \cap R_i \neq \emptyset$
stabil faltól stabil falig tart (előrekép)

ha $f^{-1}(R_k) \cap R_i \neq \emptyset$
instabil faltól instabil falig tart (visszakép)

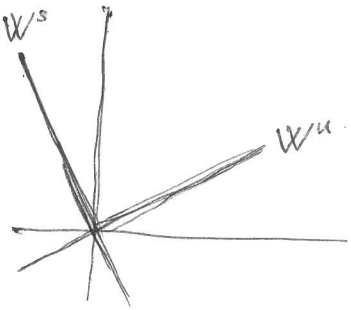
mikor létezik véges Markov partició?

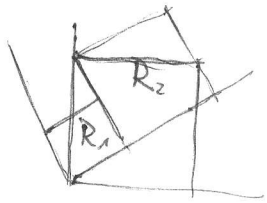
speciális eset: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

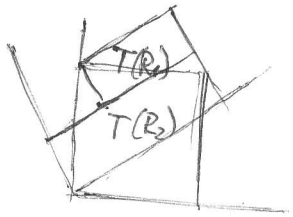
$$\lambda_s = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \lambda_u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x \qquad y = -\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})x$$

W^s $\qquad$ W^u

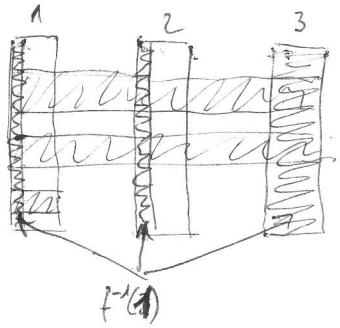






miért lényeges a véges Markov partició?
létrehozhatunk szimbolikus dinamikát
átmenedi mátrix felírható

$$\begin{tikzcd} \Sigma_A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & \Sigma_A \arrow[d, "\pi"] \\ \Lambda \arrow[r, "f"] & \Lambda \end{tikzcd}$$



az X egy attraktora F-nek, ha $\exists\, V \subset \mathbb{R}^d$ nyílt, $F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $F(\overline{V}) \subset V$,

$$X = \bigcap_{n=0}^{\infty} F^n(V)$$

hf: ha F egy-egyértelmű, és Λ egy attraktora F-hez, akkor $F(\Lambda)$

Λ egy invariáns halmaz $(\Lambda = F(\Lambda) = F^{-1}(\Lambda))$

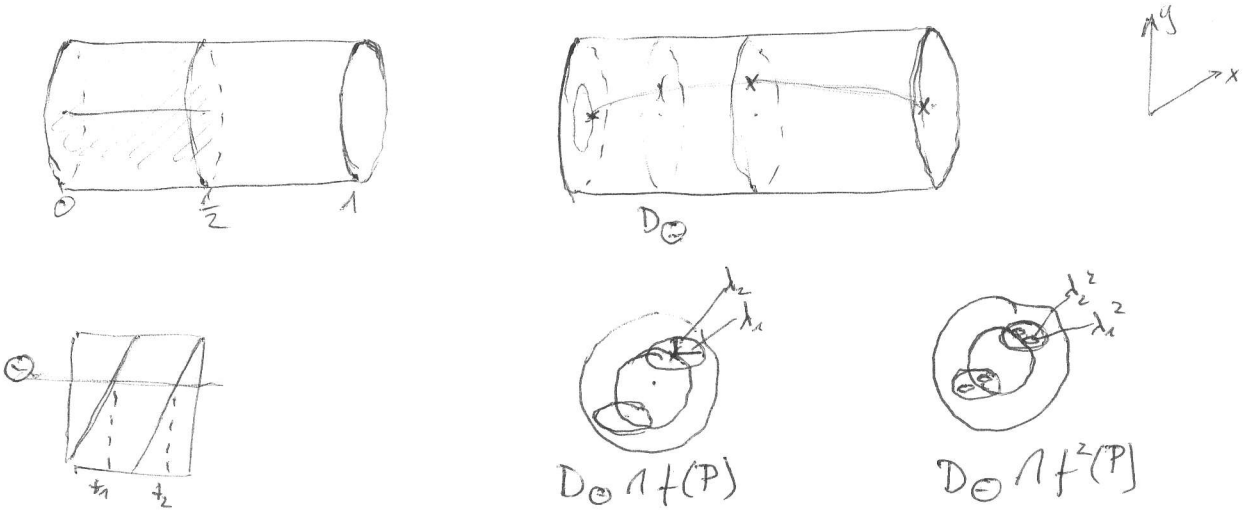
hf: a horseshoe attraktor?

szolenoid:

$$f : S^1 \times D \longrightarrow \overbrace{S^1 \times D}^{P:=} \; ; \; D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$f(t,x,y) = \left(2t \pmod 1 ; \lambda_1 x + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) ; \lambda_2 y + \frac{1}{2}\sin(2\pi t)\right)$$

$$0 < \lambda_2 \leq \lambda_1 < \frac{1}{2}$$



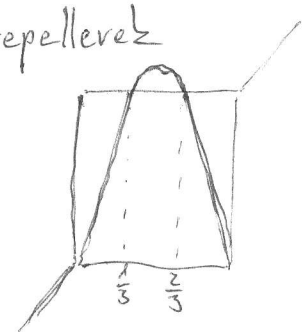
$f^n(P)$

2^n db ellipszisből áll, melyeknek tengelyei λ_1^n, λ_2^n

$$\Lambda := \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(P)$$

hf: kódolás felépítése

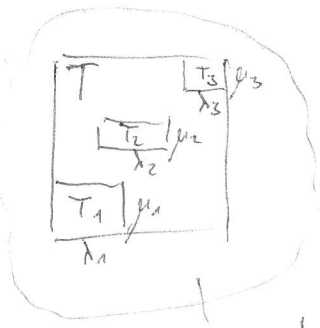
repellerek



triadikus Cantor-halmaz - belőle nem szállnak el

sima Riemann-sokaság

$f : M \longrightarrow M$ C^2 leképezésről azt mondjuk, hogy expanding és repellere Λ, ha Λ egy invariáns halmaz $(\Lambda = f(\Lambda) = f^{-1}(\Lambda))$, $\exists \beta > 1$, $\forall x \in \Lambda$, $\forall \underline{v} \in T_xM$, $\forall n$ $\|d_x f^n \bar{v}\| \geq \beta^n \|\bar{v}\|$



$f : T_i \longrightarrow T$ rá-, affin

$x \in T_i$ $\quad d_x f = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_i} \end{bmatrix}$ $\quad x \notin T_i$ $\quad f(x) \notin T$

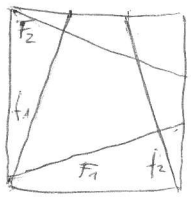
$F_i : T \longrightarrow T_i$ lokális inverzek $\quad \mathcal{F} = \{F_i\}_{i=1}^{3}$

$d_x F_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \mu_i \end{bmatrix}$

$$\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i_1 \ldots i_n} F_{i_1} \circ \ldots \circ F_{i_n}[T]$$

~~ht~~ vannak a T-n kívüliek

példánkban:



$\{R_1, \dots, R_m\}$; $\bigcup_{i=1}^{m} R_i = \Lambda$

$\mathrm{int}(R_i) \cap \mathrm{int}(R_j) = \emptyset$

$f(\mathrm{int}(R_i)) \cap \mathrm{int}(R_j) \neq \emptyset \Rightarrow f(R_i) \supset R_j$

$R_i = \overline{\mathrm{int}(R_i)}$

ezen feltételek teljesülése esetén hívjuk Markov-particiónak

tétel: ha f C^2 nyújtó leképezés, Λ pedig a repellere az f-nek, akkor $\exists$ Markov-partíció

def.: $S = (X, \mathcal{A}, \mu, T)$ $T: X \to X$ mértéktartó

$S' = (X', \mathcal{A}', \mu', T')$ $T': X' \to X'$ mértéktartó

S és S' izomorfak, ha $\exists \varphi$ izomorfizmus $X \to X'$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ X' \arrow[r, "T'"] & X' \end{tikzcd}$$

a, – φ mérhető

b, – $\forall A' \subset X'$: $\mu(\varphi^{-1}A') = \mu'(A')$

$\Rightarrow \mu'$ a μ-nek a push down mértéke

$\mu' = \varphi_* \mu$

c, – μ-m.m. x-re $\varphi T x = T' \varphi x$

ha a, b, c, teljesül, akkor az S' az S-nek faktora

d, – $\exists \psi: X' \to X$; $\psi(\varphi(X)) = X$ μ-m.m. x-re

~~μ-m.m. x-re~~ és $\varphi(\psi(x')) = x'$ μ-m.m. x'-re

ψ mértéktartó

$\Sigma := \{1, \dots, m\}^{\mathbb{Z}}$

Bernoulli-mértéket $\mu = \{p_1, \dots, p_m\}^{\mathbb{Z}}$; $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$

$[i_0, \dots, i_k] := \{\bar{j} \in \Sigma : (j_0, \dots, j_k) = (i_0, \dots, i_k)\}$

$\mu[i_0, \dots, i_k] = p_{i_0} \cdots p_{i_k}$

$BS(\bar{p}) = (\Sigma, \mathcal{A}, \mu, \sigma)$

$BS(\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\})$, $BS(\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\})$ nem izomorfak

$BS(\{\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\})$, $BS(\{\frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{1}{18}\})$ izomorfak

$BS(\{\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\})$, $BS(\{\frac{1}{2},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8}\})$ izomorfak

$BS(\{\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\})$, $BS(\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\})$ izomorfak

tétel: (Ornstein)
$BS(\bar{p})$ izomorf $BS(\bar{q})$-hoz akkor és csak akkor, ha az entrópiák megegyeznek

cél: Bowen - Sinai - Ruelle - mérték

$x, Tx, \dots, T^n x, \dots$

$Prob(T^n x \in V)$ $\quad$ μ-m.m. x $\quad$ ergodikus mérték

$\frac{1}{n}\#\{0 \le k < n : T^k x \in V\} \longrightarrow \mu(V)$

a Bowen - Sinai - Ruelle - mérték Lebesgue - m.m. x-re mondja

$S = (X, \mathcal{A}, \mu, T)$

$\alpha = (A_1, \dots, A_m)$ partíció

az α partíció entrópiája

$H_\mu(\alpha) = \sum -\mu(A_i)\log\mu(A_i)$

x k hosszú kódja: $(i_0, \dots, i_{k-1})$

$A_{i_0 \dots i_k} = \{x \in X ; x \in A_{i_0}, \dots, T^{k-1}x \in A_{i_{k-1}}\}$

$\alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \dots \vee T^{-(k-1)}\alpha =: \alpha^k$

közös finomítás

$H_\mu(\alpha^k) = H_\mu(\alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \dots \vee T^{-(k-1)}\alpha)$ $\quad$ ezt k bit adja

partíció

átlagosan 1 bitre mennyi információ

$\frac{1}{k}H_\mu(\alpha^k) = \frac{1}{k}H_\mu(\alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \dots \vee T^{-(k-1)}\alpha)$

$h_\mu(T, \alpha) := \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} H_\mu(\alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \dots \vee T^{-(k-1)}\alpha)$

T leképezés entrópiája az α particióra és a μ mértékre

$h_\mu(T) := \sup_\alpha h_\mu(T, \alpha)$

T leképezés entrópiája

a sup felvétetik minden olyan α-ra, amelyben különböző pontok kétirányú kódjai különbözőek

$BS(\bar{p})$ entrópiája

$\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ $\quad$ $\sum p_i = 1$ $\quad$ $p_i > 0$

$\alpha = \{{}_0[1], \dots, {}_0[m]\}$

$\mu = \{p_1, \dots, p_m\}^{\mathbb{Z}}$

$\mu([i_1 \dots i_k]) = p_{i_1} \cdots p_{i_k}$

$$h_\mu(T, \alpha) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} H_\mu(\underbrace{\alpha \vee \dots \vee T^{-(k-1)}\alpha}_{\substack{\text{partíció osztályai} \\ \{[i_1, \dots, i_k]\} \quad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}^k}})$$

$$H_\mu(\alpha \vee \dots \vee T^{-(k-1)}\alpha) = \sum_{i_1 \dots i_k} -\mu[i_1 \dots i_k] \cdot \log \mu[i_1 \dots i_k]$$

$$\cancel{\sum -p_{i_j}} \quad -\sum \log p_{i_1}^{p_{i_1}} \cdots p_{i_k}^{p_{i_k}} = -\log \prod p_{i_1}^{p_{i_1}} \cdots p_{i_k}^{p_{i_k}} = \left(-\sum_{j=1}^{m} \log p_{i_j}^{p_{i_j}}\right) \cdot k$$

$$h_\mu(T, \alpha) = \sum -p_i \log p_i$$

$\bar{i} \in \sum$ μ-tipikus elemet választunk

ebből egy hosszú sorozatot $[i_1, \dots, i_k]$

$\mu([i_1, \dots, i_k]) \approx e^{h_\mu(\bar{i}) \cdot k}$ Shannon-Breiman-McMillan

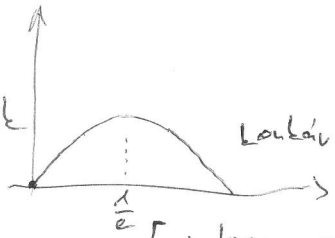
$(X, \mathcal{B}, \mu)$ T mértéktartó

$\mathcal{C} = (C_1, \dots, C_m)$ partició, ha $\bigcup C_i = X$, $\mu(C_i \cap C_j) = 0$ $i \neq j$

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ particiók közös finomítása: $\mathcal{C} \vee \mathcal{D} = \{C_i \cap D_j\}_{i,j}$

$H_\mu(\mathcal{C}) = \sum -\mu(C_i) \log \mu(C_i)$

cél: $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{C} \vee \dots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{C}) =: h_\mu(T, \mathcal{C})$ létezik



$H_\mu(\mathcal{C}) = \sum \phi(\mu(C_i))$

$$\phi(x) = \begin{cases} -x \log x, & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ha $\sum a_i = 1$, $a_i > 0$

$\sum a_i \phi(x_i) \leq \phi(\sum a_i x_i)$

$x_i > 0$

feltételes entrópia:

$H_\mu(\mathcal{C} | \mathcal{D}) = H_\mu(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) - H_\mu(\mathcal{D})$

$$H_\mu(\mathcal{C} | \mathcal{D}) = \sum_{i,j} -\mu(C_i \cap D_j) \log \mu(C_i \cap D_j) -$$

$$\underbrace{- \sum_j -\mu(D_j) \log \mu(D_j)}_{\sum_{i,j} -\mu(C_i \cap D_j) \log \mu(D_j)} = \sum_{i,j} -\mu(C_i \cap D_j) \log \frac{\mu(C_i \cap D_j)}{\mu(D_j)} =$$

$$= \sum_{i,j} \mu(D_j) \left(-\frac{\mu(C_i \cap D_j)}{\mu(D_j)} \log \frac{\mu(C_i \cap D_j)}{\mu(D_j)} \right)$$

$$H_\mu(\mathcal{C}|\mathcal{D}) = \sum_{i,j} \mu(D_j)\,\phi\left(\frac{\mu(C_i \cap D_j)}{\mu(D_j)}\right)$$

a feltételes mértékek entrópiájának $\mu(D_j)$-vel súlyozott átlaga

$H_\mu(\mathcal{C}|\mathcal{D}) \le H_\mu(\mathcal{C})$

$\Rightarrow H_\mu(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) \le H_\mu(\mathcal{C}) + H_\mu(\mathcal{D})$ T mértéktartó

$a_n = H_\mu(\mathcal{C} \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{C})$

$H_\mu(T^{-n}\mathcal{C} \vee \ldots \vee T^{-(n+m-1)}\mathcal{C}) = H_\mu(T^{-n}(\mathcal{C} \vee \ldots \vee T^{-(m-1)}\mathcal{C})) = a_m$

$a_{n+m} = H_\mu(\mathcal{C} \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{C} \vee T^{-n}\mathcal{C} \vee \ldots \vee T^{-(n+m-1)}\mathcal{C}) \le a_n + a_m$

lemma: ha $\{a_n\}$: $a_{n+m} \le a_n + a_m$ és $-\infty < \inf_n \frac{a_n}{n}$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_n \frac{a_n}{n}$$

$h_\mu(T) := \sup_{\mathcal{D}} h_\mu(T, \mathcal{D})$ elég finom partíció esetén elég jól közelít

$\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$ ($\mathcal{D}$ finomabb $\mathcal{C}$-nél) $H_\mu(\mathcal{C}|\mathcal{D}) = 0$

$H_\mu(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}|\mathcal{E}) \le H_\mu(\mathcal{C}|\mathcal{E}) + H_\mu(\mathcal{D}|\mathcal{E})$

biz.: $H_\mu(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}|\mathcal{E}) = (H_\mu(\mathcal{C} \vee \mathcal{D} \vee \mathcal{E}) - H_\mu(\mathcal{D} \vee \mathcal{E})) + (H_\mu(\mathcal{D} \vee \mathcal{E}) - H_\mu(\mathcal{E})) =$

$= H_\mu(\mathcal{C}|\mathcal{D} \vee \mathcal{E}) + H_\mu(\mathcal{D}|\mathcal{E}) \le H_\mu(\mathcal{C}|\mathcal{E}) + H_\mu(\mathcal{D}|\mathcal{E})$

$H_\mu(\mathcal{C}|\mathcal{D}) \le H_\mu(\mathcal{C}|\mathcal{E})$ ha $\mathcal{D} \supset \mathcal{E}$

biz.: $H_\mu(\mathcal{C}|\mathcal{E}) - H_\mu(\mathcal{C}|\mathcal{D})$ -ban behelyettesítve a korábbi kifejezést a konkavitásból adódik, hogy nemnegatív

$H_\mu(\mathcal{C}) \le H_\mu(\mathcal{D}) + H_\mu(\mathcal{C}|\mathcal{D})$

lemma:

(a) $H_\mu(T^{-k}\mathcal{C}|T^{-k}\mathcal{D}) = H_\mu(\mathcal{C}|\mathcal{D})$

(b) $h_\mu(T, \mathcal{C}) \le h_\mu(T, \mathcal{D}) + H_\mu(\mathcal{C}|\mathcal{D})$

(c) $h_\mu(T, \mathcal{C} \vee \ldots \vee T^{-n}\mathcal{C}) = h_\mu(T, \mathcal{C})$

biz.:

(a) triviális, definícióból, mert T mértéktartó

(b) $H_\mu(\mathcal{C} \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{C}) \le H_\mu(\mathcal{D} \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{D}) + nH_\mu(\mathcal{C}|\mathcal{D})$ lépés, ebből limint segítségével

tudjuk: $H_\mu(\mathcal{C} \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{C}) \le H_\mu(\mathcal{D} \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{D}) + H_\mu(\mathcal{C} \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{C}|\mathcal{D} \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{D})$

így elég belátnunk, hogy $H_\mu(\mathcal{C} \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{C}|\mathcal{D} \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{D}) \le nH_\mu(\mathcal{C}|\mathcal{D})$

$H_\mu(\mathcal{C} \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{C}|\mathcal{D} \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{D}) \le H_\mu(\mathcal{C}|\mathcal{D} \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{D}) + \ldots + H_\mu(T^{-(n-1)}\mathcal{C}|\mathcal{D} \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{D}) \le$

$\le H_\mu(\mathcal{C}|\mathcal{D}) + \ldots + H_\mu(T^{-(n-1)}\mathcal{C}|T^{-(n-1)}\mathcal{D}) = nH_\mu(\mathcal{C}|\mathcal{D})$

(c) $\mathcal{D} := \mathcal{C} \vee \ldots \vee T^{-n}\mathcal{C}$

$$h_\mu(T,\mathcal{D}) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} H_\mu(\mathcal{D} \vee \ldots \vee T^{-k+1}\mathcal{D})$$

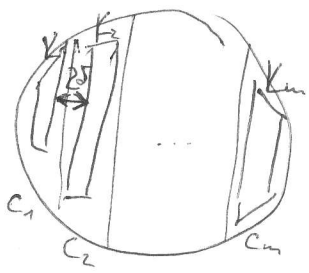
$$(\mathcal{C} \vee \ldots \vee T^{-n}\mathcal{C}) \vee (T^{-1}\mathcal{C} \vee \ldots \vee T^{-n-1}\mathcal{C}) \vee \ldots \vee (T^{-k+1}\mathcal{C} \vee \ldots \vee T^{-k-n+1}\mathcal{C}) =$$

$$= \mathcal{C} \vee \ldots \vee T^{-k-n+1}\mathcal{C}$$ n rögzített, $k \to \infty$

lemma: legyen X egy kompakt metrikus tér, μ valószínűségi mérték (Borel), $\varepsilon > 0$, $\mathcal{C}$ pedig egy véges Borel-partíció

ekkor $\exists\, \delta > 0$:

$$\operatorname{diam} \mathcal{D} < \delta \Rightarrow H_\mu(\mathcal{C}|\mathcal{D}) < \varepsilon$$



biz.: legyen K_i kompakt $\mu(C_i \setminus K_i) < \varepsilon^*$

$\delta := \frac{1}{2} \min_{i \neq j} \operatorname{dist}(K_i, K_j)$

legyen $\mathcal{D}$ egy partíció, amire $\operatorname{diam} \mathcal{D} < \delta^*$

konstruáljunk egy $\mathcal{E}$ partíciót $\mathcal{D} \supset \mathcal{E}$

$\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_m\}$

mindet azon E_i-be, amely i-ve C_i-be metsz, ha egyikbe sem metsz, vakjuk E_m-be

egyszerre többe nem metszhet az átmérője végett

elég: $H_\mu(\mathcal{C}|\mathcal{E}) < \varepsilon$

$$H_\mu(\mathcal{C}|\mathcal{E}) = \sum_{i,j} \mu(E_j)\, \phi\left(\frac{\mu(C_i \cap E_j)}{\mu(E_j)}\right)$$

$$\frac{\mu(C_i \cap E_j)}{\mu(E_j)} \to \delta_{ij}$$ ha a szimmetrikus különbség 0-hoz tart

igy $H_\mu(\mathcal{C}|\mathcal{E}) \to 0$, a fentiek mind folytonosak, igy található olyan δ, amire $< \varepsilon$

$\operatorname{diam} \mathcal{D}_n \to 0$

$$h_\mu(T, \mathcal{D}_n) \to h_\mu(T) = \sup_{\mathcal{D}} h_\mu(T, \mathcal{D})$$

$$\limsup_n h_\mu(T, \mathcal{D}_n) \le h_\mu(T)$$

$$h_\mu(T, \mathcal{C}) \le h_\mu(T, \mathcal{D}_n) + \underbrace{H_\mu(\mathcal{C}|\mathcal{D}_n)}_{\text{kicsi, ha } n \text{ nagy}}$$

$$h_\mu(T, \mathcal{C}) \le \inf_n h_\mu(T, \mathcal{D}_n)$$

$$h_\mu(T) \le \inf_n h_\mu(T, \mathcal{D}_n)$$

hf: $n \ge 1$

$$h_\mu(T^n) = n\, h_\mu(T)$$

Tétel: (Shannon Breiman McMillan)

$(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ T ergodikus (ha $A = T^{-1}A \Rightarrow \mu(A) = 0$ vagy 1)

$\mathcal{P}$ partíció

$\mathcal{P}_n(x)$ az $\mathcal{P} \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{P}$ azon osztálya, mely az x-et tartalmazza

$\mathcal{P}_n(x)$ olyan y-okból áll, amely y-ok orbitjának első n eleme ugyanazon osztályokba esnek, mint x első n eleme

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mu(\mathcal{P}_n(x)) = h_\mu(T, \mathcal{P}) \qquad \mu\text{-m.m. } x\text{-re}$$

(μ-tipikus $i \in \Sigma$-re $\mu([i_0 \ldots i_n]) \sim e^{-nh_\mu(\sigma)}$)

(X, d) $T: X \to X$ homeomorfizmus

azt mondjuk, hogy a T expansive homeomorfizmus, ha $\exists\, \varepsilon > 0$, $\forall x, y \in X$ $x \neq y$ $\exists k \in \mathbb{Z}$ $d(T^k(x), T^k(y)) > \varepsilon$

$M_T(X)$ T-invariáns vsz. mértékek halmaza

Kolmogorov - Fomin
gyenge csillag topológia

X
$M(X)$ folytonos lineáris funkcionálok tere $\Rightarrow C^*(X)$

gyenge - topológia

gyenge $*$-topológia: azok a folyt. lin. funk.-ok, amik előállnak $\int f\,d\mu$ lin. funk.-oknak kell folytonosnak lenniük

$\mu \longmapsto$

metrizálható: $\{f_n\}$ sűrű $C(X)$-ben

$$d(\mu, \nu) = \sum \frac{1}{2^n}\left(\int f_n\,d\mu - \int f_n\,d\nu\right)$$

a duális tér egységgömbje a gyenge-$*$-topológiában mindig kompakt (nálunk ezek a vsz. mértékek)

$\mu \to h_\mu(T)$ felülről félig folytonos

kompakt tér esetén

van-e olyan invariáns mérték, aminek az entrópiája pozitív?

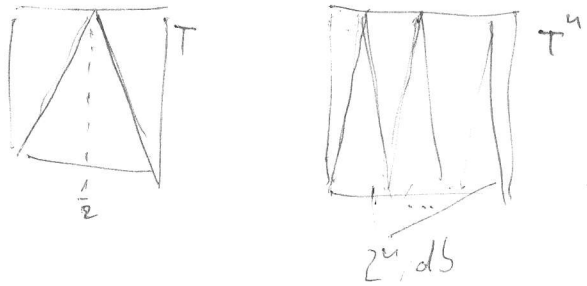
topologikus entrópia

tfh. két pontot akkor tudunk megkülönböztetni, ha legalább ε távolságra vannak egymástól

$x, Tx, \ldots, T^{n-1}x$

$y, Ty, \ldots, T^{n-1}y$ hány különböző n hosszúságú orbitot tudok megkülönböztetni?

$\approx e^{n h_{top}(T)}$


T
T^n
$\frac{1}{2}$
2^n db

$2^n = e^{n \log 2}$

def: (X,d) kompakt ; $T: X \to X$ folyt.

α nyílt lefedés

δ a Lebesgue-száma α-nak $\quad \forall x \ \cancel{B(x,\delta)} \ \exists A \in \alpha \quad B(x,\delta) \subset A$

α, β nyílt lefedések;

$\alpha \vee \beta = \{A_i \cap B_j : A_i \in \alpha, B_j \in \beta\}$

def: $\alpha < \beta$: $\forall B \in \beta \ \exists A \in \alpha : B \subset A$

ha $\alpha < \beta \Rightarrow T^{-1}\alpha < T^{-1}\beta$

def: $N(\alpha)$ a nyílt lefedésből kiválasztható legkisebb elemszámú lefedő rendszer elemszáma

$H(\alpha) := \log N(\alpha)$

tulajdonságok:

1, $H(\alpha) = 0 \iff X \in \alpha$

2, $\alpha < \beta \Rightarrow H(\alpha) \leq H(\beta)$

3, $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$

4. $H(T^{-1}\alpha) \leq H(\alpha)$

5, ha $T: X \to X$ ráképezés, akkor $H(T^{-1}\alpha) = H(\alpha)$

6, $\phi: X \to Y$ folyt. rákép. , $H(\phi^{-1}\alpha) = H(\alpha)$

$\alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}\alpha$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \underbrace{H(\alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}\alpha)}_{x_n} =: h(T,\alpha)$$

szubadditivitás kell az egyszerűsítéshez: $\quad x_{n+m} \leq x_n + x_m$

$$x_{n+m} = H([\alpha \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}\alpha] \vee T^{-n}[\alpha \vee \ldots \vee T^{-(m-1)}\alpha]) \leq$$

$$\leq x_n + H(T^{-n}(\alpha \vee \ldots \vee T^{-(m-1)}\alpha)) \leq x_n + x_m$$

tulajdonságok:

1, $h(T,\alpha) \geq 0$

2, $\alpha < \beta \Rightarrow h(T,\alpha) \leq h(T,\beta)$

$h_{top}(T) := \sup_{\alpha} h(T,\alpha)$ egy lehetséges definíció

tétel:

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "T_1"] \arrow[d, "\phi"'] & X_1 \arrow[d, "\phi"'] \\ X_2 \arrow[r, "T_2"] & X_2 \end{tikzcd}$$

X_1, X_2 kpt.

T_1, T_2 folyt.

ϕ folyt., rákép.

$\phi T_1 = T_2 \phi$

áll.: $h(T_2) \leq h(T_1)$

biz.: α nyílt lefedés X_2-n

$$H(\alpha \vee T_2^{-1}\alpha \vee \dots \vee T_2^{-(n-1)}\alpha) = H(\phi^{-1}\alpha \vee \phi^{-1}T_2^{-1}\alpha \vee \dots \vee \phi^{-1}T_2^{-(n-1)}\alpha) =$$

$$= H(\phi^{-1}\alpha \vee T_1^{-1}\phi^{-1}\alpha \vee \dots \vee T_1^{-(n-1)}\phi^{-1}\alpha)$$

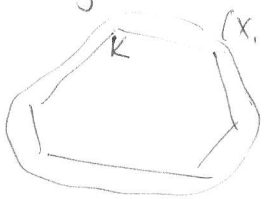
$$h(T_2) = \sup_{\alpha} h(T_2, \alpha) = \sup_{\alpha} h(T_1, \phi^{-1}\alpha) \le \sup_{\beta} h(T_1, \beta)$$

triv. köv.

legyen ϕ homeomorfizmus $\Rightarrow h(T_1) = h(T_2)$

$\bigcirc$ entrópiájú T-hez tetszőleges ε-közel van tetszőleges nagy entrópiájú ε, leképezés

topologikus entrópia nem kompakt halmazra (Bowen-féle def.)



(X, d) $\quad h(T) := \sup_{K \subset X} h(T, K)$

def.: $F \subset X$ kifeszítő halmaz, ha (n-re és $\varepsilon > 0$-ra)

$\forall y \in K \ \exists x \in F \quad d(T^i x, T^i y) < \varepsilon \quad i = 0, \dots, n-1$

a minimális elemszámú kifeszítő halmaz elemszáma $r_n(\varepsilon, K)$

def.: $E \subset K$ szeparáló halmaz, ha (n-re és $\varepsilon > 0$-ra)

$\forall x, y \in E \ \exists 0 \le k \le n-1 \quad d(T^k x, T^k y) > \varepsilon$

a maximális elemszámú szeparáló halmaz elemszáma $s_n(\varepsilon, K)$

Bowen-metrika

$$d_n(x, y) = \max_{0 \le i \le n-1} \{ d(T^i x, T^i y) \}$$

ha E maximális szeparáló halmaz, akkor kifeszítő halmaz is

$$r_n(\varepsilon, K) \le s_n(\varepsilon, K) \le r_n(\tfrac{\varepsilon}{2}, K)$$

legyen E max szep. (n, ε) és F min. kifesz. $(n, \frac{\varepsilon}{2})$

$\varphi: E \to F$

minden ponthoz egy olyat rendelünk, ami tőle legfeljebb $\frac{\varepsilon}{2}$ távolságra van

különböző E-beliekhez különbözőeket rendelünk, mert ezek távolsága legalább ε

így φ injektív, tehát $|E| \le |F|$

$\cancel{r(\varepsilon, K) := \overline{\lim_{n \to \infty}} r_n(\varepsilon, K)}$ $\qquad r(\varepsilon, K) := \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon, K)$

$\cancel{s(\varepsilon, K) := \lim_{n \to \infty} s_n(\varepsilon, K)}$ $\qquad s(\varepsilon, K) := \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \log s_n(\varepsilon, K)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} s(\varepsilon, K) = \lim_{\varepsilon \to 0} r(\varepsilon, K) = h(T, K)$$

Misiurevich - Szenz:

$f: I \to I$ szakaszonként monoton, folytonos

$h_{top}(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log L(f^n)$

L a monotonitási intervallumok száma ; $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ db}}$

Lev.: slope $f \in \{s, -s\}$

akkor $h_{top}(f) = \max\{\log s, 0\}$

$\Sigma = \{1, \dots, m\}^{\mathbb{Z}}$; σ balra tolás

$h_{top}(\sigma) = ?$

$\left|\bigcap_{n=0}^{\infty}\left(\bigcap_{k=-1}^{n} T^k A_{i_k} \cap \bigcap_{k=0}^{n} T^{-k} A_{i_k}\right)\right| \le 1 \Rightarrow h_\mu(T, \alpha) = h_\mu(T)$, ha T expanzív homeom.

i_k azok, akik i_{-n}-től i_n-ig megegyeznek

ugyanúgy most is $h_{top}(T, \alpha) = h_{top}(T)$, ha ez a feltétel teljesül

$\alpha = \{[1]_0, [2]_0, \dots, [m]_0\}$

$h(\sigma, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\alpha \vee \dots \vee T^{-(n-1)}\alpha) = \log m$

BS $(p_1 \dots p_m)$ $\quad \sum -p_i \log p_i$

subshift of finite type

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_A = \{(i_{-n} \dots i_0 \dots i_n \dots) \in \{1,2,3\}^{\mathbb{Z}} : a_{i_k i_{k+1}} = 1 \ \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

A $m \times m$-es mátrix $\quad A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m} \quad a_{ij} \in \{0,1\}$

$A^n = [a_{ij}^{(n)}]_{i,j=1}^{m}$ $\quad$ feltétel $\exists n: \forall i,j \ a_{ij}^{(n)} > 0$

Perron - Frobenius tétel:

legyen A egy ilyen mátrix ($a_{ij} \ge 0$ van csak feltéve)

(i) $\exists \lambda > 0$ egyszeres domináns sajátérték

(ii) $\exists \bar{u} = (u_1, \dots, u_m)$; $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$ $u_i, v_j > 0$ $\bar{u}A = \lambda\bar{u}$; $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$

(iii) λ az egyetlen olyan s.é., amelyhez van olyan s.v., melynek minden komponense nemnegatív

(iv) $\bar{u} \cdot \bar{v} = 1 \Rightarrow \forall i,j \quad \lim_{n\to\infty} \lambda^{-n} a_{ij}^{(n)} = u_i v_j$

(v) $\min_i \sum_j a_{ij} \le \lambda \le \max_i \sum_j a_{ij}$

subshift of finite type

mértékelméleti entrópia

$\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$

$P = [p_{i,j}]_{i,j=1}^{m}$ $\qquad \sum_i p_i p_{i,j} = p_j$

$\bar{p} \cdot P = \bar{p}$

$\mu([i_1, \dots, i_n]) = p_{i_1} \cdot p_{i_1, i_2} \, p_{i_2, i_3} \cdots p_{i_{n-1}, i_n}$ Markov-mérték

$p_{ij} = 0$ ha $a_{ij} = 0$

mindig kapunk egy sztochasztikus mátrixot:

$$p_{i,j} = \frac{a_{i,j} \, v_j}{\lambda \, v_i} \qquad p_i = u_i v_i$$

Parry-mérték

kérdés: mi lesz az entrópiája?

$h_\mu(\sigma) = ?$

tétel: $h_\mu(\sigma) = \sum_{i,j} - p_i p_{i,j} \log p_{i,j}$

biz: $\{[1]_0, \dots, [m]_0\} = \alpha$

$h_\mu(\sigma) = h_\mu(\sigma, \alpha)$

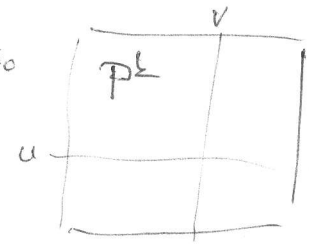
$$H_\mu(\underbrace{\alpha \vee \sigma^{-1}\alpha \vee \dots \vee \sigma^{-(n-1)}\alpha}_{[i_0, \dots, i_{n-1}]}) = \sum - \mu([i_0, \dots i_{n-1}]) \log \mu([i_0 \dots i_{n-1}])$$

$$\sum_{i_0 \dots i_{n-1}} - p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-2} i_{n-1}} \left[\log p_{i_0} + \log p_{i_0 i_1} + \dots + \log p_{i_{n-2} i_{n-1}}\right]$$

egyik tag: $(\log p_{i_0})$

$$-\sum_{i_0} p_{i_0} \log p_{i_0} \cdot \sum_{i_1 \dots i_{n-1}} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-2} i_{n-1}} = -\sum_{i_0} p_{i_0} \log p_{i_0}$$

n-nel való osztás után $\longrightarrow 0$



$$p_{u,v}^{[k]} = \sum_{i_1 \dots i_{k-1}} p_{u i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{k-1} v}$$

egy másik tag: $(\log p_{i_k i_{k+1}})$

$$-\sum_{i_k, i_{k+1}} p_{i_k, i_{k+1}} \log p_{i_k, i_{k+1}} \cdot \left[\underbrace{\sum_{i_0 \dots i_{k-1}} p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{k-1} i_k}}_{p_{i_k} \quad (\bar{p} \cdot P = \bar{p})} \cdot \underbrace{\sum_{i_{k+2} \dots i_{n-1}} p_{i_{k+1} i_{k+2}} \cdots p_{i_{n-2} i_{n-1}}}_{1 \quad (P \cdot 1 = 1)}\right] =$$

$$= -\sum_{i_k, i_{k+1}} p_{i_k} p_{i_k i_{k+1}} \log p_{i_k, i_{k+1}}$$

igy a teljes összeg:

$$\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{i_k,i_{k+1}=1}^{m} -p_{i_k}p_{i_k,i_{k+1}}\log p_{i_k i_{k+1}} = (n-1)\sum_{i,j} -p_i p_{ij}\log p_{ij}$$

$$\Sigma_A = \{\bar{i}\in\{1,\dots,m\}^{\mathbb{Z}} : a_{i_k,i_{k+1}}=1 \quad \forall k\in\mathbb{Z}\}$$

$a_{ij}\in\{0,1\}$ $\forall i,j$ $\exists n$: $\forall i,j$ $a_{ij}^{[n]}\geq 1$

$A\bar{v}=\lambda\bar{v}$; $\bar{u}A=\lambda\bar{u}$; $\lambda>0$ domináns sajátérték

$u_i>0$, $v_j>0$ $\sum_{i=1}^{m} u_i v_i = 1$

tétel:

$p_i = u_i v_i$ $\qquad p_{ij}=\frac{a_{ij}v_j}{\lambda v_i}$

$\mu([i_0\dots i_{n-1}]) = p_{i_0}p_{i_0i_1}\cdots p_{i_{n-2}i_{n-1}}$ maximalizálja a mértékelméleti entrópiát

$h_\mu(\sigma)=\log\lambda$

biz: $h_\mu(\sigma)=\sum_{i,j} -u_i v_i \frac{a_{ij}v_j}{\lambda v_i}\log\frac{a_{ij}v_j}{\lambda v_i} =$

$a_{ij}\log a_{ij}$ mindenképp 0

$$= -\sum_{i,j}\cancel{\frac{u_i v_j}{\lambda}}\frac{u_i a_{ij} v_j}{\lambda}\left[\log v_j - \log\lambda - \log v_i\right] =$$

$$= -\sum_j(\log v_j)\underbrace{\sum_i\frac{u_i a_{ij} v_j}{\lambda}}_{u_j} + \log\lambda + \sum_i(\log v_i)\underbrace{\sum_j\frac{u_i a_{ij} v_j}{\lambda}}_{v_i}$$

tétel:

$h_{top}(\sigma)=\log\lambda$

biz: $h_{top}(\sigma)=h_{top}(\sigma,\alpha)$

$\alpha=\{[1]_0,\dots[m]_0\}$ $\qquad H(\alpha\vee\sigma^{-1}\alpha\vee\dots\vee\sigma^{-(n-1)}\alpha)=\log\Theta_n$

osztályok száma: Θ_n

$\Theta_n = \#\{$az összes n hosszú szó Σ_A-ban$\}$

$\Theta_n=\sum_{i,j} a_{ij}^{(n)} = \|A^n\|_1$

$H(\alpha\vee\sigma^{-1}\alpha\vee\dots\vee\sigma^{-(n-1)}\alpha)=\log\|A^n\|_1$

$h_{top}(\sigma,\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\alpha\vee\sigma^{-1}\alpha\vee\dots\vee\sigma^{-(n-1)}\alpha)=\lim_{n\to\infty}\log\|A^n\|_1^{\frac{1}{n}}=\log\lambda$

topologikus nyomás

motiváció:

adottak: $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$

ismeretlen $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$

$$F(p_1, \dots, p_m) = \sum -p_i \log p_i + \sum a_i p_i$$

$\mu := \{p_1, \dots, p_m\}^{\mathbb{Z}}$ Bernoulli-mértek

$\varphi(\bar{i}) = a_{i_0}$ $\quad \bar{i} \in \{1, \dots, m\}^{\mathbb{Z}}$

$$F(p_1, \dots, p_m) = h_\mu(\sigma) + \int \varphi \, d\mu$$

hol van ennek a maximuma?

Lagrange-féle multiplikációs módszerrel

$$G(p_1, \dots, p_m, \lambda) = F(p_1, \dots, p_m) - \lambda\left(\sum p_i - 1\right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial p_i} = -\log p_i - p_i \frac{1}{p_i} + a_i - \lambda = 0 \qquad p_i = e^{a_i} c = \frac{e^{a_i}}{\sum_i e^{a_i}}$$

a maximum értéke:

$$-\frac{1}{\sum_i e^{a_i}} \sum_i e^{a_i} \cdot \left[a_i - \log \sum_i e^{a_i}\right] + \sum_i \frac{a_i e^{a_i}}{\sum_i e^{a_i}} = \log \sum_i e^{a_i}$$

def: Σ_A, σ adott

legyen $\varphi : \Sigma_A \to \mathbb{R}$ folyt.

$$P(\varphi) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{i_1 \dots i_n} \exp\left[\sup_{\bar{j} \in [i_1 \dots i_n]} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\sigma^k \bar{j})\right]$$

a φ topologikus nyomása

megengedett szó $\quad j_1 = i_1, \dots, j_n = i_n$

$\varphi \equiv 0 \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \Theta_n$

$P(0) = h_{top}(\sigma)$

$\varphi(\bar{i}) := a_{i_0}$ ahol $a_1, \dots, a_m$ adott

$\log b_i = a_i \qquad b_i = e^{a_i}$

$\varphi(\sigma^k \bar{j}) = a_{i_k}$

$$P(\varphi) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{i_1 \dots i_n} \exp\left[\sup_{\bar{j} \in [i_1 \dots i_n]} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \log b_{i_k}}_{\log \prod_{k=0}^{n-1} b_{i_k}}\right] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{i_1 \dots i_n} \prod_{k=0}^{n-1} b_{i_k} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log (b_1 + \dots + b_m)^n = \log(b_1 + \dots + b_m) =$$

$$= \log \sum_{i=1}^{m} e^{a_i}$$

$$\sup_{(p_1,\dots,p_m)} \Big(\underbrace{-\sum_{k=1}^{m} p_k \log p_k}_{h_\mu} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} a_k p_k}_{\int \varphi(\bar{i})\, d\mu} \Big) = P(\varphi) \qquad \mu = (p_1,\dots,p_m)^{\mathbb{Z}}$$

ZK. 21

tétel: (Walters)

ha $\varphi : \Sigma_A \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor

$$P(\varphi) = \sup_{\mu \in M_\sigma(\Sigma_A)} \left\{ h_\mu(\sigma) + \int \varphi(\bar{i})\, d\mu(\bar{i}) \right\}$$

def: a $\mu \in M_\sigma(\Sigma_A)$ mértéket egyensúlyi helyzetnek hívjuk, ha $\exists \varphi : \Sigma_A \to \mathbb{R}$ folyt. fv., melyre $P(\varphi) = h_\mu(\sigma) + \int \varphi\, d\mu$

tétel:

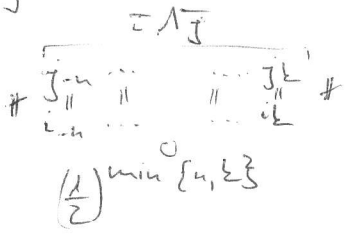
ha $\varphi : \Sigma_A \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor $\exists \varphi$-ve egyensúlyi állapot

def: $\mathcal{F}_A = \{ \varphi : \Sigma_A \to \mathbb{R}$ folyt. : $\exists c > 0,\ \beta \in]0;1[$;

$\forall i, j \in \Sigma_A \quad |\varphi(\bar{i}) - \varphi(\bar{j})| \le c\,(d(\bar{i},\bar{j}))^{\beta} \}$

Hölder-folyt. függvények

$\bar{i}, \bar{j} \in \Sigma_A \qquad d(\bar{i},\bar{j}) =$



tétel:

ha $\varphi \in \mathcal{F}_A$, akkor létezik egyetlen egyensúlyi helyzet φ-vel

tétel:

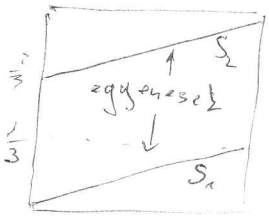
ha $\varphi \in \mathcal{F}_A$, akkor létezik egyetlen $\mu \in M_\sigma(\Sigma_A)$, hogy $\forall \bar{j} \in [i_0 \dots i_{n-1}]$ (ami megengedett) $\exists c_1, c_2 > 0$ úgy, hogy $\forall i_0 \dots i_{n-1}$

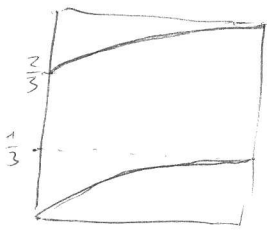
$$c_1 < \frac{\mu([i_0 \dots i_{n-1}])}{\exp\left[-nP(\varphi) + \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\sigma^k \bar{j})\right]} < c_2$$

/jel. $S_n\varphi(\bar{j}) := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\sigma^k \bar{j})$/

Gibbs-mértéket a φ potenciálra

példa:





$f_1, f_2 \in C^2[0;1]$

$f_1[0;1] \cap f_2[0;1] = \emptyset$

$f_1, f_2 : [0;1] \to [0;1]$

$0 < f_i'(x) < 1 \quad \forall x \in [0;1]$

még általánosabban

$f_1, \dots, f_n \in C^2[0;1]$

$\operatorname{int}(f_i[0;1]) \cap \operatorname{int}(f_j[0;1]) = \emptyset$

$\forall i \ f_i : [0;1] \to [0;1]$

$0 < f_i'(x) < 1 \quad \forall x \in [0;1]$

$\exists!\, \Lambda$ cpt nemüres

$\Lambda = \bigcup_{i=1}^{n} f_i \Lambda$, Λ az $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ IFS attraktora

$I_1 = f_1[0,1]$ $\qquad$ $I_m = f_m[0,1]$

$$\Lambda = \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{i_1 \dots i_n} I_{i_1 \dots i_n}$$

$\dim_H \Lambda = ?$

$\sum_{i_1 \dots i_n} |I_{i_1 \dots i_n}|^t$ túl nagy t-t írva n-ben exponenciálisan csökken

$$\frac{1}{n} \log \sum_{i_1 \dots i_n} |I_{i_1 \dots i_n}|^t \longrightarrow \begin{cases} \text{negatív szám, ha } t \text{ nagy} \\ \text{pozitív szám, ha } t \text{ kicsi} \end{cases}$$

elfogadtuk azt a hipatézist, hogy a dimenzió definíciójában szereplő legjobb lefedés a legtermészetesebb lefedés; ekkor t az alábbi megoldása:

$$\frac{1}{n} \log \sum_{i_1 \dots i_n} |I_{i_1 \dots i_n}|^t = 0$$

$$\Sigma = \{1, \dots, m\}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\pi} \Lambda$$

$$\pi(\bar{i}) = \lim_{n\to\infty} f_{i_1 \dots i_n}(0)$$

értelmezünk a Σ-n egy megfelelő φ potenciált

$$\varphi(\bar{i}) := \log f_{i_1}'(\pi(\sigma \bar{i}))$$

$t > 0$

$$P(t\cdot\varphi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{i_0 \dots i_{n-1}} \exp\left[\sup_{\bar{j} \in [i_0 \dots i_{n-1}]} \sum_{k=0}^{n-1} t\varphi(\sigma^k \bar{j})\right]$$

bounded distorsion lemma:

$\exists\, d_1, d_2 > 0 \quad \forall n, \forall i_1, \dots, i_n, \forall x, y$

$$d_1 < \frac{f_{i_1 \dots i_n}'(x)}{f_{i_1 \dots i_n}'(y)} < d_2 \qquad (f_i \in C^2 \text{ miatt})$$

akkor mondjuk, hogy $f \in C^{1+\varepsilon}$, ha f' Hölder-folytonos ε kitevővel

$$t \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\sigma^k \bar{j}) = t\left[\log f_{i_0}'(f_{i_1}(\dots(f_{i_{n-1}}(y))\dots)) + \log \dots + \log f_{i_{n-2}}'(f_{i_{n-1}}(y)) + \log f_{i_{n-1}}'(y)\right]$$

$\bar{j} \in [i_0 \dots i_{n-1}] \qquad y = \pi(\bar{j})$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\sigma^k \bar{j}) = \varphi(\bar{j}) + \varphi(\sigma \bar{j}) + \dots + \varphi(\sigma^{k-1} \bar{j}) = \log\left[f_{i_1}'(\pi(\sigma \bar{j})) \cdot f_{i_2}'(\pi(\sigma^2 \bar{j})) \cdot \dots f_{i_n}'(\pi(\sigma^n \bar{j}))\right]$$

erre már nincs megkötés

ha $f'_{i_n}(\pi(\sigma^n \bar{j})) = z$, akkor $f'_{i_{n-1}}(\pi(\sigma^{n-1}\bar{j})) = f'_{i_n}(z)$

$$f'_{i_2}(\pi(\sigma^2 \bar{j})) = f'_{i_3} \dots f'_{i_n}(z)$$

így a szorzat $f'_{i_1 \dots i_n}(z)$

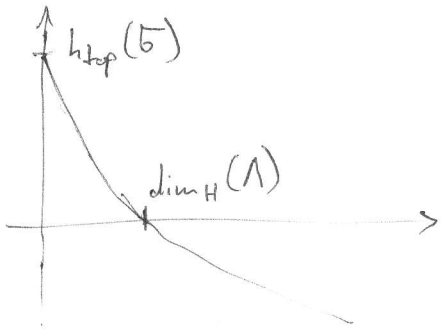
tehát $P(t\varphi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{i_0 \dots i_{n-1}} \left(f'_{i_1 \dots i_n}(z)\right)^t$, ahol z tetszőleges

$$I_{i_1 \dots i_n} = f_{i_1 \dots i_n}[0;1]$$

$$|I_{i_1 \dots i_n}| = |f_{i_1 \dots i_n}(u)|$$

$$P(t\varphi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{i_0 \dots i_{n-1}} |I_{i_1 \dots i_n}|^t$$

$t \longrightarrow P(t\varphi)$



példa:

$\Sigma = \{1, \dots, m\}^{\mathbb{Z}}$

adott $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$

legyen $\varphi: \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \varphi(\bar{i}) = a_{i_0}$

meg akartuk találni azon $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$-et, amire $\sum_{k=1}^{m} a_k p_k + \sum_{k=1}^{m} -p_k \log p_k$ maximális, és a max. értékét is

$\nu = (p_1, \dots, p_m)^{\mathbb{Z}}$ mértékre nézve ezek értéke $\int \varphi \, d\nu$, $h_\nu(\sigma)$

max. helyen: $p_k = \dfrac{e^{a_k}}{\sum_{i=1}^{m} e^{a_i}}$ $\quad k = 1, \dots, m$

max. értéke: $\log \sum_{i=1}^{m} e^{a_i} = P(\varphi)$

$P(\varphi) = \sup\{h_\nu(\sigma) + \int \varphi \, d\nu\}$

$$\mu([i_0 \dots i_n]) = p_{i_0} \dots p_{i_{n-1}} = \left(\sum_{j=1}^{m} e^{a_j}\right)^{-n} \exp\left[S_n \varphi(\bar{j})\right]$$

$$\left(\sum_{j=1}^{m} e^{a_j}\right)^{-n} = \exp\left(\log\left(\left(\sum_{j=1}^{m} e^{a_j}\right)^{-n}\right)\right)$$

$$\frac{\mu([i_0 \dots i_{n-1}])}{\exp\left\{-n \underbrace{\log \sum_{j=1}^{m} e^{a_j}}_{P(\varphi)} + S_n \varphi(\bar{j})\right\}} = 1$$

tétel: a φ-hez tartozó Gibbs-mértékek egyensúlyi állapot, így teljesül rá a $P(\varphi) = h_\mu(\sigma) + \int \varphi \, d\mu$ egyenlőség

biz.: $\frac{1}{n}\log c_1 < \frac{1}{n}\log\mu([i_0\dots i_{n-1}]) + P(\varphi) - \frac{1}{n}S_n\varphi(\bar{j}) < \frac{1}{n}\log c_2$

$\downarrow n\to\infty$ 0 $\qquad$ $\downarrow n\to\infty$ 0

$$\cancel{P(\varphi)}\ \frac{1}{n}\log c_1 + \frac{1}{n}S_n\varphi(\bar{j}) - \frac{1}{n}\log\mu([i_0\dots i_{n-1}]) < P(\varphi) < \frac{1}{n}\log c_2 + \frac{1}{n}S_n\varphi(\bar{j}) - \frac{1}{n}\log\mu([i_0\dots i_{n-1}])$$

$\forall n$, $\forall i_0\dots i_{n-1}$-re teljesül

$\lim_{n\to\infty}$ esetén

$$\frac{1}{n}S_n\varphi(\bar{j}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(\sigma^k\bar{j}) \xrightarrow{\text{Birkhoff ergod. t.}} \int\varphi\,d\mu \qquad \mu\text{-tipikus } \bar{j}\text{-re}$$

$$-\frac{1}{n}\log\mu([i_0\dots i_{n-1}]) \longrightarrow h_\mu$$

μ-tipikus i: $\mu([i_0\dots i_{n-1}]) \sim e^{-nh_\mu}$ $\qquad$ a 0-hoz való exponenciális tartás sebessége h_μ

$\forall i$ $\quad f_i : [0;1] \to [0;1]$

$\forall x$ $\quad 0 < |f_i'(x)| < 1$

$\quad f_i \in C^2[0,1]$

$f_i[0;1] \cap f_j[0;1] = \emptyset \qquad i \neq j$

$\{f_i\}_{i=1}^m$ IFS

$$\Lambda = \bigcup_{k=1}^m f_k(\Lambda)$$

$$\Lambda = \bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{i_1\dots i_n} f_{i_1\dots i_n}[0,1] \qquad f_{i_1\dots i_n} = f_{i_1}\circ\dots\circ f_{i_n}$$

$$\Sigma = \{1,\dots,m\}^{\mathbb{N}} \qquad \psi : \Sigma \to \mathbb{R}$$

$\bar{i} = (i_0, i_1, \dots)$

$\psi(\bar{i}) := \log f_{i_0}'(\pi(\sigma\bar{i}))$

$\bar{j}\in\Sigma \quad \pi(\bar{j}) := \lim_{n\to\infty} f_{j_0\dots j_{n-1}}(0)$

$S_n\psi(\bar{j})$

$$\psi(\bar{i}) + \psi(\sigma\bar{i}) + \dots + \underbrace{\psi(\sigma^{n-1}\bar{i})}_{\log f_{i_{n-1}}'(\pi(i_n, i_{n+1},\dots))}$$

$$\psi(\sigma^{n-2}\bar{i}) = \log f_{i_{n-2}}'(\pi(i_{n-1}, i_n, \dots))$$

$$\lim_{l\to\infty} f_{i_{n-1}\dots n-1+l}(0) = f_{i_{n-1}}(x)$$

$$x = \lim_{k\to\infty} f_{i_n\dots i_{n+k}}(0)$$

igy az összeg értéke:

$$\cancel{\log f_{i_0}' + \dots + \log f_{i_{n-2}}'(f_{i_{n-1}}x) + \log f_{i_{n-1}}'(x)}$$

$$\log f_{i_0}'(f_{i_1}\circ\dots\circ f_{i_{n-1}}(x)) + \dots + \log f_{i_{n-3}}'(f_{i_{n-2}}\circ f_{i_{n-1}}(x)) + \log f_{i_{n-2}}'(f_{i_{n-1}}(x)) + \log f_{i_{n-1}}'(x) =$$

$$= \log\left(f_{i_0}\circ f_{i_1}\circ\dots\circ f_{i_{n-1}}\right)'(x) = \log f_{i_0\dots i_{n-1}}'(x)$$

$\log f_{i_0\dots i_{n-1}}'(x) = (S_n\psi)(\bar{i})$, ha $x = \pi(\sigma^n\bar{i})$

$t \longmapsto P(\underbrace{t\cdot\varphi}_{\varphi_t})$

$$P(\varphi_t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{i_0 \dots i_{n-1}} \left[\sup_{\bar{j}\in[i_0\dots i_{n-1}]} \exp S_n \varphi_t(\bar{j})\right]$$

$$P(\varphi_t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{i_0 \dots i_{n-1}} |I_{i_1\dots i_n}|^t$$ korábbi számítás alapján

ha elfogadjuk, hogy a legjobb fedés a cilinderhalmazokkal való ~~fedés~~ természetes fedés, akkor ez a t a Hausdorff-dimenziával szoros kapcsolatban van

$\dim_H \Lambda = t_0$

$t > t_0 \Rightarrow \sum_{i_0\dots i_{n-1}} |I_{i_1\dots i_n}|^t < 1 \Rightarrow P(\varphi_t) < 0$

$t < t_0 \Rightarrow \sum_{i_0\dots i_{n-1}} |I_{i_1\dots i_n}|^t > 1 \Rightarrow P(\varphi_t) > 0$

$\varphi = \varphi_{t_0} = t_0 \cdot \varphi$

ez egy Hölder-folytonos függvény

legyen μ a Gibbs-mérték a φ-re

akkor $$c_1 < \frac{\mu([i_0 \dots i_{n-1}])}{\exp\{-n\underbrace{P(\varphi)}_{0} + S_n\varphi(\bar{j})\}} < c_2$$ ahol $\bar{j} \in [i_0 \dots i_{n-1}]$

$S_n\varphi(\bar{j}) = t_0 S_n\varphi(\bar{j}) = t_0 \log f'_{i_0\dots i_{n-1}}(\pi(\sigma^n \bar{j})) =$

$= \log |f'_{i_0\dots i_{n-1}}(z)|^{t_0}$

bounded distortion lemma miatt mindegy, hol van kiértékelve: a hánygadost megeszi a logaritmus

$$c_1 < \frac{\mu([i_0\dots i_{n-1}])}{|f'_{i_0\dots i_{n-1}}(z)|^{t_0}} < c_2$$

$z = 0$ választással új konstansokkal továbbra is fennáll

$$c_1' < \frac{\mu([i_0\dots i_{n-1}])}{|f'_{i_0\dots i_{n-1}}(0)|^{t_0}} < c_2'$$

így van olyan mérték, ami 0-tól és ∞-tól szeparált

ezzel a mértékkel egy korábbival lényegében megegyező módon lejezhető be a gondolatmenet

$\Sigma = \{1, \dots, n\}^{\mathbb{Z}}$

Σ_A

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \exists M \quad A^M$ mindegyik eleme nemnulla

$\varphi : \Sigma_A \longrightarrow \mathbb{R}$

$$P(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{i_0\dots i_{n-1}} \exp\left[\sup_{\bar{j}\in[i_0\dots i_{n-1}]} S_n\varphi(\bar{j})\right]$$ $\quad \forall \mu \in M_\sigma(\Sigma_A)$

a nem megengedett sorozatokra minosen semmi

$$P(\varphi) = \sup_{\mu \in M_\sigma(\Sigma_A)} \left\{ h_\mu(\sigma) + \int \varphi \, d\mu \right\}$$

adott φ-re az egyensúlyi helyzet az a μ, amelyre

$$P(\varphi) = h_\mu(\sigma) + \int \varphi \, d\mu$$

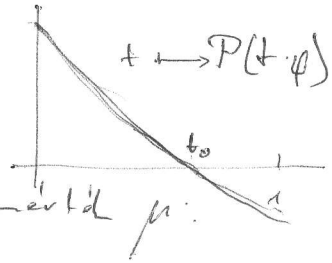
μ Gibbs-mértéke a φ potenciálra:

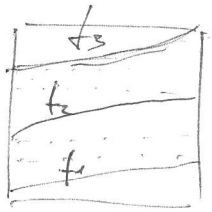
$\exists\, c_1, c_2 > 0 \quad \forall n \quad \forall i_0 \dots i_{n-1}$

$$c_1 < \frac{\mu[i_0 \dots i_{n-1}]}{\exp\{-nP(\varphi) + S_n\varphi(\bar{j})\}} < c_2 \quad \forall \bar{j} \in [i_0 \dots i_{n-1}]$$

$\dim_H \Lambda = t_0$

$\varphi(\bar{i}) = \log f'_{i_0}(\pi(\sigma \bar{i}))$





t_0 φ potenciálra a Gibbs-mértéke μ:

$$c_1' < \frac{\mu[i_0 \dots i_{n-1}]}{|f'_{i_0 \dots i_{n-1}}|^{t_0}} < c_2'$$

$\Sigma = \{1, 2, \dots, m\}^{\mathbb{Z}}$

$M_\sigma(\Sigma)$ topologikus tér gyenge* topológia

$\mu \longrightarrow \int f \, d\mu$ ha f folyt

$M(\Sigma)$ valószínűségi Borel-mértékek halmaza kompakt

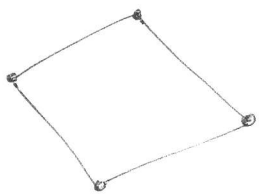
invariáns mértékek $M_\sigma(\Sigma) \subset M(\Sigma)$ halmaza zárt

$M_\sigma(\Sigma)$: invariáns mértékek (kompakt, konvex)

ergodikus mértékek: extremális pontok

(csak triviális módon áll elő invariáns mértékek lineáris kombinációjaként)

$\mu \in \mathcal{E}_\sigma(\Sigma) \iff A = \sigma^{-1}A \Rightarrow \mu(A) = 0$ vagy 1



Tétel: Tfh. $\mu \in M_\sigma(\Sigma)$, $\operatorname{spt}(\mu) = \Sigma$

ekkor $\exists\, \mu_n \longrightarrow \mu$ gyenge* topológiában

(a) μ_n-ek Gibbs-mértékek

(b) ~~$h(\mu_n) \longrightarrow h(\mu)$~~ $h_{\mu_n} \longrightarrow h_\mu$

bizi. fix n

ha $l \le n \Rightarrow p_{i_1 \dots i_l} := \mu[i_1 \dots i_l]$

ha $L > n$

$$p_{i_1 \dots i_L} := \prod_{k=1}^{L-n} \frac{\mu[\overbrace{i_k \dots i_{k+n-1}}^{n \text{ db}}]}{\mu[\underbrace{i_{k+1} \dots i_{k+n-1}}_{n-1 \text{ db}}]} \cdot \mu[i_{L-n+1} \dots i_L]$$

$$\mu_n[i_1 \dots i_L] := p_{i_1 \dots i_L}$$

ellenőrizni kell: $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$; $\sum_{k=1}^{m} p_{i_1 \dots i_L k} = p_{i_1 \dots i_L}$ $\quad p_k = \mu[k]$

ekkor kiterjed értékké

mi kell az invarianciához?

$\mu(A) = \mu(\sigma^{-1} A)$ elég a cilindereket ellenőrizni

$$\mu_n[i_1 \dots i_L] = \mu_n(\sigma^{-1}[i_1 \dots i_L]) = \sum_{k=1}^{m} \mu_n[k, i_1, i_2 \dots i_L]$$

μ_n Gibbs-mértéket:

$c_1', c_2' > 0$

$$c_1' < \frac{\mu_n[i_0 \dots i_{L-1}]}{\exp\{S_L \varphi_n(\bar{j})\}} < c_2' \quad j \in [i_0 \dots i_{L-1}]$$

csak $L > n$ érdekel, a többiből csak véges sok van; így a cilindereket is véges sok van, véges sok hánygatos

$$\mu_n[i_1 \dots i_L] = \prod_{k=1}^{L-n} \frac{\mu[i_k \dots i_{k+n-1}]}{\mu[i_{k+1} \dots i_{k+n-1}]} \cdot \mu[i_{L-n+1} \dots i_L] = \exp\left\{\sum_{k=1}^{L-n} \log \frac{\mu[i_k \dots i_{k+n-1}]}{\mu[i_{k+1} \dots i_{k+n-1}]} + \log \overbrace{\mu[i_{L-n+1} \dots i_L]}^{g}\right\}$$

ez egy n-hosszú cilinder, van maximum, minimum a; nagyságrendje nem függ L-tól

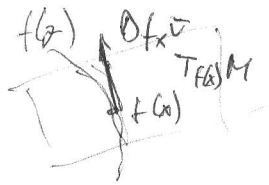
$$\exists\, d_1, d_2 > 0 \quad \in]d_1, d_2[\cdot \exp\left\{\sum_{k=1}^{L-n} \log \frac{\mu[i_k \dots i_{k+n-1}]}{\mu[i_{k+1} \dots i_{k+n-1}]}\right\}$$

$$\varphi_n(\bar{j}) = \log \frac{\mu[j_1 \dots j_n]}{\mu[j_2 \dots j_n]}$$

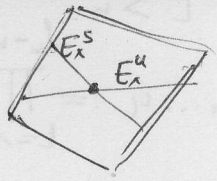
$$\left\{\sum_{k=1}^{L-n} \varphi_n(\sigma^k \bar{j}) + \underbrace{\sum_{k=L-n+1}^{L} \varphi_n(\sigma^k \bar{j})}_{\text{konstanssal becsülhető}}\right\}$$

$$\mu_n[i_1 \dots i_L] \in]d_1', d_2'[\cdot \exp\left\{\sum_{k=1}^{L-n} \varphi_n(\sigma^k \bar{j})\right\}$$

M kompakt Riemann-sokaság; $f: M \to M$ C^2 diffeomorfizmus $\quad TM = \bigcup_x T_x M \quad Df: TM \to TM$



def.: $\Lambda \subset M$ hiperbolikus, ha $\forall x \in \Lambda$ $T_xM = E_x^u \oplus E_x^s$
(Λ zárt)



(a) $Df_x\, E_x^u = E_{fx}^u$

$Df_x\, E_x^s = E_{fx}^s$

(b) $\exists\, c>0,\ \lambda \in]0;1[$; $\forall x \in \Lambda$

$\|Df_x^n(\bar{v})\| < c\lambda^n \|\bar{v}\|$ $\quad \bar{v} \in E_x^s$

$\|Df_x^{-n}(\bar{v})\| < c\lambda^n \|\bar{v}\|$ $\quad \bar{v} \in E_x^u$ $\quad n \geq 0$

(a),(b) $\Rightarrow$ (c) E_x^s, E_x^u folyt. x-ben

def.: ugyanerre az f-re a nemvándorló pontok halmaza

$\Omega(f) = \{x : \forall U$ környe. x-nek: $U \cap (\bigcup_{n\geq 1} f^n U) = \emptyset\}$

def.: az f A axiómájú diffeomorfizmus, ha

(a) $\Omega(f)$ hiperbolikus

(b) $\Omega(f) = \overline{\{\text{periodikus pont}\}}$

példák: horseshoe, szolenoid, tórusz hiperbolikus ~~diff~~ automorfizmusa

$f: M \to M$ C^2, Λ hiperbolikus, ha

Λ zárt

$f(\Lambda) = \Lambda$

$\forall x \in \Lambda$ $\quad T_xM = E_x^u \oplus E_x^s$ $\quad d_x f(E_x^u) = E_{f(x)}^u$; $d_x f(E_x^s) = E_{f(x)}^s$

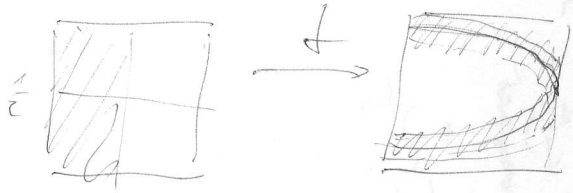
$\exists\, c>0,\ \lambda \in]0;1[$ $\quad \forall x \in \Lambda$; $\|df_x^n(\bar{v})\| < c\lambda^n\|\bar{v}\|$ $\bar{v} \in E_x^s$; $\|df_x^{-n}(\bar{v})\| < c\lambda^n\|\bar{v}\|$ $v \in E_x^u$

$x \longmapsto E_x^u, E_x^s$ folyt.

λ kicsi

$F(x,y) = (f(x), \varphi(x) + \lambda(y - \frac{1}{2}))$

$f(x) = 4x(1-x)$



nem kölcsönösen egyértelmű

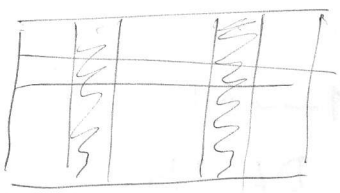
$\Lambda = \bigcap_{n\geq 0} f^n([0,1]^2)$

nem hiperbolikus

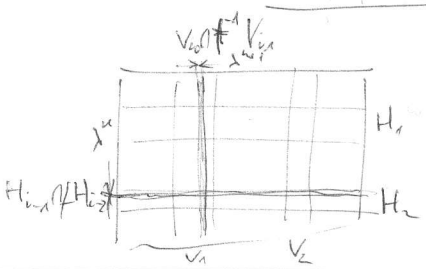
horseshoe

$W_\varepsilon^s(x) = \{y^s : d(f^n x, d^n y) < \varepsilon\ \forall n \geq 0\} = \bigcup_n \pi\{\bar{j} \mid i_k = j_k\ k \geq n\}$

$x = \pi(\ldots i_{-n} \ldots i_0, i_1 \ldots i_n \ldots)$



$\pi\{\bar{j} \mid i_k = j_k;\ k \geq 0\}$

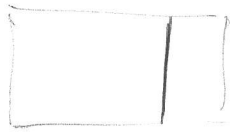


$V_{i_0 \ldots i_n} = V_{i_0} \cap f^{-1} V_{i_1} \cap \ldots \cap f^{-n} V_{i_n}$

$H_{i_{-1} \ldots i_{-n}} = H_{i_{-1}} \cap f H_{i_{-2}} \cap \ldots \cap f^{n-1} H_{i_{-n}}$

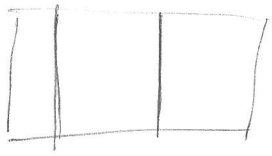
adott $\bar{i}$

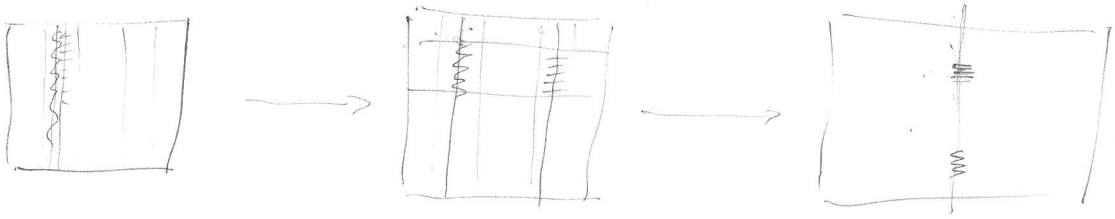
$\pi = \{\bar{j} \mid j_0 \neq i_0 \quad j_k = i_k \quad k \geq 1\}$

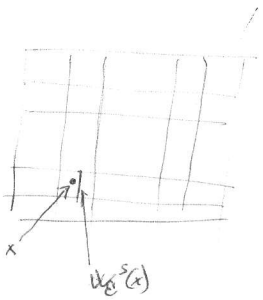


$\pi = \{\bar{j} \mid j_1 \neq i_1 \quad j_k = i_k \quad k \geq 2\}$

$j_0 = i_0$ vagy $j_0 \neq i_0$



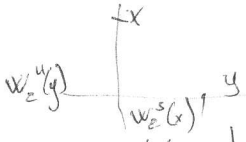




$W_\varepsilon^u(x) = \{y : d(f^{-n}x, f^{-n}y) < \varepsilon \quad \forall n \geq 0\}$

tétel: ha f egy C^r leképezés, akkor $W_\varepsilon^s(x)$ és $W_\varepsilon^u(x)$ C^r diskek

$E_x^s = T_x W_\varepsilon^s(x)$, $E_x^u = T_x W_\varepsilon^u(x)$



tétel: $\exists\, \delta > 0 \quad d(x,y) < \delta \Rightarrow \exists!\, [x,y]$ x-től y-tól folytonosan függő

tétel: f egy C^2 osztályú A axiómájú diffeomorfizmus

$\exists\, m : \Omega(f) = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_m$ basic set

$f(\Omega_i) = \Omega_i$ zárt diszjunktak

$f|\Omega_i$ tranzitív

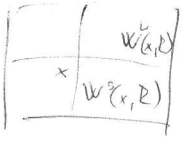
def.: Ω_s attraktor, ha $\exists\, V$ nyílt $V \supset \Omega_s \quad f(V) \subset V$; $\Omega_s = \bigcap f^n V$

Markov partíció

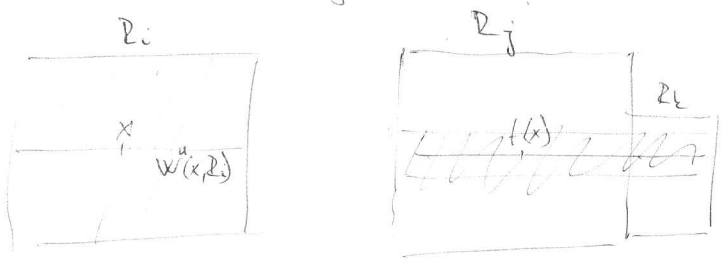
Ω_s-en valódi tégla az R, ha $R \subset \Omega_s$

$x, y \in R \Rightarrow [x,y] \in R$

$\overline{\operatorname{int} R} = R$



Ω_s-nek Markov-partíciója $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$
ha $\operatorname{int} R_i \cap \operatorname{int} R_j = \emptyset \quad i \neq j$



$f(W^u(x,R_i)) \supset W^u(f(x),R_j)$

$f(W^s(x,R_i)) \subset W^s(f(x),R_j)$

$R \subset \Omega_s$

$x, y \in R \Rightarrow [x,y] \in R$

$\overline{\operatorname{int} R} = R$

$\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$

$\operatorname{int} R_i \cap \operatorname{int} R_j = \emptyset \quad i \neq j$

$\Omega_s = \bigcup R_i$

$x \in R_i$; $f(x) \in R_j$

$f(W^u(x,R_i)) \supset W^u(f(x),R_j)$

$W^s(f(x),R_j) \supset f(W^s(x,R_i))$

ekkor $\mathcal{R}$ Markov-partíció

$f: M \to M$

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"] & \Sigma_A \arrow[d, "\pi"] \\
\Lambda \arrow[r, "f"] & \Lambda
\end{tikzcd}$$

$\Sigma_A = \{\bar{i} \in \{1, \dots, n\}^{\mathbb{Z}} : a_{i_k, i_{k+1}} = 1 \ \forall k\}$

$a_{ij} = 1 \iff \operatorname{int} R_i \cap f^{-1} \operatorname{int} R_j \neq \emptyset$

$\bar{i} \in \Sigma_A \quad (\dots i_{-2} \dots i_{-1} i_0 i_1 \dots i_n \dots)$

$\cancel{x \in R_{i_0} \cap f^{-1} R_{i_1} \cap}$

$$\pi(\bar{i}) = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^{-k} R_{i_k}$$

Gibbs-mértek:

$\exists\ c_1, c_2 > 0 \quad \forall \bar{j} \in [i_0, \dots, i_{n-1}]$

$$c_1 < \frac{\mu([i_0 \dots i_{n-1}])}{\exp\{-nP(\varphi) + (S_n\varphi)(\bar{j})\}} < c_2$$

$$(S_n\varphi)(\bar{j}) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\sigma^{-k}\bar{j})$$

$T_x M = E_x^u \oplus E_x^s \quad x \in \Omega_s$

az érintőtér minden egyes x elemre stabil és instabil részre esik szét

$d_x f : E^u_x \longrightarrow E^u_{f(x)}$

$\varphi^u(x) = \log \mathrm{Jac}(d_x f)$

$\varphi^u(x)$ -ről be lehet látni, hogy Hölder-folytonos

$$\begin{tikzcd} \Sigma_A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & \Sigma_A \arrow[d, "\pi"] & \leftarrow \varphi^+ \\ \Lambda \arrow[r, "f"] & \Lambda & \leftarrow \varphi^u \end{tikzcd}$$

π majdnem kölcsönösen egyértelmű, így φ^u „felvihető" Σ_A-ba: φ^+

$\varphi^+(\underline{i}) := \varphi^u(\pi(\underline{i}))$

legyen μ^+ az φ^+ potenciálra a Gibbs-mértek (Bowen-Sinai-Ruelle-mértek)

tétel: legyen μ^+ mint fent és tfh Ω_s egy A-axiómájú attraktor

legyen $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ folyt.

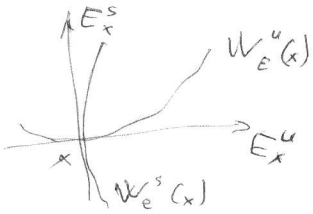
ekkor Lebesgue-m.m. $x \in W^s(\Omega_s)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(f^k x) = \int g(x)\, d\mu(x) \qquad \text{ahol } \mu = \pi_* \mu^+$$

Ljapunov exponens

informális bevezetés

hiperbolicitás egyik fontos feltétele:



$\exists \lambda \in]0;1[\quad d(f^n x, f^n y) < \lambda^n$ ha $y \in W^s_\varepsilon(x)$

$\exists \lambda \in]0;1[\quad \|d_x f^n \bar{v}\| < \lambda^n \|\bar{v}\| \qquad \bar{v} \in E^s_x$

megmondtuk, hogy exponenciálisan kicsi

de mekkora a csökkenés üteme?

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \| d_x f^n v \| \qquad \bar{v} \in E^s_x$ — a v-nek csak az iránya számít, a hossza nem

szoleneidnál

$0 < \lambda_2 < \lambda_1 < 1$

$\log \lambda_1$ ha $\bar{v}$ — vízszintes

$\log \lambda_2$ ha $\bar{v}$ | függőleges

más irányú v-kre is $\log \lambda_1$

M kompakt, $f: M \to M$ C^1 diffeomorfizmus

def.: $x \in M$ reguláris, ha $\exists$ $\lambda_1(x) > \lambda_2(x) > \dots \lambda_m(x)$

$\exists$ $E_1(x) \oplus \dots \oplus E_m(x) = T_x M$ $\forall$ $0 \neq u \in E_j(x)$: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|d_x f^n u\| = \lambda_j(x)$

a λ_j-t az E_j altérhez tartozó Ljapunov exponenseknek nevezzük

$\dim(E_j) =: n_j$ $\qquad \Lambda(n_1, \dots, n_m) = \{x : \text{reguláris}, \dim E_j(x) = n_j\}$

pl.: szolenoid $\lambda_1 = \lambda \in]0;1[$

$\Lambda = \Lambda(1,2)$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\Lambda = \Lambda(1,1,1)$

Λ most nem attraktort jelent, diffeomorfizmus

$\Lambda = \{\text{reguláris pontok}\}$

$$\Lambda = \bigcup_m \bigcup_{(n_1,\dots,n_m)} \Lambda(n_1, \dots, n_m)$$

$f\Lambda(n_1, \dots, n_m) = \Lambda(n_1, \dots, n_m)$

$\lambda_j(x) = \lambda_j(f(x))$

a Ljapunov-exponens olyan fv, ami az orbiton állandó (ha van)

$\lambda_j : \Lambda(n_1, \dots, n_m) \to \mathbb{R}$ $1 \le j \le m$-re ez mérhető leképezés (és nem több)

Oseledec-tétel:

legyen μ egy tetszőleges invariáns mérték, ekkor $\mu(\Lambda) = \mu(M)$

(mértékelméleti értelemben Λ nagy; topológiai értelemben kicsi)

minden invariáns mértékre majdnem minden pont reguláris

ha μ ergodikus mérték, akkor a λ_i-k μ-m.m. konstansok

a továbbiakban feltesszük, hogy μ ergodikus

mik a szögek az $E_i(x)$ alterek között?

legyen a olyan, hogy $\lambda_i(x) \neq a$ μ-m.m. x-re

$E^{a-}(x) = \bigoplus_{\lambda_i(x) < a} E_i(x)$, $E^{a+}(x) = \bigoplus_{\lambda_i(x) > a} E_i(x)$

$\sigma_a(x) = (E^{a-}(x), E^{a+}(x))\measuredangle$

tétel: μ-m.m. x-re $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sigma_a(f^n x) = 0$

def.: $\chi_\mu(x) = \sum_{\lambda_i(x) > 0} \lambda_i(x) \cdot \dim E_i(x)$

tétel: (Ruelle)

$f: M \to M$ C^2 diffeo., μ ergodikus

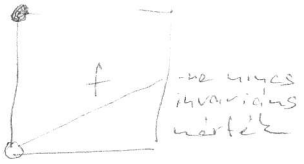
$h_\mu \le \chi_\mu(x)$

Pesin - tétel:

$h_\mu = \chi_\mu(x)$, ha $\mu \ll Leb.$

μ tetszőleges

$\frac{1}{n}\left[\mu + \mu\circ f^{-1} + \dots + \mu\circ f^{-(n-1)}\right] \longrightarrow \nu$ inv.

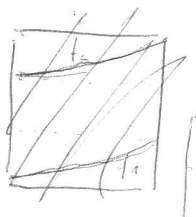


kérdés: adott $f: M \to M$ C^2 diffeomorfizmus
létezik-e μ ergodikus, hogy $\chi_\mu > 0$?
(akkor tipikus pontban jól kever a leképezés)

$h_{top}(f) = \sup_{\mu \in \mathcal{E}_f(M)} h_\mu(f)$

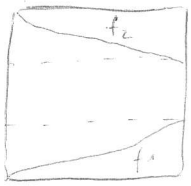
ergodikus mértékek

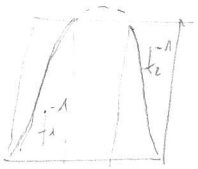
válasz: akkor (és csak akkor), ha $h_{top} > 0$



$\Lambda = \bigcup_{i=1}^{2} f_i(\Lambda)$; $0 < c_1 < |f_i'(x)| < c_2 < 1 \quad \forall x$.

$f_1[0;1] \cap f_2[0;1] = \emptyset$





$F: \Lambda \to \Lambda$

$F/\Lambda \qquad |F'(x)| > 1$ ha $x \in \Lambda$

$F|\Lambda$ C^2; $0 < \frac{1}{c_2} < |F'(x)| < \frac{1}{c_1} \quad \forall x \in \Lambda$

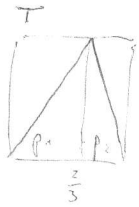
$\frac{1}{k}\log|(F^k)'(x)| \longrightarrow \chi_\mu(x)$

μ egy mérték F-re

$\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} \log|F'(F^i(x))|$ ← osztott való kiértékelés
ez egy ergodikus összeg;
a megfelelő integrálhoz konvergál

$\downarrow$

$\int \log|F'(x)|\, d\mu(x)$ μ-m.m. x-re



$p_i > 0$
$p_1 p_2 = 1$

$\Sigma = \{1,2\}^{\mathbb{N}}$

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & \Sigma \arrow[d, "\pi"] \\ {[0;1]} \arrow[r, "T"'] & {[0;1]} \end{tikzcd} \qquad \mu \downarrow \pi_*\mu$$

$V_{i_0 \dots i_{n-1}} = \{x : T^k x \in V_{i_k}\} =$

$= V_{i_0} \cap T^{-1}V_{i_1} \cap T^{-2}V_{i_2} \cap \dots \cap T^{-(n-1)}V_{i_{n-1}}$

$\pi(\bar{i}) := \bigcap_{n \geq 1} V_{i_0 \dots i_{n-1}}$

$\{p_1, p_2\}^{\mathbb{N}} = \mu$

$\lambda_1(\mu) = p_1 \log\frac{3}{2} + p_2 \log 3$

más Bernoulli-mértékre más x-ek lesznek a pushdown-mértékre tipikusak

$\frac{2}{3}; \frac{1}{3}$ lesz a Lebesgue-mérték; ez az egyetlen abszolút folytonos

adott egy ν a $[0,1]$-en, amely ergodikus F-re ($\Rightarrow \mathrm{spt}(\nu) \subset \Lambda$)

sejtés: $\dim_H \nu$

emlékeztető: ha ν-m.m. x-re $d_\nu(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\log \nu(x-r, x+r)}{\log r}$ létezik, és

egyenlő d-vel, akkor $\dim_H \nu = d$

$\Sigma = \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$

$V_{i_0 \dots i_{n-1}} = \{x \in [0;1] : F^k x \in V_{i_k},\ 0 \le k \le n-1\}$

$\bigcap_{n \ge 1} V_{i_0 \dots i_{n-1}} =: \pi(\bar{i}) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f_{i_0} \dots f_{i_n}}_{f_{i_0} \circ \dots \circ f_{i_n}}(0)$

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & \Sigma \arrow[d, "\pi"] \\ \Lambda \arrow[r, "F"] & \Lambda \end{tikzcd}$$

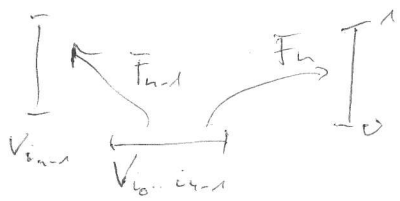
értelmezzük μ mértéket a Σ-n: $\mu(A) = \nu(\pi A)$

$h_\mu = h_\nu$

ha $x = \pi(\bar{i})$ $\quad d_\nu(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \nu(V_{i_0 \dots i_{n-1}})}{\log |V_{i_0 \dots i_{n-1}}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \mu([i_0 \dots i_{n-1}])}{\log |V_{i_0 \dots i_{n-1}}|} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n}\log \mu([i_0 \dots i_{n-1}])}{-\frac{1}{n}\log |V_{i_0 \dots i_{n-1}}|} \overset{(*)}{=} \frac{h_\nu}{\lambda_\nu}$

sejtés: $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log |V_{i_0 \dots i_{n-1}}| = \int \log |F'(x)|\, d\nu(x) = \lambda_\nu$ $\quad (*)$



$V_{i_0 \dots i_{n-1}} = \underbrace{f_{i_0} \dots f_{i_{n-2}} f_{i_{n-1}}}_{f_{i_0 \dots i_{n-1}}}[0,1]$

$V_{i_0 \dots i_{n-1}} = f_{i_0 \dots i_{n-1}}[0;1]$ $\qquad u \in [0,1]$

$|V_{i_0 \dots i_{n-1}}| = |f'_{i_0 \dots i_{n-1}}(u)| \asymp |f'_{i_0 \dots i_{n-1}}(\pi(\sigma^n \bar{i}))|$

emlékeztető: bounded distortion lemma

$\{f_i\}_{i=1}^n$ C^2 kontrakciók $\quad \forall x \in [0,1];\ 0 < c_1 < |f'_k(x)| < c_2 < 1$

$\exists\, d_1, d_2 > 0 \quad \forall L \quad \forall i_1, \dots, i_L$-re $\quad \forall u, v \in [0,1] \quad d_1 < \frac{|f'_{i_1 \dots i_L}(u)|}{|f'_{i_1 \dots i_L}(v)|} < d_2$

$\log |V_{i_0 \dots i_{n-1}}| = \log |f'_{i_0}(\overbrace{f_{i_1 \dots i_{n-1}} \pi(\sigma^n \bar{i})}^{\pi(\sigma \bar{i})})| + \dots + \log |f'_{i_{n-1}}(\pi(\sigma^n \bar{i}))| =$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \log \left| f'_{i_k}\left(\pi \sigma^{k+1} \bar{i}\right)\right|$$

$$-\frac{1}{n}\log|V_{i_0\dots i_{n-1}}| = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\log\left|f'_{i_k}\left(\pi\sigma^{k+1}\bar{i}\right)\right|}_{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(\sigma^k \bar{i})}$$

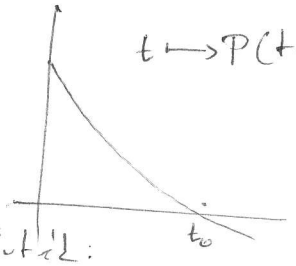
$$g(\bar{i}) = \log\left|f'_{i_0}\left(\pi(\sigma\bar{i})\right)\right| \qquad \mu\text{-m.m. } \bar{i}\in\Sigma\text{-re}$$

$$-\frac{1}{n}\log|V_{i_0\dots i_{n-1}}| \longrightarrow \int \log\left|f'_{i_0}\left(\overbrace{\pi(\sigma\bar{i})}^{F(x)}\right)\right|^{-1} d\mu(\bar{i}) = \int \log|F'(x)|\, d\nu(x)$$

$$F^{-1}(F(x)) = x \qquad (F^{-1})'(F(x)) = \frac{1}{F'(x)}$$

$$\dim_H \nu = \frac{h_\nu}{\lambda_\nu}$$

$$\varphi(\bar{i}) = \log f'_{i_0}(\pi(\sigma\bar{i}))$$



$$\exists!\,\mu \quad P(t\varphi) = h_\mu(\sigma) + t\int \varphi\, d\mu \qquad \dim_H \Lambda = t_0$$

μ a $t\cdot\varphi$ potenciálra Gibbs-mérték:

$\exists\, d_1, d_2 > 0 \quad \forall n \ \forall [i_0\dots i_{n-1}] \quad \forall \bar{j}\in[i_0\dots i_{n-1}]$

$$d_1 < \frac{\mu[i_0\dots i_{n-1}]}{\exp\{-n\underbrace{P(\varphi t_0)}_{0} + t S_n\varphi(\bar{j})\}} < d_2$$

$$d_1' < \frac{\mu[i_0\dots i_{n-1}]}{|f'_{i_0\dots i_{n-1}}(0)|^{t_0}} < d_2'$$

ez a Gibbs-mérték ergodikus

hogyan számolható a dimenziója?

$$\nu := \pi_* \mu \qquad d_\nu(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \mu[i_1\dots i_n]}{\log|f'_{i_0\dots i_n}(0)|} = t_0$$

$$\dim_H \nu = d_\nu(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\log|f'_{i_0\dots i_{n-1}}(0)|^{t_0}}{\frac{1}{n}\log|f'_{i_0\dots i_{n-1}}(0)|} = t_0 = \dim_H \Lambda$$

az attraktoron van ergodikus mérték, aminek segítségével könnyen kezelhető

$f: M \longrightarrow M \quad C^2$ diffeomorfizmus

def.: x reguláris, ha $\exists\, E_1(x), \dots, E_m(x)$ $\qquad d_x f E_i(x) = E_i(f(x))$

$\lambda_1(x) > \dots > \lambda_m(x)$ úgy, hogy $\qquad \lambda_i(f(x)) = \lambda_i(x)$

$$T_x M = E_1(x) \oplus \dots \oplus E_m(x)$$

ha $v \in E_i(x) \quad v \neq 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\|d_x f^n v\| = \lambda_i(x)$

adott egy $\mu \in \mathcal{E}_f(M)$,

$\lambda_1(\mu) > \dots > \lambda_m(\mu)$

μ-mértek hiperbolikus, ha $\lambda_i(\mu) \neq 0 \quad \forall i$

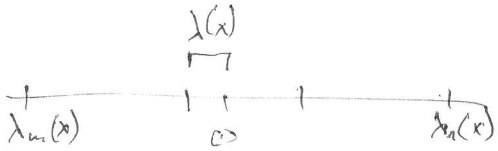
$\mathcal{E}_f^*(M) = \{$hiperbolikus és ergodikus mértékek$\}$

tétel:

legyen $x \in M$ egy hiperbolikus pont (reguláris és a Ljapunov-exponensek nem nullák $(\lambda_i(x) \neq 0 \quad \forall i)$)

$\lambda(x) := \min_{1 \le i \le m(x)} |\lambda_i(x)|$

megj.: biztos van pozitív és negatív is, különben a mértek ráhúzódik egy véges orbitra



$\forall \varepsilon > 0$ elég kicsi $\exists\, c(x, \varepsilon) > 0$

$\|d_x f^n v\| \le c(x,\varepsilon)\, e^{-n(\lambda(x)-\varepsilon)} \|v\|$ ha $v \in E^s(x) = \bigoplus_{\lambda_i(x)<0} E_i(x)$

$\|d_x f^{-n} v\| \le c(x,\varepsilon)\, e^{-n(\lambda(x)-\varepsilon)} \|v\|$ ha $v \in E^u(x) = \bigoplus_{\lambda_i(x)>0} E_i(x)$

biz.:

elég az egyikre belátni:

$v \in E^s(x)$

$\frac{1}{n} \log \|d_x f^n v\| \le \lambda_v(x) \le -\lambda(x)$

$\|d_x f^n v\| \le e^{-n(\lambda(x)-\varepsilon)}$ ha $n > N(x, v, \varepsilon)$

$\exists\, c(x, \varepsilon, \bar{v}) \quad \|d_x f^n v\| \le c(x, \varepsilon, \bar{v}) \cdot e^{-n(\lambda(x)-\varepsilon)} \|v\|$

legyen $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_L$ ortonormált bázisa $E^s(x)$-nek

$c^*(x,\varepsilon) := \max_{1 \le l \le L} c(x, \varepsilon, e_l)$

$v = \sum_{i=1}^{L} t_i \bar{e}_i$

$\|d_x f^n v\| \le \sum_{i=1}^{L} \|d_x f^n (t_i e_i)\| \le \sum_{i=1}^{L} c^*(x,\varepsilon)\, e^{-n(\lambda(x)-\varepsilon)} \cdot \underbrace{\|v\|}_{\ge t_i} \le$

$\le \underbrace{L\, c^*(x,\varepsilon)}_{c_s(x,\varepsilon)} \cdot e^{-n(\lambda(x)-\varepsilon)} \|v\|$

hasonlóképp $c_u(x,\varepsilon)$

$c(x,\varepsilon) = \max(c_s(x,\varepsilon), c_u(x,\varepsilon))$

f-és μ együtt egyenletesen hiperbolikus, ha $C(x,\varepsilon)$ konstanssal helyettesíthető

$$\|d_x f^n v\| < c\cdot e^{-n\lambda}\|v\| \qquad v\in E^s(x)$$
$$\|d_x f^{-n} v\| < c\cdot e^{-n\lambda}\|v\| \qquad v\in E^u(x) \qquad \mu\text{-m.m. } x\text{-ben}$$

Pesin-tétel

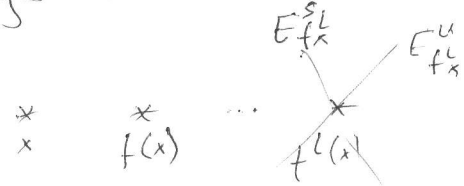
def. Pesin-halmaz

$f: M\to M$, C^2 diffeo., μ ergodikus mértékben hiperbolikus,

$$\lambda_1(\mu)>\dots>\underbrace{\lambda_u(\mu)}_{\lambda_1}>0>\underbrace{\lambda_s(\mu)}_{-\lambda_2}>\dots>\lambda_m(\mu)$$

$0<\varepsilon\ll\lambda_1,\lambda_2$

Λ_k az olyan $x\in M$-ek halmaza, melyekre:



(a) $\cancel{df^n|_{E^s_{f^k x}}}$ $\|df^n|_{E^s_{f^k x}}\|\le$

$\le e^{\varepsilon|k|}e^{-n(\lambda_2-\varepsilon)}e^{\varepsilon\cdot k}$

(b) $\|df^{-n}|_{E^u_{f^k x}}\|\le e^{\varepsilon|k|}e^{-n(\lambda_1-\varepsilon)}e^{\varepsilon k}$

(c) $\tan(\angle(E^s_{f^k x},E^u_{f^k x}))\ge e^{-\varepsilon|k|}e^{-\varepsilon k}$

$$\Lambda=\bigcup_{k\ge1}\Lambda_k$$

észrevételek: $\Lambda_1\subseteq\Lambda_2\subseteq\dots$

$f(\Lambda_k),\ f^{-1}(\Lambda_k)\subset\Lambda_{k+1}$

$f(\Lambda)=\Lambda$

tétel: legyen $\mu\in\mathcal{E}_f^*(M)$, ekkor

(i) $\mu(\Lambda)=1$

(ii) Λ_k kompakt $\forall k$-ra

(iii) $\Lambda_k\ni x\longmapsto E^u(x)\oplus E^s(x)$ folytonos

Kingman ergodikus tétel (szubadditív erg. t.)

def: $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$; T egy mértéktartó leképezés

$Q=\{(i,k):\ 0\le i<k,\ i,k\in\mathbb{N}\}$ $\qquad F=\{F_{ik}:\ (i,k)\in Q\}$

$\forall (i,k)\in Q$ legyen F_{ik} integrálható úgy, hogy

(i) $F_{ik}\circ T=F_{i+1,k+1}$

(ii) $F_{ik}\le F_{ij}+F_{jk}$ $\qquad (i,j),(j,k)\in Q$

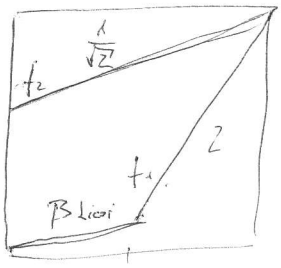
(iii) $\gamma(F)=\inf_{n\ge1}\frac{1}{n}\int F_{0n}\,d\mu>-\infty$

példa:

$$F_{i,k} := \sum_{j=i}^{k-1} F_{0,1} \circ T^j \qquad \to F_{0,n}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} F_{0,1}(T^j(x))$$

Kingman: $\exists$ olyan f integrálható fv., amire $\int f \, d\mu = \gamma(F)$ és

$$\frac{1}{n} F_{0,n}(x) \xrightarrow[L^1]{\mu\text{-m.m.}} f(x) \qquad \cancel{\mu\text{-m.m. } x\text{-re}} \quad \cancel{\text{ha } F \text{ szubadditív}}$$



$\{f_1, f_2\}$ szig. mon. növő, konvex

$$\Sigma = \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$$

$$\pi : \Sigma \longmapsto [0,1]$$

$$\lim_{n\to\infty} f_{i_0 \dots i_n}(0) = \pi(\bar{i})$$

$$\mu := \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\}^{\mathbb{N}} \qquad \nu = \pi_* \mu$$

$$\chi_\nu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log f'_{i_0 \dots i_{n-1}}(0)$$

$$f'_{i_0 \dots i_{n-1}}(f_{i_n \dots i_{n+m}}(0)) \, f'_{i_n \dots i_{n+m}}(0)$$

Tétel: ha F szubadditív, akkor $\exists f$ integrálható, f T invariáns

$$f(x) = f(Tx) \ \forall x, \ \mu\text{-m.m. } x\text{-re} \qquad \frac{1}{n} F_{0,n} \xrightarrow[\text{m.m.}]{L^1} f$$

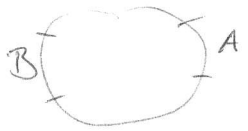
---

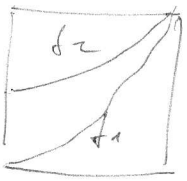
keverő rendszer: $\dfrac{\mu(A \cap T^{-n} B)}{\mu(A)} \to \mu(B)$

pl bal shift

példa olyanra, ami nem keverő, de ergodikus:

irracionális szöggel való forgatás körön:





$$\Sigma = \{1, 2\}^{\mathbb{N}} \qquad \mu = \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\}^{\mathbb{N}}$$

$$\downarrow \pi$$

$$[0,1] \qquad \lim_{n\to\infty} f_{i_0 \dots i_{n-1}}(0) = \pi(\bar{i})$$

$\mathbb{E}\left(\max_x \log f_i'(x)\right) < 0$ esetén összehúzó

$f_1(x) = \lambda_1 x + 1 \qquad \lambda_1 < 1$

$f_2(x) = \lambda_2 x + 1 \qquad \lambda_2 > 1$

$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(f'_{i_0 \dots i_{n-1}}\right)(0)$ létezik μ-tipikus $\bar{i}$-re

$F_{u,w}(\bar{i}) = \log f'_{i_u \dots i_{w-1}}(0) \qquad \Sigma' = \{1,2\}^{\mathbb{N}} \quad \tau = \sigma$

$$F_{u,w}(\bar{i}) = \log f'_{i_u \dots i_{w-1}}(0) =$$

$$= \log\left[f'_{i_u \dots i_{v-1}}\left(f_{i_v} \dots f_{i_{w-1}}(0)\right) \cdot f'_{i_v \dots i_{w-1}}(0)\right] =$$

$$= \underbrace{\log f'_{i_u \dots i_{v-1}}\left(\underbrace{f_{i_v} \dots f_{i_{w-1}}(0)}_{\geq 0}\right)}_{F_{u,v}(\bar{i})} + \underbrace{\log f'_{i_v \dots i_{w-1}}(0)}_{F_{v,w}(\bar{i})}$$

$F_{u,w}(\bar{i}) \geq F_{u,v}(\bar{i}) + F_{v,w}(\bar{i})$ szuperadditív

nehéz példa

$f: M \to M \quad C^2$ diffeo

μ f inv., ergodikus mérték M-en

μ-m.m. $x \in M$-re

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \| d_x f^n \|$$

$$\| d_x f^{n+m} \| \leq \| d_{f^n_x} f^m \| \cdot \| d_x f^n \|$$

$F_{i,k}(x) = \log \| d_{f^i(x)} f^{k-i} \|$ szeveposztással szubadditív lesz

lemma (Akcoglu, Krengel)

legyen F szuperadditív és nemnegatív, $\alpha > 0$

$E = \{\omega \in \Omega : \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} F_{0,n} > \alpha\}$

$\mu(E) \leq \frac{1}{\alpha} \sigma(F)$

$\frac{1}{m} g_m \to g(F) = \sup_n \frac{1}{n} g_n$

$g_n = \int F_{0,n} \, d\mu$

$$g_{n+m} = \int F_{0,n+m} \, d\mu \leq \underbrace{\int F_{0,n} \, d\mu}_{g_n} + \underbrace{\int F_{n,n+m} \, d\mu}_{\int F_{0,m} \circ T^n \, d\mu = \int F_{0,m} \, d\mu = g_m}$$

biz.: $E_N = \left\{ \omega : \sup_{1 \le n \le N} \frac{1}{n} F_{0,n} > \alpha \right\}$ $\qquad K > N$

$$A(\omega) = \left\{ 0 \le k \le K-N-1 : \tau^k \omega \in E_N \right\}$$

k_1 a legkisebb elem $A(\omega)$-nak

$\tau^{k_1}\omega \in E_N \quad \exists\, n_1 \quad \frac{1}{n_1} F_{0,n_1}(\tau^{k_1}\omega) > \alpha \qquad n_1 < N$

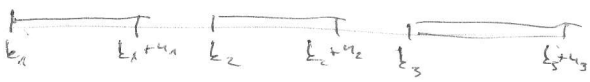
$k_2 \ge n_1 + k_1$ legkisebb $A(\omega)$-beli

$\exists\, n_2 \quad \frac{1}{n_2} F_{0,n_2}(\tau^{k_2}\omega) > \alpha$

$\vdots$

$k_r, n_r \qquad [0,K] \supset \bigcup_{i=1}^{r} [k_i, k_i + n_i[\supset A(\omega)$

$$F_{0,K}(\omega) \ge \sum_{i=1}^{r} F_{k_i, k_i+n_i}(\omega) =$$



$$= \sum_{i=1}^{r} F_{0,n_i}(\tau^{k_i}\omega) \ge \alpha \sum_{i=1}^{r} n_i \ge \operatorname{card}(A(\omega)) \cdot \alpha$$

$$\sum_{j=0}^{K-N-1} \mathbb{1}_{E_N}(\tau^j \omega) = \operatorname{card}(A(\omega))$$

$$\int \operatorname{card}(A(\omega))\, d\mu = (K-N)\,\mu(E_N)$$

$$\overbrace{\int F_{0,K}\, d\mu}^{gK} \ge \alpha \int \operatorname{card}(A(\omega))\, d\mu = \alpha (K-N)\,\mu(E_N)$$

$\frac{1}{\alpha}\frac{1}{K-N}\, gK \ge \mu(E_N) \qquad \forall\, K$-ra igaz, N fix $\Rightarrow \frac{1}{\alpha}\frac{1}{K} gK \ge \mu(E_N)$

$\frac{1}{\alpha}\, g(F) \ge \mu(E_N)$

biz.:

$F = \{ F_{i,k} : (i,k) \in Q \}$ super adalitiva

feltehető, hogy $F_{i,k} \ge 0$

$\frac{1}{k} F_{0,k} \xrightarrow{n.m.} f$

$$F'_{i,k}(\omega) = F_{i,k}(\omega) - \sum_{j=i}^{k-1} F_{0,1}(\tau^j \omega)$$

$$\frac{1}{k} F'_{0,k}(\omega) = \frac{1}{k} F_{0,k}(\omega) - \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} F_{0,1}(\tau^j \omega)$$

$$F_{0,k}(\omega) \ge F_{0,1}(\omega) + F_{1,2}(\omega) + \dots + F_{k-1,k}(\omega) =$$

$$= F_{0,1}(\omega) + F_{0,1}(\tau\omega) + \dots + F_{0,1}(\tau^{k-1}\omega)$$

$f := \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} F_{0,k} \quad ; \quad \bar{f} := \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{k} F_{0,k}$

$f \in L^1(\mu) \qquad \int \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} F_{0,k}\, d\mu \le \underline{\lim} \frac{1}{k} \underbrace{\int F_{0,k}\, d\mu}_{gk} \le \sup_k \frac{1}{k} gk = g(F) < \infty$ feltevés

legyen $\alpha > 0$ rögz.

$E_\alpha := \{\omega : \bar{f}(\omega) - \underline{f}(\omega) > \alpha\}$

legyen $\varepsilon > 0$ rögz.

$g(F) = \sup_m \frac{1}{m} g_m \quad \exists M$ ha $m > M$

$g(F) - \varepsilon \leq \frac{1}{m} g_m \leq g(F)$

$0 < m g(F) - g_m < \varepsilon m$ lerögzítjük m-et

$$F^m_{k,l}(\omega) = F_{mk,ml}(\omega) - \underbrace{\sum_{j=k}^{l-1} F_{0,m}(\tau^{jm}\omega)}_{H^m_{k,l}}$$

F^m szuperadditív, alkalmazható rá a lemma

$$\int H^m_{k,l}\, d\mu = (l-k)\, g_m = \int F_{0,m}\, d\mu$$

$$\frac{1}{K}\int F^m_{0,K}\, d\mu = m\left\{\underbrace{\frac{1}{Km}\int F_{0,mK}\, d\mu}_{\leq g(F)} - \frac{1}{K} K g_m\right\} \leq m g(F) - g_m < \varepsilon m$$

$$\bar{f} - \underline{f} \leq \sup_k \underbrace{\frac{1}{k} F^m_{0,k}}_{\frac{1}{mk} F_{0,mk} - \frac{1}{mk}\sum_{j=0}^{k-1} F_{0,m}(\tau^{jm}\omega)}$$

könnyen ellenőrizhető: $\bar{f} = \overline{\lim_{K\to\infty}} \frac{1}{Km} F_{0,Km}$

$\underline{f} = \underline{\lim_{K\to\infty}} \frac{1}{Km} F_{0,Km}$

$$E_\alpha \subset E := \left\{\omega : \sup_k \frac{1}{km} F^m_{0,k} > \alpha\right\} = \left\{\omega : \sup_k \frac{1}{k} F^m_{0,k} > \alpha m\right\}$$

a Krengel - Akcoglu tételt alkalmazva

$\mu(E) \leq \frac{1}{\alpha m} \cdot g(F^m) \leq \frac{1}{\alpha m} \varepsilon m \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}$ tetsz. ε

$\mu(\{\omega : \bar{f}(\omega) - \underline{f}(\omega) > \alpha\}) = 0$ $\tilde{f}$ az a közös érték

válasszuk m-et úgy, hogy $g(F) - \varepsilon < \frac{1}{m} g_m < g(F)$

$\int F_m\, d\mu$

$\mu(|\tilde{f} - \tilde{f}\circ\tau^m| > \alpha)$ kicsi

$\mu(|\tilde{f} - \tilde{f}\circ\tau| > \alpha) = \mu(|\tilde{f}\circ\tau^m - \tilde{f}\circ\tau^{m+1}| > \alpha)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m\cdot n} H^m_{0,n} \underset{L^1(\mu)}{\overset{\mu\text{-ms.}}{=}} h^m$; $h^m = h^m \circ \tau^n$

$\tilde{f} - h^m \leq \sup_k \frac{1}{k} F^m_{0,k}$

$F^m_{0,k} = F_{0,km} - H^m_{0,k}$

$\frac{1}{km} F^m_{0,k} = \underbrace{\frac{1}{km} F_{0,km}}_{\tilde{f}} - \underbrace{\frac{1}{km} H^m_{0,k}}_{h^m} \longrightarrow k\to\infty$

$0 \leq \tilde{f} - h^m$

$$\mu\{|\tilde f - h^m| > \alpha\} < \mu\{\sup_k \tfrac{1}{k} F_{0,k} > \alpha m\} \le \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

$$\|$$

$$\mu\{|\tilde f\circ\tau^m - \underbrace{h^m\circ\tau^m}_{h^m}| > \alpha\}$$

$$\mu\{|\tilde f - \tilde f\circ\tau^m| > 2\alpha\} < \mu\{|\tilde f - h^m| > \alpha\} + \mu\{|\tilde f\circ\tau^m - h^m| > \alpha\} \le \frac{2\varepsilon}{\alpha}$$

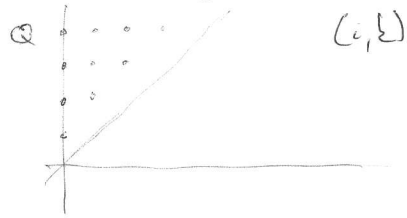
$$\mu\{|\tilde f - \tilde f\circ\tau^{m+1}| > 2\alpha\} < \frac{2\varepsilon}{\alpha}$$

$$\mu\{|\tilde f\circ\tau^m - \tilde f\tau^{m+1}| > 4\alpha\} \le \mu\{|\tilde f - \tilde f\circ\tau^m| > 2\alpha\} + \mu\{|\tilde f - \tilde f\circ\tau^{m+1}| > 2\alpha\} \le \frac{4\varepsilon}{\alpha}$$

$$\mu\{|\tilde f - \tilde f\circ\tau| > 4\alpha\} < \frac{4\varepsilon}{\alpha} \qquad \mu(A) = \mu(\tau^{-m}A)$$

ez csak úgy lehetséges, ha $\tilde f = \tilde f\circ\tau$ μ-a.s.

valószínűségi szubadditív folyamat



$(i,k)\in Q$ $\{F_{i,k}\}$

F_{ik} szubadditív folyamat

(i) $F_{i,k}\circ\tau = F_{i+1,k+1}$

(ii) $F_{i,k} \le F_{i,j} + F_{j,k}$

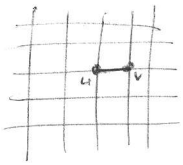
(iii) $\inf_n \{\frac{1}{n}\int F_{0,n}\,d\mu\} > -\infty$

(i) helyett (i^*) $\mu\{F_{i_1,k_1}\in B_1,\dots F_{i_s,k_s}\in B_s\} = \mu\{F_{i_1+1,k_1+1}\in B_1,\dots,F_{i_s+1,k_s+1}\in B_s\}$

$\Omega' = \mathbb{R}^Q$ $X_{i,k}$ $\in Q$

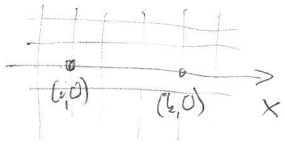
$\tilde\Omega = \{\omega\in\Omega' : \omega_{i,k} \le \omega_{i,j} + \omega_{j,k}\}$

$\tilde\mu\{\omega_{i_1,k_1}\in B_1,\dots,\omega_{i_s,k_s}\in B_s\} = \mu\{F_{i_1,k_1}\in B_1,\dots,F_{i_s,k_s}\in B_s\}$



$T_{u,v}$: mennyi idő alatt jutunk el u-ból v-be : iid, integrálható

$$U_{v,w} = \inf_{v=u_0 u_1 \dots u_s = w} \sum_i T_{u_i,u_{i+1}}$$



$F_{ik} := U_{(i,0),(k,0)}$

az teljesíti az (i^*), (ii), (iii) feltételeket

tétel: (Fürstenberg, Kesten)

$(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ τ mértéktartó ; $T:\Omega\to\mathcal{B}$ Banach algebrába leképezés

$\log^+\|T(\cdot)\|$ integrálható

$T_{k,l} = \sum_{i=k}^{l-1} T\circ\tau^i$; $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|T_{0,n}(\omega)\| = \chi(\omega)$ $\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$

$\chi^+\in L^1(\mu)$ χ τ-invariáns

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int\log\|T_{0,n}(\omega)\|\,d\mu(\omega) = \int\chi(\omega)\,d\mu$$

tétel (Oseledec) $\log^+\|A(\cdot)\|$ integrálható

$(\Omega,\mathcal{A},\mu)$; τ mértéktartó ; adott $A:\Omega\to M$ (M az $r\times r$-es mátrixok halmaza) mérhető ; ekkor létezik $\Omega'\subset\Omega$; $\tau^{-1}\Omega' = \Omega'$; $\mu(\Omega') = 1$: $\forall\omega\in\Omega'$:

$P_n(A,\omega) := A(\tau^{n-1}\omega)\cdots A(\tau\omega)A(\omega)$

(i) $\lim_{n\to\infty} (P_n^*(A,\omega)\cdot P_n(A,\omega))^{1/2n} =: \Lambda(\omega)$ létezik szim., poz. szemidef.

(ii) legyenek $\exp(\lambda_1(\omega)) < \dots < \exp(\lambda_s(\omega))$ a $\Lambda(\omega)$ sajátértékei

legyen F_i az $\exp(\lambda_i)$-hez tartozó altér; $G_i := F_1 \oplus \dots \oplus F_i$

ha $v \in G_i \setminus G_{i-1}$ ~~$\lim \frac{1}{n}\log\|P_n(A,\omega)\| = \lambda_i(\omega)$~~ $\lim \frac{1}{n}\log\|P_n(A,\omega)v\| = \lambda_i(\omega)$

$\omega \mapsto \lambda_i(\omega)$; $\omega \mapsto \dim F_i(\omega)$ mérhetőek

lineáris algebrai ismétlés

A^*A, AA^* szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrixok

ha $A \in M$ ($r\times r$-es valós mátrix)

$\exists\, C', C''$ ortogonális $r\times r$ mátrixok

$$A = C'(A^*A)^{\frac{1}{2}} = (AA^*)^{\frac{1}{2}}C''$$

tudjuk, hogy ha B pozitív szemidefinit és szimmetrikus,

$B = C^*DC$, ahol C ortogonális, D diagonális $0 \le d_{11} \le d_{22} \le \dots \le d_{rr}$

$\|B\| = d_{rr}$

$$(A^*A)^{\frac{1}{2}} = C^*DC$$

$A = \tilde{C}DC$, D diagonális $0 \le d_{11} \le \dots \le d_{rr}$ az A szinguláris értékei

ortogonális

$$AA^* = \tilde{C}D^2\tilde{C}^{-1} \Rightarrow AA^* \sim D^2 \quad \text{; hasonlóan } A^*A \sim D^2$$

az Oseledec-tételben:

$$P_n(A,\omega) = C'(P_n^*(A,\omega)\cdot P_n(A,\omega))^{1/2}$$

n nagy: ~~$P_n^*P_n \sim A^n$~~ $P_n \sim C\cdot\Lambda^n$

$v \in F_i$ $\|P_n v\| \sim \|\Lambda^n v\| = \exp(n\lambda_i)\|v\|$

$f_1, \dots, f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f_i(x) = \lambda_i x + t_i$ $\quad 0 < \lambda_i < 1$

μ ergodikus mértéket a $\Sigma = \{1, \dots, m\}^{\mathbb{N}}$-n; $\mu = \{p_1, \dots, p_m\}^{\mathbb{N}}$

$f_i(\Lambda) \cap f_j(\Lambda) = \emptyset$, Λ attraktor

$\pi : \Sigma \to \Lambda$; $\pi(\bar{i}) = \lim_{n\to\infty} f_{i_0} \circ \dots \circ f_{i_{n-1}}(0)$

$\Sigma \ni \bar{i} = (i_0, i_1, i_2, \dots)$

$\nu = \pi_*\mu$ $\quad A \subset \Lambda$ $\qquad (\Sigma, \mu) \xrightarrow{\pi} (\Lambda, \mu)$

$\nu(A) = \mu(\pi^{-1}A)$

$\nu(A) = \sum_{i=1}^{m} p_i\, \nu(f_i^{-1}A)$ önhasonló mértéket

$$\dim_H \nu = \inf\{\dim_H A : A \subset \Lambda,\ \nu(A) = 1\} = \nu\text{-ess sup} \lim_{r\to 0} \frac{\log \nu(B(x,r))}{\log r} = \lim_{r\to 0} \frac{\log \nu(B(x,r))}{\log r}$$

$$\frac{\log \nu(B(x,r))}{\log r} = \frac{-\frac{1}{n}\log \mu[i_0 \dots i_{n-1}]}{-\frac{1}{n}\log \lambda_{i_0}\dots\lambda_{i_{n-1}}} \longrightarrow h(\mu)$$

$\lambda(\bar{i}) = \lambda_{i_0}$ -t bevezetve a nevező egy függvény $\Rightarrow$ Birkhoff

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\lambda(\sigma^k\bar{i}) \longrightarrow -\int \log\lambda(\bar{i})\,d\mu(\bar{i})$$

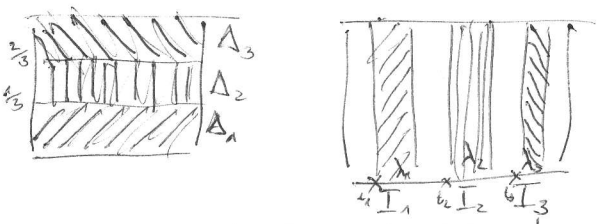
$$= -\sum_{i=1}^{m}\log\lambda_i \cdot p_i$$

$f_1,\dots,f_m : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

$f_i(x) = A_i x + t_i$

$\alpha \|A_i\| < 1$

iterált függvényrendszerek kapcsolata a Baker-leképezéssel



$f_i(x) = \lambda_i(x) + t_i$

$g(y) = 3y \bmod 1$

$F(x,y) = (f_i(x), g(y))$ ha $y \in \Delta_i$

x irányban történnek az érdekességek

inaffin függvényrendszerhez hozzápárosíthatunk többdimenziós hiperbolikus leképezést

$\Omega = \Sigma = \{1,\dots,m\}^{\mathbb{N}}$

$A(\bar{i}) = A^*_{i_0}$; $P_n(A,\bar{i}) = A^*_{i_{n-1}} \dots A^*_{i_0}$

$\underline{K_L(A_{i_0}\dots A_{i_{n-1}})} = K_L(P_n(A,\bar{i}))$

$\parallel$

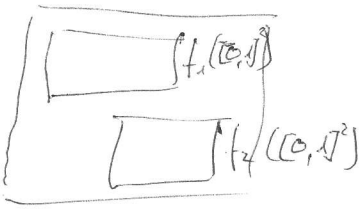
$(A_{i_0}\dots A_{i_{n-1}})^*(A_{i_0}\dots A_{i_{n-1}}) = (A^*_{i_{n-1}}\dots A^*_{i_0})(A^*_{i_{n-1}}\dots A^*_{i_0})^*$

$\frac{1}{n}\log K_L(A_{i_0}\dots A_{i_{n-1}})$

$\downarrow$

λ_{d-L+1}

$$\dim_H \nu = \begin{cases} \frac{h_\nu}{-\lambda_1} & \text{ha } -\lambda_1 > h_\nu \\ 1 + \frac{h_\nu+\lambda_1}{-\lambda_2} & \text{ha } -\lambda_1 < h_\nu < -\lambda_1-\lambda_2 \end{cases}$$



$\underset{\sim e^{n\lambda_2}}{K_2(A_0\dots A_{n-1})}$ $\boxed{}$ $f_{i_0}\dots f_{i_{n-1}}([0,1]^2)$

$\underset{\sim e^{n\lambda_1}}{K_1(A_0\dots A_{n-1})}$

$E := (\mathbb{R}^r, \|\cdot\|)$ euklideszi

$\Lambda_k E = \{\sum c_i\, u_1 \wedge \dots \wedge u_k \quad u_i \in E\}$

$u_1 \wedge \dots \wedge u_i' \wedge \dots \wedge u_k + u_1 \wedge \dots \wedge u_i'' \wedge \dots \wedge u_k = u_1 \wedge \dots \wedge (u_i' + u_i'') \wedge \dots \wedge u_k$

$c u_1 \wedge \dots \wedge u_i \wedge \dots \wedge u_k = u_1 \wedge \dots \wedge (c u_i) \wedge \dots \wedge u_k$

π az $\{1, \dots, k\}$ egy permutációja

$u_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge u_{\pi(k)} = \mathrm{sign}(\pi)\, u_1 \wedge \dots \wedge u_k$

$\langle u_1 \wedge \dots \wedge u_k, v_1 \wedge \dots \wedge v_k \rangle := \det\left((u_i, v_j)_{i,j=1..k} \right) = \det \begin{pmatrix} \langle u_1, v_1 \rangle & \dots & \langle u_1, v_k \rangle \\ \langle u_k, v_1 \rangle & \dots & \langle u_k, v_k \rangle \end{pmatrix}$

$\|u_1 \wedge \dots \wedge u_k\| = \sqrt{\det\left((u_i, u_j)_{i,j=1..k} \right)}$

ha $e_1, \dots, e_r$ bázisa E-nek, akkor $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ bázisa $\Lambda_k E$-nek $(i_1 < \dots < i_k)$

$\binom{r}{k} = \dim(\Lambda_k E)$

M: $r \times r$-es valós mátrixok halmaza

$A \in M$

$A^{\wedge k}(u_1 \wedge \dots \wedge u_k) = A u_1 \wedge \dots \wedge A u_k \qquad A^{\wedge k} : \Lambda_k E \longrightarrow \Lambda_k E$

$\|A^{\wedge k}\| = \max\{\|A^{\wedge k}(u_1 \wedge \dots \wedge u_k)\| : \|u_1 \wedge \dots \wedge u_k\| = 1\}$

$A = \tilde{C} D C \qquad D = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{rr} \end{pmatrix} \quad 0 \le d_{11} \le \dots \le d_{rr}$

ortogonális

az A szinguláris értékei

$\langle A u_i, A u_j \rangle = \langle D C u_i, D C u_j \rangle$

$\sup\left\{ \det\left((\langle D u_i, D u_j \rangle)_{i,j=1..k} \right) : \|u_1 \wedge \dots \wedge u_k\| = 1 \right\} = \|A^{\wedge k}\|^2$

$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad u_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \uparrow k \qquad \det \begin{pmatrix} d_{rr}^2 & & \\ & \ddots & \\ & & d_{r-k+1,\, r-k+1}^2 \end{pmatrix} = (d_{rr} \dots d_{r-k+1,\, r-k+1})^2$

$\|A^{\wedge k}\| \ge \prod_{i=r-k+1}^{r} d_{ii}$ bebizonyítható, hogy az egyenlőség

$\det \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \dots & \langle u_1, u_k \rangle \\ \langle u_k, u_1 \rangle & \dots & \langle u_k, u_k \rangle \end{pmatrix} = (\text{térfogat}\{\{u_1, \dots, u_k\} \text{ paralelepipedon}\})^2$

$\|A^{\wedge k}\| \le \|A\|^k$

$\log^+ \|A(\cdot)\| \in L^1(\mu)$

$\log^+ \|A^{\wedge k}(\cdot)\| \le k \log^+ \|A(\cdot)\| \quad \Rightarrow \quad \log^+ \|A^{\wedge k}(\cdot)\| \in L_1$

Fürstenberg - Kesten szerint

(i) $P_n(A^{\wedge k}, \omega) = A^{\wedge k}(T^{k-1}\omega) \dots A^{\wedge k}(T\omega) \cdot A^{\wedge k}(\omega)$

a.s. $\frac{1}{n} \log \|P_n(A^{\wedge k}, \omega)\| \longrightarrow \chi(k, \omega) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ invariáns

(ii) a.s. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \log^+ \|A(\tau^k\omega)\| \longrightarrow$ véges lim. (Birkhoff)

$\Omega' \subset \Omega$ az az invariáns halmaz, melyre $\mu(\Omega')=1$ & (i), (ii) teljesülnek a továbbiakban Ω'-ből választunk ω-t

$P_n(A,\omega) = \tilde{C}_n D_n C_n \qquad d_n(i,i,\omega)$

$\|P_n(A^{\wedge k},\omega)\| = \prod_{i=r-k+1}^{r} d_n(i,i,\omega)$

$\forall i \quad \frac{1}{n}\log d_n(i,i,\omega) \longrightarrow \varrho_i \qquad \varrho_1 = -\infty$ lehet

$P_n(A,\omega) = \tilde{C}_n D_n C_n$

$\frac{1}{n}\log d_n(i,i,\omega) \longrightarrow \varrho_i$

$\varrho_1 \le \dots \le \varrho_r$

$1,\dots,r \qquad [i_j, i_{j+1}-1] : \varrho_{i_j} \qquad 1 \le j \le s$

$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix}$

$\underbrace{[i_1 \dots}_{\varrho_{i_1}}\underbrace{[i_2 \dots}_{\varrho_{i_2}}\underbrace{[i_3 \dots}_{\varrho_{i_3}}[i_4 \dots$

$E_0 = \{0\}$

$E_j = \langle \{e_1,\dots,e_{i_j}\} \rangle$ a legkisebb j indexhez tartozó altér

$E_s = E$

cél: $C_n^{-1}E_j =: E_j^n \longrightarrow G_j$ létezik

lemma: $\forall n \ \varrho_{i_j} > -\infty$

$\bigcup E_j^{n+1}$

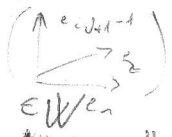
$\bar{v} \in E_j^n, \|\bar{v}\|=1, \quad \bar{v} = \bar{v}' + \sum_{j \ge i_{j+1}} b_i C_{n+1}^{-1} e_j \qquad \forall \varepsilon>0 \ \exists N_\varepsilon : n > N_\varepsilon$

$|b_i| \le \exp\{-n(\varrho_i - \varrho_{i_j} - \varepsilon)\} \qquad i \ge i_{j+1}$

biz.: $\|P_{n+1}(A,\omega)v\| = \|A(\tau^n\omega)\| \|P_n(A,\omega)v\| \le e^{n\varepsilon} \cdot e^{n(\varrho_{i_j}+\varepsilon)}$

$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \log^+\|A\tau^i\omega\| \to$ véges $\Rightarrow \frac{1}{n}\log^+\|A\tau^n\omega\| \longrightarrow 0$

$\|A(\tau^n\omega)\| < \exp(n\varepsilon)$

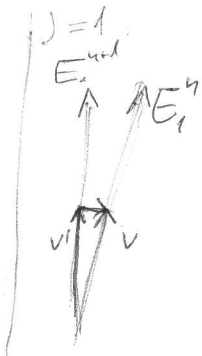
$v \in C_n^{-1}$ 

$\in W$

$\begin{pmatrix} D_n & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{bmatrix} W \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ i_{j+1}-1 \\ \\ \end{matrix}$

$\|\tilde{C}_n D_n C_n C_n^{-1} W\| = \|D_n W\| \le d_{i_{j+1}-1, i_{j+1}-1}$

$W \in E_n$, $|W|=1$



kov. $\|\overline{\Pi_j^{n+1}} u\| \le \|u\| \cdot r \cdot \exp\{-n(\varrho_{i_{j+1}} - \varrho_{i_j} - \varepsilon)\}$ (merőleges vetület E_j^{n+1}-re)

$$\frac{1}{n}\log\|P_{n+1}v\| \le \frac{1}{n}\log d(i_{j+1}-1, i_{j+1}-1)$$

$$\|P_{n+1}v\| \le e^{n(\varrho_{i_j}+2\varepsilon)}$$

alsó becslés $\|P_n v\|$-re

$$v = v' + \sum_{j=i_{j+1}}^{r} b_j C_{n+1}^{-1} e_j$$

$$\|P_{n+1}v\| \ge |b_j| \cdot \|P_{n+1}C_{n+1}^{-1} e_j\| \qquad \forall j \in [i_{j+1}, r] \qquad P_{n+1} = \tilde{C}_{n+1} D_{n+1} C_{n+1}$$

$$= |b_j| \, \|D_{n+1} e_j\| \qquad \text{mert } \tilde{C}_{n+1} \text{ ortogonális}$$

$$d_{n+1}(j,j) \ge e^{n(\varrho_j - \varepsilon)}$$

$$\ge |b_j| e^{n(\varrho_j - \varepsilon)} \qquad j \ge i_{j+1}$$

$$|b_j| \le \exp\{-n(\varrho_j - \varepsilon - \varrho_{i_j} - 2\varepsilon)\}$$

$$v = v' + \sum_{j=i_{j+1}}^{r} b_j C_{n+1}^{-1} e_j$$

$$E_j^n = \{C_n^{-1} e_1, \dots, C_n^{-1} e_{i_{j+1}-1}\}$$

$$\bar{E}_j^n = \{C_n^{-1} e_{i_{j+1}}, \dots, C_n^{-1} e_r\}$$

Π_j^n mer. vet. E_j^n-re

$\bar{\Pi}_j^n$ mer. vet. $\bar{E}_j^n$-re

$\sigma \ge j$, $u \in E_j^n$

(*) $\|\bar{\Pi}_\sigma^{n+1}(u)\| \le r\exp\{-n(\varrho_{i_{\sigma+1}} - \varrho_{i_j} - \varepsilon)\}\|u\|$

(**) $\|\bar{\Pi}_j^{n+1}(u)\| \le r\exp\{-n(\varrho_{i_{j+1}} - \varrho_{i_j} - \varepsilon)\}\|u\|$

(***) $\|\bar{\Pi}_{j+1}^{n+1}(u)\| \le r\exp\{-n(\varrho_{i_{j+2}} - \varrho_{i_j} - \varepsilon)\}\|u\|$

2. lemma

$u \in E_j^n$

$$\|\bar{\Pi}_{j+l}^{n+l}(u)\| \le K_{l+1}\exp\{-n(\varrho_{i_{j+l+1}} - \varrho_{i_j} - (l+1)\varepsilon)\}\|u\| \qquad 0 \le l$$

biz.:

$l=0$ $\quad k=1$ az előző volt... kész

$l=0$ $\quad k=2$:

$u \in E_j^n$ $\quad \|u\|=1$

$$\bar{\Pi}_j^{n+2} = \bar{\Pi}_j^{n+2} \circ \bar{\Pi}_j^{n+1} + \bar{\Pi}_j^{n+2} \circ \Pi_j^{n+1}$$

$$\|\overline{\Pi}_j^{n+2} u\| \le \|\overline{\Pi}_j^{n+1} u\| + \|\overline{\Pi}_j^{n+2}(\Pi_j^{n+1} u)\| \le$$

$$\le r\exp\{-n(\rho_{i_{j+1}}-\rho_{i_j}-\varepsilon)\} + r\exp\{-(n+1)(\rho_{i_{j+1}}-\rho_{i_j}-\varepsilon)\}$$

$l=0 \quad k=3$

$$\overline{\Pi}_j^{n+3} = \overline{\Pi}_j^{n+3}\circ\overline{\Pi}_j^{n+1} + \overline{\Pi}_j^{n+3}\circ\Pi_j^{n+1} =$$

$$= \overline{\Pi}_j^{n+3}\circ\overline{\Pi}_j^{n+1} + \overline{\Pi}_j^{n+3}\circ\overline{\Pi}_j^{n+2}\circ\Pi_j^{n+1} + \overline{\Pi}_j^{n+3}\circ\Pi_j^{n+2}\circ\Pi_j^{n+1}$$

$l=1 \quad k=1$ (xxx) volt már

$l=1 \quad k=2$

$$H_j^n = \langle C_n^{-1} e_{i_j}, \dots, C_n^{-1} e_{i_{j+1}-1}\rangle$$

$$E_{j+1}^n = E_j^n \oplus H_j^n$$

$\Pi_{j+1}^n \quad \Pi_j^n \quad P_j^n$ a vetülete

$$\Pi_{j+1}^n = \Pi_j^n + P_j^n$$

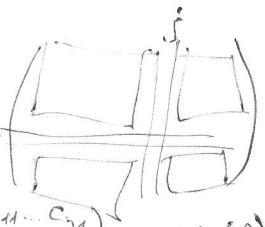
$$\overline{\Pi}_{j+1}^{n+2} = \underbrace{\overline{\Pi}_{j+1}^{n+2}\circ\overline{\Pi}_{j+1}^{n+1}}_{\text{ez már jó}} + \underbrace{\overline{\Pi}_{j+1}^{n+2}\circ\Pi_{j+1}^{n+1}}_{\text{(xx) abból lesz:}}$$

$$\underbrace{\overline{\Pi}_{j+1}^{n+2}\circ\underbrace{\Pi_j^{n+1}}_{\in E_j^{n+1}}}_{\text{(xxx) segítségével}} + \overline{\Pi}_{j+1}^{n+2}\circ\underbrace{P_j^{n+1}}_{\in E_{j+1}^{n+1}} \qquad \|P_j^{n+1}u\| \le \|\overline{\Pi}_j^{n+1}u\|$$

(xx) kétszer: egyszer j-vel
egyszer j helyett $j+1$-gyel
kiesik: ~~egy ad~~ a felesleges tag

mátrix invertálása

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\det$$



$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) \qquad \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} = \operatorname{Adj}(A)$$

$$a^{-1}_{ij} = \frac{1}{\det(A)} \sum_{\substack{\psi \text{ perm. } \{1,\dots,r\} \\ \psi(j)=i}} \pm \prod_{l\ne j} a_{l,\psi(l)}$$

$$\rho_1 \le \rho_2 \le \dots \le \rho_r$$

$$\underbrace{i_1 \dots i_2-1}_{\rho_{i_1}} \quad \underbrace{i_2 \dots i_3-1}_{\rho_{i_2}} \quad \dots \quad \underbrace{i_j \dots i_{j+1}-1}_{\rho_{i_j}}$$

$i_j \le j \le i_{j+1}-1 \qquad \rho_j = \rho_{i(j)}$

$f(j) := j$

lemma: legyen B egy ortogonális $r\times r$ mátrix

tfh $|b_{ij}| \le \frac{\alpha_{f(i)}}{\alpha_{f(j)}}$, ahol $0<\alpha_1<\dots<\alpha_s$

ekkor $|B^*_{ij}| = |b^{-1}_{ij}| = |b_{ji}| \le (r-1)!\,\frac{\alpha_{f(i)}}{\alpha_{f(j)}}$

biz.:

$|\det(B)| = 1$

ha ψ egy permutációja $\{1,\dots,r\}$-nek: $\psi(j)=i$

$\exists\, q=q(\psi)$: $i, \psi(i), \dots, \psi^{q-1}(i), \psi^q(i)=j$

$$\prod_{k\neq j} |b_{k,\psi(k)}| \le \cancel{\prod_{h=0}^{q-1} |b_{\psi^h(i)}|} \prod_{h=0}^{q-1} |b_{\psi^h(i),\psi^{h+1}(i)}| = |b_{i,\psi(i)}|\cdot|b_{\psi(i),\psi^2(i)}|\cdots|b_{\psi^{q-1}(i),\psi^q(i)}|$$

$$\le \frac{\alpha_{f(i)}}{\alpha_{f(\psi(i))}}\cdot\frac{\alpha_{f(\psi(i))}}{\alpha_{f(\psi^2(i))}}\cdots\frac{\alpha_{f(\psi^{q-1}(i))}}{\alpha_{f(\psi^q(i))}}$$

$1\le i\le r$, $1\le j\le r$

b_{ij}: $C_n^{-1}e_i$ merőleges vetülete $C_{n+k}^{-1}e_j$-re

$$b_{ij} = \langle C_n^{-1}e_i, C_{n+k}^{-1}e_j\rangle = \langle e_i, \underbrace{C_n C_{n+k}^{-1}}_{B \text{ ortogonális}} e_j\rangle$$

b^*_{ij}: $C_{n+k}^{-1}e_i$ vetülete $C_n^{-1}e_j$-re

$$\langle C_{n+k}^{-1}e_i, \underbrace{C_n^{-1}}_{C_n^*}e_j\rangle = \langle \underbrace{C_n C_{n+k}^{-1}}_{B} e_i, e_j\rangle = \underbrace{\langle e_i, B^* e_j\rangle}_{b^*_{ij}}$$

csak $i<q$ érdekes, a konklúzió a többi esetre triviálisan teljesül

(ezentúl p,q-nak hívjuk őket)

$p<q$, sőt $f(p)<f(q)$

$|b_{p,q}|$:

$C_n^{-1}e_p \in E^n_{f(p)}$, tehát $\in E^n_j \Rightarrow j=f(p)$

$C_{n+k}^{-1}e_q \in E^{n+k}_{f(q)}$, és $\notin E^{n+k}_{f(q)-1} \Rightarrow j+l=f(q)-1$

$E^n_j = \{C_n^{-1}e_1,\dots,C_n^{-1}e_{i_{j+1}-1}\}$

$\bar{E}^n_j = \{C_n^{-1}e_{i_{j+1}},\dots,C_n^{-1}e_{i_j}\}$

$H^n_j = \{C_n^{-1}e_{i_j},\dots,C_n^{-1}e_{i_{j+1}-1}\}$

$E^n_j = H^n_{j-1} \oplus E^n_{j-1}$

$b_{p,q}$: $\underset{\in E^n_{f(p)}}{C_n^{-1}e_p}$ vetülete $\underset{\in \bar{E}^{n+k}_{f(q)-1}}{C_{n+k}^{-1}e_q}$ $\Rightarrow |b_{p,q}| \le \|\overline{\Pi}^{n+k}_{f(q)-1}(u)\| \le$

$$\le \exp\left\{-n\left(\varrho_{f(q)} - \varrho_{f(p)} - (f(q)-f(p))\varepsilon\right)\right\}$$

$\alpha_h = \exp\{n(\varrho_{i_h} - h\varepsilon)\}$ választással az előző

éppen $= \dfrac{\alpha_{f(p)}}{\alpha_{f(q)}}$

$b^*_{p,q}$ $C_{n+k}^{-1} e_p$ vetülete $C_n^{-1} e_q$-ra

alkalmazzuk ezt $p \le i_{j+1}-1$-re és $q \ge i_{j+1}$-re

ha $v \in E_j^{n+k}$, akkor $v = v_n' + v_n''$, ahol $v_n' \in E_j^n$ és $v_n'' \in \overline{E}^j$,

továbbá ha $v_n'' = \sum_{j=i_j+1}^{r} \gamma_{j,n} C_n^{-1} e_j$, akkor

$|\gamma_{j,n}| \le \exp\{-n(\varrho_j - \varrho_{i_j} - r\varepsilon)\}$ $\forall \varepsilon$ egyenletesen

igaz $v \in C_{ij}$-re is

ha $j < i_{j+1}$

$\frac{1}{n}\log\|P_n \cdot C_n^{-1} e_j\| = \frac{1}{n}\log\|d_n(j,j)\| \longrightarrow \varrho_j \le \varrho_{i_j}$

$i_j+1 \le j$

$\frac{1}{n}\log\left(\|P_n C_n^{-1} e_j\| \cdot |\gamma_{j,n}|\right) = \frac{1}{n}\log|\gamma_{j,n}| + \underbrace{\frac{1}{n}\log\|P_n C_n^{-1} e_j\|}_{\downarrow\, \varrho_j} \le$

γ-ból

$\le -\varrho_j + \varrho_{i_j} + r\varepsilon + \varrho_j$

a növekedési ütem ezek limsupjának maximuma, ϱ_{i_j}

$v \in C_{ij}$ $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\|P_n v\| \le \varrho_{i_j}$

$v \notin C_{ij}$ ha n nagy, akkor $\|\pi_j^n v\| > c > 0$

$\{C_n^{-1} i_{j+1}, \dots, C_n^{-1} i_r\}$-re vett vetület

valamelyik ezek közül nagy ($> c'$)

$\|P_n v\| \ge c' \underbrace{\|P_n C_n^{-1} e_j\|}_{d_n(j,j)}$

~~$\liminf_{n\to\infty} \|P_n v\| \ge \liminf_{n\to\infty}$~~ $\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\|P_n v\| \ge \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log c' d_n(j,j) \ge$

$\ge \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log d_n(j,j) \ge \varrho_{i_j+1}$

ugyanezt ~~$\forall$~~ $v \in C_{ij} - C_{ij-1}$-re alkalmazva $\ge \varrho_{i_j}$