

Tartalomjegyzék

1. Dinamikus rendszerek	3
1.1. Példák hiperbolikus halmazokra	3
1.1.1. Lineáris leképezések dinamikája a síkon és a térben. .	3
1.1.2. Smale-Patkó	5
1.1.3. A tórusz hiperbolikus autómorfizmusai	10
1.1.4. Attraktorok, repellerek	14
1.2. Termodinamikai formalizmus	21
1.2.1. Mértékelméleti alapok, a fejezetben használt jelölések	21
1.2.2. mértékelméleti entrópia	23

1. fejezet

Dinamikus rendszerek

Ebben a fejezetben a sima dinamikai rendszerek elméletének alapjaival ismerkedünk meg. A fejezet elején a Devaney [3] könyv II. fejezete szerint haladunk. Ezután a Pollicott [11] könyve és a klasszikus Bowen könyv [1] lesznek a fő referenciák.

1.1. Példák hiperbolikus halmazokra

Először a síkban és a térben ún. hiperbolikus leképezésekre látunk példákat. Ezek némelyikét már az előző félévi [12] előadáson is látták, mi azonban itt megismételjük.

1.1.1. Lineáris leképezések dinamikája a síkon és a térben.

1. DEFINÍCIÓ: Egy invertálható lineáris leképezés *hiperbolikus* ha nincs egy abszolút értékű sajátértéke.

1. LEMMA: Legyen $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés, melynek minden sajátértéke abszolút értékben egynél kisebb. Ekkor, $\lim_{n \rightarrow \infty} L^n(x) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}^3$.

Bizonyítás: Házi feladat.

Ha az L összes sajátértéke nagyobb mint egy, akkor a fenti állítás igaz lesz L helyett L^{-1} .

Tehát a hiperbolikus lineáris leképezések közül csak azok érdekesek melyekre vannak egynél nagyobb és egynél kisebb sajátértékek is.

2. LEMMA: Legyenek $\lambda_i, i = 1, \dots, 3$ az L lineáris leképezés saját értékei. Tegyük fel, hogy $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$ és $|\lambda_3| > 1$. Ekkor létezik egy W^s sík és egy W^u egyenes, melyekre:

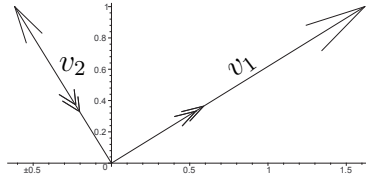
1. ha $x \in W^s$, akkor $L(x) \in W^s$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} L^n(x) = 0$,
2. ha $x \in W^u$, akkor $L(x) \in W^u$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} L^{-n}(x) = 0$
3. ha $x \notin W^u \cup W^s$, akkor $\lim_{n \rightarrow \pm \infty} |L^n(x)| \rightarrow \infty$

Bizonyítás. Alkalmas bázisban az L reprezentálható $L(x) = A \cdot x$ alakban, ahol az A mátrix alakja

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \text{ vagy } \begin{pmatrix} \lambda_1 & c & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

ahol $c = 0$ kivéve amikor $\lambda_1 = \lambda_2$. Ekkor W^s az xy sík és W^u a z egyenes (a választott koordináta rendszerben melyben L a fenti alakban reprezentálható). A tétel állítása Lemma 1-ből adódik. ■

1. PÉLDA: Legyen $L \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.



1.1. ábra. A macska automorfizmus sajátvektorai

A sajátértékek és sajátvektorok: $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\mathbf{v}_1 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1)$ és $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\mathbf{v}_2 = (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1)$. Tehát a $W^u(0)$ és a $W^s(0)$ az origón átmenő $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ irányvektorú egyenesek (l. 1.1. ábra).

2. DEFINÍCIÓ: Legyen $f : X \rightarrow X$. Azt mondjuk, hogy az f kaotikus a X -en ha

1. f érzékenyen függ a kezdeti feltételtől. Azaz $\exists \delta > 0$, úgy hogy $\forall x \in X$ tetszőleges V környezetében létezik olyan $y \in V$, amelyre $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$ teljesül.
2. f topológikusan tranzitív, vagyis létezik olyan $x \in X$ melynek $\{f^n(x)\}_{n=0}^\infty$ orbitja sűrű X -ben.
3. Az f periódikus pontjainak halmaza sűrű X -ben.

1. FELADAT: Igazoljuk, hogy $f : X \rightarrow X$ akkor és csak akkor topologikusan tranzitív, ha $\forall U, V \subset X$ nem üres nyílt halmazokhoz választhatunk olyan $n \in \mathbb{N}$ -et, melyre: $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

A következőkben néhány példát látunk kaotikus leképezésekre.

1.1.2. Smale-Patkó

Ez volt az első olyan diffeomorfizmus, amelynek végtelen sok periodikus pontja van, de mégis strukturálisan stabil (ez azt jelenti, hogy kis perturbációval kapott leképezés konjugált a Smale-patkóhoz, tehát azonos a dinamikája). A leképezést az 1.2 ábrán látható módon definiáljuk. Legyen S a stadion alakú értelmezési tartomány téglalap része, vagyis: $S := \cup_{i=1}^5 T_i$, továbbá legyen $Q := S \cup D_1 \cup D_2$. Ekkor mint látható $f(D_i) \subset D_1, i = 1, 2$. Vagyis minden $D_1 \cup D_2$ -beli pont orbitja egy a D_1 -ben található fix ponthoz tart. Jelöljük ezt a D_1 -beli fix pontot P -vel. Ekkor, ha egy $x \in Q$ pontra $\exists n$ úgy hogy $f^n(x) \in D_1 \cup D_2$ -ben, vagyis ha $f^n(x) \notin S$, akkor az x orbitja ugyancsak P -hez tart. Érdekes csak azoknak a pontoknak a orbitja lehet, melyekre $f^n(x) \in S$ teljesül minden n -re. Ez ekvivalens azzal, hogy

$$\Lambda^+ := \{x \in S : f^n(x) \in T_1 \cup T_2 \text{ minden } n \in \mathbb{N}\}. \quad (1.1)$$

Másrészt S -nek csak olyan pontjait tekintünk, amelyekre minden n -re létezik az $f^{-n}(x)$. Legyen tehát

$$\Lambda^- := \{x \in S : f^{-n}(x) \text{ létezik}\} \quad (1.2)$$

Vagyis összegyűjtjük azokat a pontokat, amelyek orbitja nem konvergál P -hez (Λ_1) és amelyeknek korlátlanul vehetjük akárhány szoros inverz képét (Λ_2) és az így kapott halmazt nevezzük Smale-patkónak:

$$\Lambda := \Lambda_1 \cap \Lambda_2. \quad (1.3)$$

Először is vegyük észre, a definícióból azonnal következik, hogy $\forall x \in \Lambda$ -ra $f(x) \in \Lambda$ és $f^{-1}(x) \in \Lambda$. Ezért

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n \Lambda. \quad (1.4)$$

Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy f a T_2 és a T_4 tartományokon affine leképezés, melynek mátrixa az xy (az S oldalaival párhuzamos) koordináta rendszerben diagonális.

2. FELADAT: Mutassuk meg, hogy Λ_1 az x tengelyen fekvő valamely Λ' Cantor halmaznak és az S téglalap függőleges oldalát képező intervallumnak a szorzata.

3. FELADAT: Mutassuk meg, hogy Λ_2 az S téglalap vízszintes oldalát képező intervallumnak és valamely Λ'' az y tengelyen fekvő Cantor-halmaznak a szorzata.

A fenti két feladat értelmében kapjuk, hogy $\Lambda = \Lambda' \times \Lambda''$. Vagyis Λ egy olyan síkbeli Cantor-halmaz, amely két egyenesen fekvő Cantor-halmaznak a szorzata.

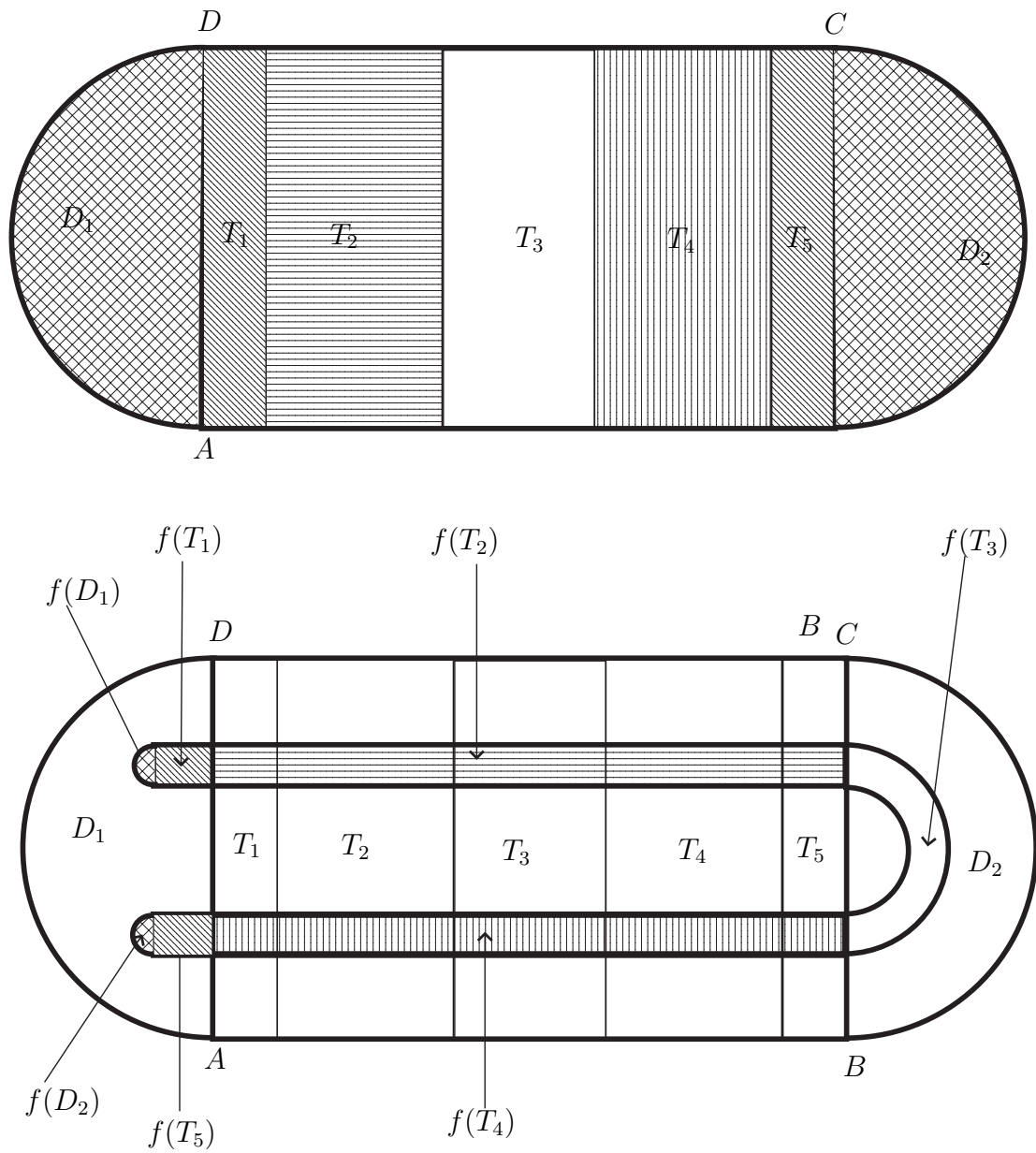
4. FELADAT: Rajzoljuk le $f^2(S)$ -et és $f^{-2}(S)$ -et.

Szimbolikus dinamika

Legyen $\Sigma := \{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$. A Σ elemeit $\mathbf{i} = (\dots i_{-1} \cdot i_0 i_1 i_2 \dots)$ -vel fogjuk jelölni. A pont azt jelenti, hogy azután következik a 0-ik helyen álló érték. A Σ -án a szorzat topológiát használjuk. Ezt generálja a $d(\mathbf{i}, \mathbf{j}) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|i_k - j_k|}{2^{|k|}}$ távolság.

A Σ -án a balra tolást σ -val jelöljük. Vagyis

$$\sigma(\dots i_{-1} \cdot i_0 i_1 i_2 \dots) := (\dots i_{-1} i_0 \cdot i_1 i_2 \dots). \quad (1.5)$$



1.2. ábra. Smale patkó leképezés

Ily módon $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ homeomorfizmus. A továbbiakban a célunk az lesz, hogy megtaláljunk egy olyan $\Pi : \Sigma \rightarrow \Lambda$ folytonos (lehetőleg bijektív) leképezést melyre

$$f = \Pi \circ \sigma \circ \Pi^{-1}. \quad (1.6)$$

Ha ilyen Π létezik, akkor az f dinamikáját megérthetjük a Σ szimbolikus téren a σ bal shift dinamikájának tanulmányozása révén. Az egyszerűbb jelölés kedvéért a 1.2 ábrán látható T_2 és T_4 tartományokat nevezzük el V_1 -nek és V_2 -nek. Az $H_1 := f(V_1)$ és $H_2 := f(V_2)$. Továbbá:

$$V_{i_0 \dots i_m} := \bigcap_{n=0}^m f^{-n} V_{i_n} \quad \text{és} \quad H_{j_1 \dots j_n} := f^n V_{j_n \dots j_1}.$$

Vagyis, ha $x \in V_{i_0 \dots i_m}$, akkor $x \in V_{i_0}$ és $0 \leq k \leq m$ lépés múlva V_{i_k} -ban lesz. Hasonlóan, ha $x \in H_{j_1 \dots j_n}$, akkor $f^{-k}(x) \in V_{i_k}$ minden $1 \leq k \leq n$. Legyen $S_{i_{-n} \dots i_{-1} \cdot i_0 i_1 \dots i_m} := H_{i_{-1} \dots i_{-n}} \cap V_{i_0 \dots i_m}$. Ekkor a következő állítások definícióból azonnal adódnak:

- (i) $S_{i_{-(n+1)} \dots i_{-1} \cdot i_0 i_1 \dots i_{n+1}} \subset S_{i_{-n} \dots i_{-1} \cdot i_0 i_1 \dots i_n}$
- (ii) Bármely $\mathbf{i} \in \Sigma$ -ra, a $S_{i_{-n} \dots i_{-1} \cdot i_0 i_1 \dots i_m}$ téglalap mindkét oldala exponenciálisan tart nullához.
- (iii) $f(S_{i_{-n} \dots i_{-1} \cdot i_0 i_1 \dots i_m}) = S_{i_{-n-1} \dots i_{-1} \cdot i_0 i_1 \dots i_{m-1}}$.

A fenti (i) és (ii)-ből azonnal következik, hogy a

$$\Pi(\mathbf{i}) := \bigcap_{n \geq 0} S_{i_{-n} \dots i_{-1} \cdot i_0 i_1 \dots i_n}$$

jól definiált és (iii)-ből következik, hogy (1.6) teljesül.

3. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy x az f -nek n -ed rendű fixpontja, ha $f^n(x) = x$ teljesül. Azt mondjuk, hogy az x egy n -ed rendű periodikus pont, ha az $f^n(x) = x$ és minden $0 < k < n$ -re $f^k(x) \neq x$.

5. FELADAT: Hány n -ed rendű fixpontja van a fenti patkó leképezésnek?

A következőkben definiáljuk a stabil és instabil sokaságokat.

4. DEFINÍCIÓ: Legyen $x \in \Lambda$ tetszőleges. Az x stabil sokasága

$$W^s(x) := \{z : |f^n(z) - f^n(x)| \rightarrow 0 \text{ amint } n \rightarrow \infty\}.$$

Továbbá, az x instabil sokasága:

$$W^u(x) := \{z : |f^{-n}(z) - f^{-n}(x)| \rightarrow 0 \text{ amint } n \rightarrow \infty\}.$$

Vegyük észre, hogy ha $f^k(x)$ és $f^k(y)$ azonos függőleges egyenesen vannak, akkor $x \in W^s(y)$.

6. FELADAT: Igazoljuk, hogy ha $x = \Pi(\mathbf{i})$, akkor

$$W^s(x) = \{\Pi(\mathbf{j}) : \exists k \text{ úgy hogy: } i_\ell = j_\ell \forall \ell \geq k\}.$$

7. FELADAT: Konstruáljunk egy olyan pontot melynek orbitja sűrű a Λ -ban.

8. FELADAT: Igazoljuk, hogy a periodikus pontok halmaza sűrű Λ -ban.

5. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy az x pont homoklinikus a p fixpont-hoz, ha $x \neq p$ és $x \in W^s(p) \cap W^u(p)$.

Határozzuk meg azon $\mathbf{i} \in \Sigma$, melyekre $\Pi(\mathbf{i})$ homoklinikus a $P_1 := \Pi(\dots 111 \dots)$ periodikus ponthoz!

9. FELADAT: Igazoljuk, hogy a P_1 -hez homoklinikus pontok halmaza sűrű Λ -ban.

Tekintsük a 1.3. ábrán geometriailag definiált leképezést. Itt is feltesszük, hogy f minden T_i -n, ahol $i \in \{2, 4, 6\}$ egy-egy affinitással van adva, melynek mátrixa daigonális az xy koordináta rendszerben.

Legyen

$$B = [b_{ij}]_{\{i,j=1,\dots,3\}},$$

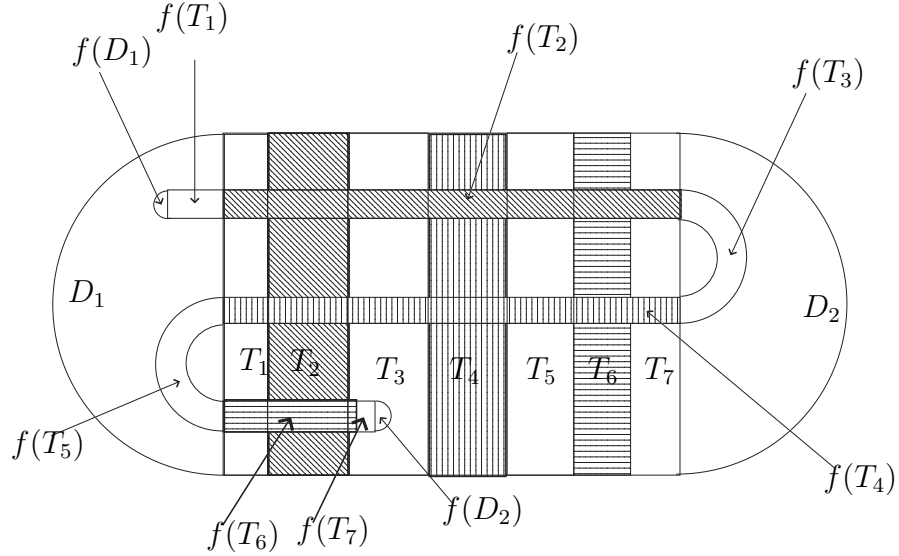
továbbá

$$\Sigma_B := \left\{ \mathbf{i} \in \{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}} : b_{i_k i_{k+1}} = 1 \right\}. \quad (1.7)$$

Továbbá legyen σ a balra tolás Σ_A -n.

10. FELADAT: Írjuk le a Λ invariáns halmaz pontos definícióját, majd definiáljuk a $\Pi : \Lambda \rightarrow \Sigma_B$ a Smale-patkóra ismertetett módszer szellemében. Bizonyítsuk be, hogy

$$f = \Pi \circ \sigma \circ \Pi^{-1}. \quad (1.8)$$



1.3. ábra. Bonyolultabb patkó leképezés.

1.1.3. A tórusz hiperbolikus autómorfizmusai

A $T := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ halmazt tórusznak hívjuk. A tóruszt tekinthetjük mint $S^1 \times S^1$. $\mathbb{R}^2$ -ből a T -re való természetes vetítést Π -nek nevezzük.

6. DEFINÍCIÓ: Legyen az $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció mátrixa a természetes bázisban az A mátrix. Vagyis: $L(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$. Feltesszük, hogy a 2×2 -es A mátrix eleget tesz a következő három követelménynek: Legyen A egy olyan 2×2 mátrix, melyre:

1. A minden eleme egész szám,
2. $|\det(A)| = 1$,
3. A hiperbolikus (saját értékeinek abszolút értéke 1-től különbözik).

Ekkor az

$$L_A := \Pi \circ L \tag{1.9}$$

leképezést a Tórusz hiperbolikus automorfizmusának hívjuk.

Ekkor persze $L_{A^{-1}}$ szintén a tórusz hiperbolikus automorfizmusa. Továbbiakban mindig feltesszük, hogy A teljesíti a fenti feltételeket.

11. FELADAT: Igazoljuk, hogy L_A periodikus pontjainak halmaza sűrű T -ben.

12. FELADAT: Igazoljuk, hogy A sajátértékei valósak és az egyik sajátérték abszolút értékben 1-nél kisebb, a másik pedig 1-nél nagyobb.

Ekkor tehát mint láttuk 2. Lemmában az L lineáris leképezésre a $W^s(0)$ és $W^u(0)$ halmazok, origón áthaladó egyenesek. Legyen $P \in T$. Nevezzük l_s -nek és l_u -nak a P -n átmenő $W^s(0)$ -val és $W^u(0)$ -val párhuzamos egyeneseket.

13. FELADAT: Igazoljuk, hogy a T -n $W^s(P)$ és $W^u(P)$ egyenlő $\Pi \circ l^s$ és $\Pi \circ l^u$ -val.

3. LEMMA: $W^s(P)$ és $W^u(P)$ sűrű minden $P \in T$ -ben.

A bizonyítást feladatokban foglaljuk össze:

14. FELADAT: Az L leképezésre $W^s(0)$ egy olyan egyenes, melynek meredeksége irracionális.

15. FELADAT: Legyen (x_j, j) the metszés pontja $W^s(0)$ -nak az $y = j$ egyenessel és legyen $(\alpha_j, 0) := \Pi(x_j, j)$. Ekkor tehát $0 \leq \alpha_j < 1$. Igazoljuk, hogy α_j -t megkaphatjuk mint a 0-nak S^1 -en valamely irracionális értékkel való j -szeres eltolását.

16. FELADAT: Fejezzük be innen 3. Lemma bizonyítását!

7. DEFINÍCIÓ: Legyen $P \in T$ egy periodikus pontja L_A -nak és $Q \in T$ egy homoklinikus pont a P -hez. Ha $W^s(P)$ és $W^u(P)$ transzverzálisan metsz Q -ban, akkor azt mondjuk, hogy Q egy transzverzális homoklinikus pont.

17. FELADAT: Igazoljuk, hogy a 0-hoz tartozó transzverzális homoklinikus pontok halmaza sűrű.

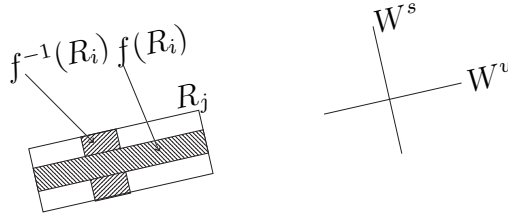
4. LEMMA: L_A topológikusan tranzitív.

Bizonyítás. Legyenek $U, V \subset T$ nem üres nyílt halmazok. A célunk az, hogy találjunk olyan m -et, amire $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$. Válasszunk $R \in U$ és $S \in V$ homoklinikus pontokat (ez 17). feladat miatt megtehető). Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ -át. Legyenek $I_u \subset W^u(0)$ és $I_s \subset W^s(0)$ szakaszok melyeknek hossza 2δ , középpontja R és S továbbá bent vannak U , ban illetve V -ben.

Vegyük észre, hogy L_A^n nyújtja I_u -t $|\lambda_u|^n$ -en szeresére és L_A^{-n} nyújtja I_s -et szintén $|\lambda_u|^n$ -szeresére. Válasszuk n -et olyan nagyra, hogy $|\lambda_u|^n \delta > \varepsilon$, $\text{dist}(L_A^n(R), 0) < \frac{\varepsilon}{2}$ és $\text{dist}(L_A^{-n}(S), 0) < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesüljenek. Ekkor $L_A^n(I_u) \cap L_A^{-n}(I_s) \neq \emptyset$. Legyen $C \in L_A^n(I_u) \cap L_A^{-n}(I_s)$. Ekkor $D := L_A^{-n}(C) \in I_u \subset U$ továbbá a definícióból: $L_A^{2n}(D) \in V$. ■

18. FELADAT: Igazoljuk, hogy az L_A leképezés kaotikus.

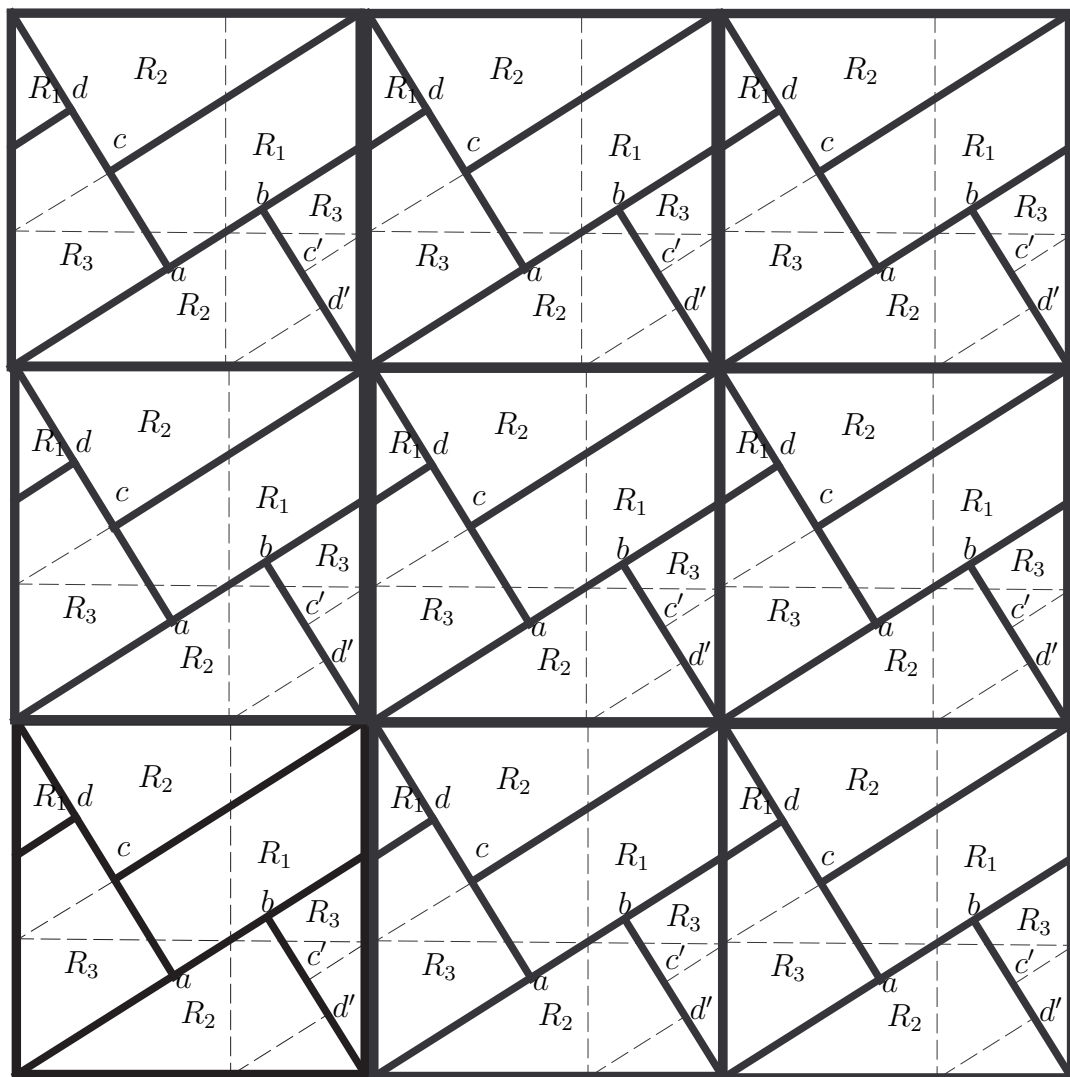
A szimbolikus dinamika felépítéséhez szükség van a Markov particióra. Mielőtt megadnánk a Markov partició általános definícióját, megmutatjuk mi a Markov partició, L_A -ra, abban a speciális esetben amikor $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Az $L(x) = A \cdot x$ leképezésre a W^s és W^u stabil és instabil egyenesek: $y = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})x$, $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x$. A megfelelő sajátértékek: $\lambda_s = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ és $\lambda_u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ekkor T Markov particiója a T -nek egy olyan felosztása diszjunkt belső részekkel rendelkező téglalapokra, melyek oldalai stabil és instabil egyenesek a következő tulajdonságokkal:



1.4. ábra. $f(R_i) \cap R_j$ és $f^{-1}(R_i) \cap R_j$, metszetek ha nem üresek, akkor így néznek ki, ahol R_i és R_j Markov osztályok.

1. Ha R_i, R_j a Markov partició két osztálya és $f(R_i) \cap R_j \neq \emptyset$, akkor $f(R_i) \cap R_j$ az R_j egyik stabil falától a másik stabil faláig terjed.
2. Ha R_i, R_j a Markov partició két osztálya és $f^{-1}(R_i) \cap R_j \neq \emptyset$, akkor $f^{-1}(R_i) \cap R_j$ az R_j egyik instabil falától a másik stabil faláig terjed.

A 1.5. ábrán látható a Markov partició konstrukciója. Az ábrán látható egyenesek az origón áthaladó stabil és instabil egyenesek. Ezek az ábrán látható módon határolják az $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, R_3\}$ Markov partició osztályait. A 1.6. ábrán láthatjuk az $f(R_1)$ téglalapot sraffozva.

1.5. ábra. $f(b) = d$ és $f(a) = b$ $c' = f(c)$, $d' = f(d)$

19. FELADAT: Legyen $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ és $\Sigma_B := \left\{ \mathbf{i} \in \{1, 2\}^{\mathbb{Z}} : B_{i_k i_{k+1}} = 1, \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Definiáljuk a $\Pi : \Sigma_B \rightarrow \Lambda$ természetes projekciót, amire

$$L_A = \Pi \circ \sigma \circ \Pi^{-1}.$$

teljesül!

1.1.4. Attraktorok, repellerek

8. DEFINÍCIÓ: Egy Λ halmazt az F leképezés attraktorának hívunk, ha $\exists \Lambda \subset V$ nyílt halmaz úgy, hogy

1. $F(\overline{V}) \subset V$
2. $\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^n(V)$.

20. FELADAT: Igazoljuk, hogy ha Λ az F 1 – 1 értelmű leképezés attraktora, akkor $\Lambda = F^{-1}(\Lambda) = F(\Lambda)$, vagyis a Λ invariáns halmaz.

21. FELADAT: Igaz-e, hogy a Smale-patkó attraktor?

Most néhány példát látunk attraktorokra.

Szolenoid

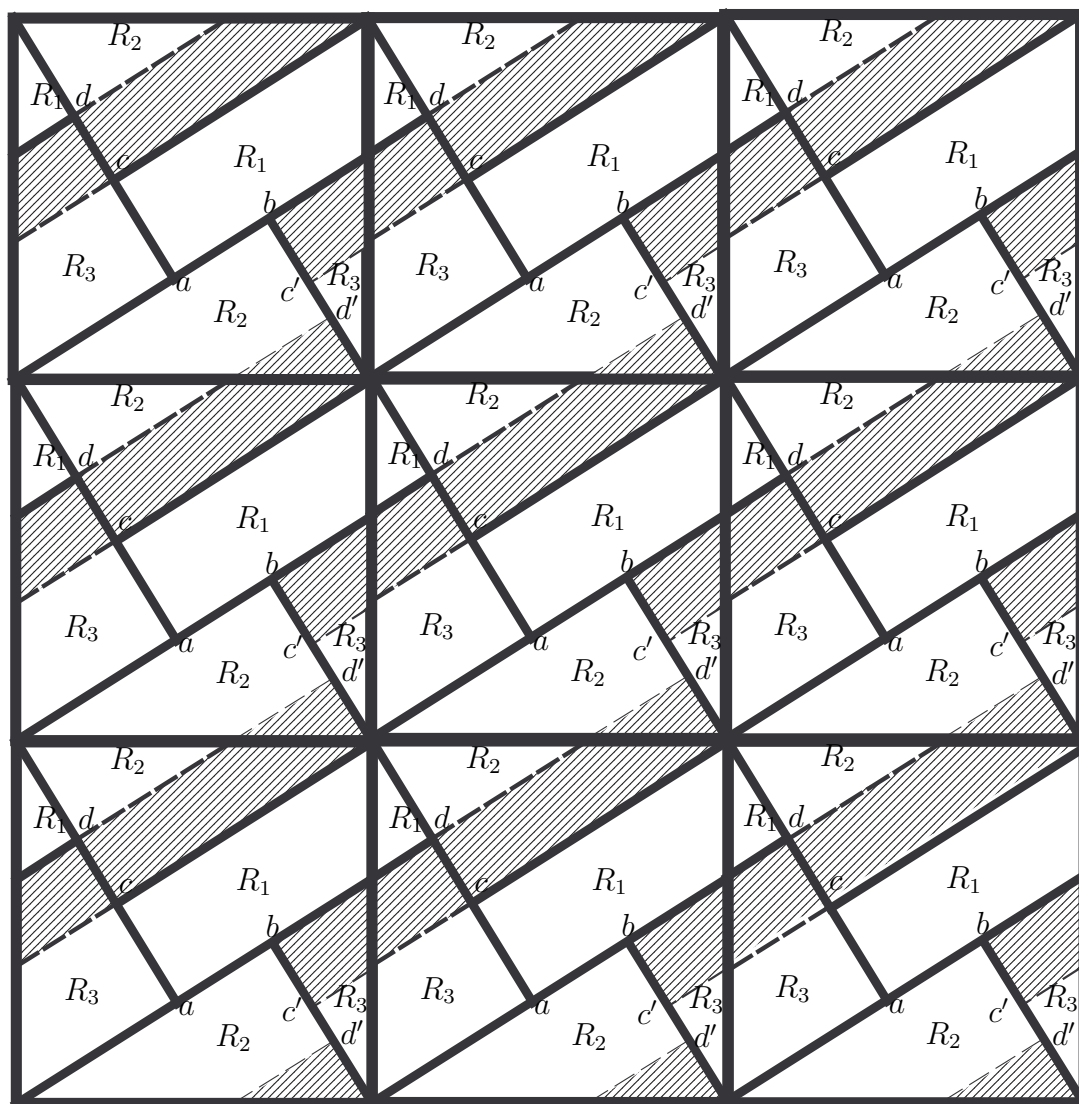
Legyen $T := S^1 \times D$, ahol $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$$f(t, x, y) = \left(2t \pmod{1}, \lambda_1 x + \frac{1}{2} \cos(2\pi t), \lambda_2 y + \frac{1}{2} \sin(2\pi t) \right), \quad (1.10)$$

ahol $0 < \lambda_2 < \lambda_1 \leq \frac{1}{2}$.

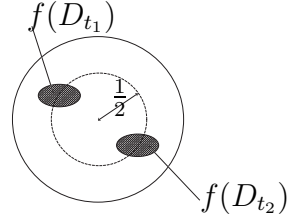
22. FELADAT: Igazoljuk, hogy $f : T \rightarrow \text{int}(T)$, 1 – 1 értelmű leképezés.

Itt persze f -et nem az Descartes koordináta rendszerben adtuk meg a fenti formulával, hanem $S^1 \times D$ -n. Legyen $\theta \in S^1$. A T tórusz θ -szekciója a $D_\theta := \{(t, x, y) \in T : t = \theta\}$. Az egyszerűség kedvéért bevezetjük a $g : S^1 \rightarrow S^1$, $g(\theta) := 2\theta \pmod{1}$ jelölést. Ahhoz, hogy el képzeljük a $f(T)$ halmazt elég megértenünk azt, hogy $f(T) \cap D_\theta$ hogy néz ki. Legyenek $t_1, t_2 \in S^1$ a $g^{-1}(\theta)$ halmaz elemei. Ekkor $f(T) \cap D_\theta = f(D_{t_1}) \cup f(D_{t_2})$. Az nyilvánvaló, hogy az $f(D_{t_1})$ halmazok D_θ -beli tömör λ_1 és λ_2 féltengelyű ellipszisek,

1.6. ábra. $f(R_1)$ a sátirozott terület, $b' = d$ és $a' = b$

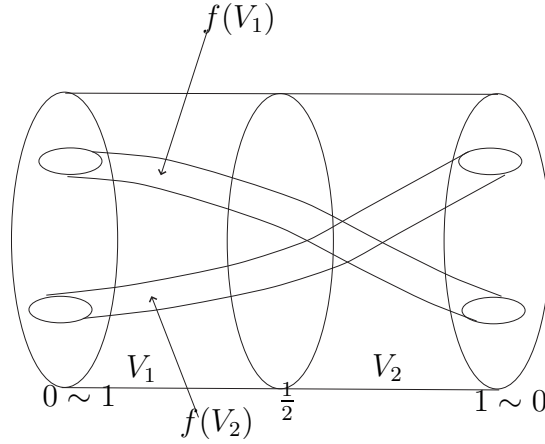
melyek középpontjai a D_θ középpontja körüli $\frac{1}{2}$ sugarú kör valamely átellenes pont párja. l. 1.7. ábra.

Ha S^1 -et úgy képzeljük el mint $[0, 1]$ -et, ahol a 0-át és az 1-et azonosítjuk, akkor T egy tömör henger aminek a határoló körlemezeit azonosítottuk.

1.7. ábra. $f(T) \cap D_\theta$, ha $g(t_i) = \theta$, $i = 1, 2$

Legyen $V_1 := [0, \frac{1}{2}) \times D$ és $V_2 := [\frac{1}{2}, 1) \times D$. Ekkor mind $f(V_1)$ mind $f(V_2)$ a henger határoló körlemezeit összekötő ellipszis keresztmetszetű tömör csövek

1. 1.8 Az $f(T)$ és $f^2(T)$ a Descartes koordináta rendszerben a ???. ábrán

1.8. ábra. $f(T)$, egy másik koordináta rendszerben.

látható.

Markov partíció Szolenoidra, szimbolikus dinamika

Csak úgy mint a Smale-patkó esetén definiálunk egy $\Pi : \Sigma \rightarrow \Lambda$ természetes projekciót ahol $\Sigma := \{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$.

Legyen $H_1 := f(V_1)$ és $H_2 := f(V_2)$. Továbbá:

$$V_{i_0 \dots i_m} := \bigcap_{n=0}^m f^{-n} V_{i_n} \quad \text{és} \quad H_{j_1 \dots j_n} := f^n V_{j_n \dots j_1}.$$

Vagyis, ha $x \in V_{i_0 \dots i_m}$, akkor $x \in V_{i_0}$ és $0 \leq k \leq m$ lépés múlva V_{i_k} -ban lesz. Hasonlóan, ha $x \in H_{j_1 \dots j_n}$, akkor $f^{-k}(x) \in V_{i_k}$ minden $1 \leq k \leq n$. Legyen $S_{i_{-n} \dots i_{-1} \cdot i_0 i_1 \dots i_m} := H_{i_{-1} \dots i_{-n}} \cap V_{i_0 \dots i_m}$. Ekkor a következő állítások definícióból azonnal adódnak:

- (i) $S_{i_{-(n+1)} \dots i_{-1} \cdot i_0 i_1 \dots i_{n+1}} \subset S_{i_{-n} \dots i_{-1} \cdot i_0 i_1 \dots i_n}$
- (ii) Bármely $\mathbf{i} \in \Sigma$ -ra, a $S_{i_{-n} \dots i_{-1} \cdot i_0 i_1 \dots i_m}$ minden oldala exponenciálisan tart nullához.
- (iii) $f(S_{i_{-n} \dots i_{-1} \cdot i_0 i_1 \dots i_m}) = S_{i_{-n-1} \dots i_{-1} \cdot i_0 i_1 \dots i_{m-1}}$.

A fenti (i) és (ii)-ből azonnal következik, hogy a

$$\Pi(\mathbf{i}) := \bigcap_{n \geq 0} S_{i_{-n} \dots i_{-1} \cdot i_0 i_1 \dots i_n}$$

jól definiált és (iii)-ből következik, hogy (1.6) teljesül.

23. FELADAT: Igazoljuk, hogy $H_i \cap V_j \cap \Lambda$, ahol $i, j \in \{1, 2\}$ Markov partíciót alkot.

24. FELADAT: Konstruáljunk meg a szolenoid olyan Markov partícióját melyben az összes osztály mérete 0.01-nál kisebb!

Inverse limit space

Legyen $g : S^1 \rightarrow S^1$ mint fent. Definiáljuk

$$\Sigma := \{\Theta := (\theta_0, \theta_1, \dots) : \theta_j \in S^1 \text{ és } g(\theta_{j+1}) = \theta_j\}.$$

A Σ -án természetes módon definiálhatjuk a következő távolságot: legyen $\Theta = (\theta_0, \theta_1, \dots), \Psi = (\psi_0, \psi_1, \dots) \in \Sigma$, akkor

$$d(\Theta, \Psi) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|e^{2\pi i \theta_j} - e^{2\pi i \psi_j}|}{2^j}.$$

A balra tolás a Σ -án:

$$\sigma(\theta_0, \theta_1, \dots) := (g(\theta_0), \theta_0, \theta_1, \dots)$$

Most értelmezzünk egy $\Pi : \Sigma \rightarrow \Lambda$ természetes projekciót.

$$\Pi(\Theta) := \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(D_{\theta_n}).$$

25. FELADAT: Igazoljuk, hogy (1.6) teljesül erre a Π -re is.

Hénon attraktor

Legyen

$$f(x, y) := (1 + y - 1.4x^2, 0.3x)$$

és nevezzük Q -nak az $A = (-1.33, 0.42)$, $B = (1.32, 0.133)$, $C = (1.245, -0.14)$, $D = (-1.06, -0.5)$ négyszöget.

26. FELADAT: (a) Igazoljuk, hogy: $f(Q) \subset Q$!

(b) Legyen $x \in Q$. Rajzoljuk le számítógéppel a $\{f^n(x)\}_{n=1000}^{10000}$ halmazt!

Lozi attractor

Mivel a Hénon attraktor elmélete még távolról sem teljesen megértet, felmerült, annak az ötlete, hogy tekintsünk egy hasonló, de egyszerűbb leképezés attraktorát. Nevezetesen, legyen

$$L(x, y) := (1 + y - a|x|, bx),$$

ahol $0 < b < 1$, $b+1 < a$, $2a+b < 4$. vegyük észre, hogy itt a Hénon attraktor képletének x^2 -ét cseréltük ki $|x|$ -re. Legyen például $a = 1.7$ és $b = 0.5$. Ezen leképezés dinamikájáról a [13]-ben olvashatunk. A következőkben néhány feladaton keresztül ismerkedünk meg az attraktorról.

27. FELADAT: (a) Igazoljuk, hogy f -nek két fixpontja van közülük egyik az első síknegyedben. Nevezzük ezt P -nek.

(b) $W^u(P)$ tartalmaz egy olyan egyenest, melynek az x tengellyel vett Q metszetére igaz, hogy ezen egyenesnek az y -tengellyel vett metszete $L^{-1}(Q)$. Jelöljük ℓ -el az $\overline{L^{-1}(Q), Q}$ szakaszt.

(c) Rajzoljuk le $L(\ell)$ -et és $L^2(Q)$ -t.

(d) Legyen T az a háromszög, melynek csúcsai: $Q, L(Q), L^2(Q)$. Igazoljuk, hogy $L(T) \subset \text{int}(T)$.

(e) Computer segítségével rajzoljuk le a T valamely pontja orbitjának egy kellően nagy (de véges) darabját.

Keverő repellerek

egy példán keresztül illusztráljuk a keverő repellerek fogalmát majd megadjuk az általános definíciót.

2. PÉLDA: Legyen $f_a(x) = ax(1-x)$. Mint azt az már tudjuk ha $0 < a \leq 4$, akkor f_a a $[0, 1]$ intervallumot önmagába képezi. Azonban, ha $a > 4$, akkor $a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} > 1$ ezért vannak olyan pontok, melyeknek orbitja elhagyja a $[0, 1]$ intervallumot. Ha most nézzük azokat a pontok halmazát, amelyek az első lépésben a $[0, 1]$ -ben maradnak ez két zárt intervallum uniója. Legyenek ezek I_1, I_2 . Azok akik még a második lépés után is $[0, 1]$ -ben vannak már az $I_{i_1 i_2}$, $i_1 i_2 \in \{1, 2\}^2$ négy zárt intervallum uniójából állnak, melyekre $\cup I_{i_1 i_2} \subset \cup I_{i_1}$. Így azon pontok halmaza, akik még n -lépés után is a $[0, 1]$ -ben vannak 2^n darab intervallum uniójából áll $\cup_{i_1 \dots i_n} I_{i_1 \dots i_n}$. Ezen intervallumok mindegyikét tartalmazza valamelyik az $n-1$. lépésben definiált $I_{j_1 \dots j_{n-1}}$ intervallum. Azon pontok halmaza tehát, melyeknek orbitja sohasem hagyja el a $[0, 1]$ intervallumot egy Cantor halmaz:

$$\Lambda = \{x : f_a^n(x) \in [0, 1] \ \forall n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{i_1 \dots i_n} I_{i_1 \dots i_n}. \quad (1.11)$$

Vegyük észre, hogy ha

$$x \notin [0, 1], \text{ akkor } f^n(x) \rightarrow -\infty. \quad (1.12)$$

Ezért ha V egy tetszőleges nyílt intervallum ami tartalmazza $[0, 1]$ -et

$$\Lambda = \{x : f^n(x) \in V \ \forall n \in \mathbb{N}\}. \quad (1.13)$$

9. DEFINÍCIÓ: Legyen $M \subset \mathbb{R}^d$ nyílt, $f : M \rightarrow M$ egy $\mathcal{C}^2$ leképezés. Ekkor a $\Lambda \subset M$ kompakt halmazt az f leképezés repellerének hívunk ha Λ -ra a következő három feltétel teljesül:

- f nyújtó a Λ -án. Vagyis:

$$\exists \beta > 1 \text{ úgy hogy: } \|D_x f(\mathbf{u})\| \geq \beta \|\mathbf{u}\|$$

teljesül minden $x \in \Lambda$ és $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ -re.

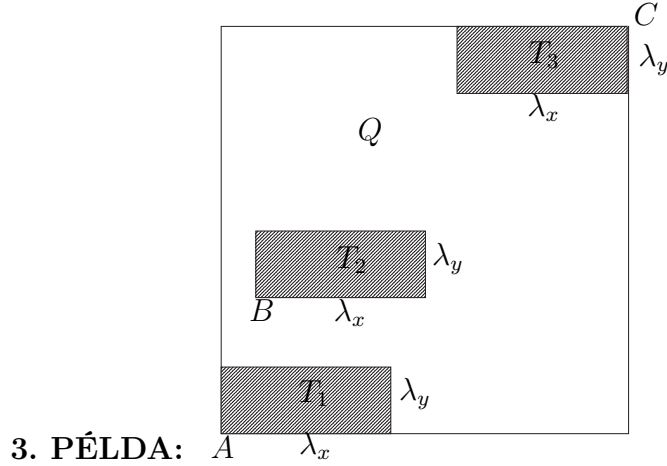
- Létezik korlátos nyílt $V \subset \mathbb{R}^d$, úgy hogy

$$\Lambda = \{x \in V : f^n(x) \in V \ \forall n \geq 0\}.$$

- f topolgikusan keverő. Vagyis minden $U \subset \mathbb{R}^d$ nyílt halmazra:

ha $U \cap \Lambda \neq \emptyset$, akkor $\exists n \geq 0$ úgy hogy $\Lambda \subset f^n(U)$.

A következő példa egy keverő repellert mutat a síkon:



3. PÉLDA:

1.9. ábra. $f : T_i \rightarrow Q$ $f|_{T_i}$ affin és a mátrixa diagonális.

Tekintsük a 1.9. ábrát! Legyen $A := (0, 0)$, $B := (b, \frac{1}{3})$ és $C := (1, 1)$. A T_i , $i = 1, \dots, 3$ téglalapok egybevágóak, oldalai $0 < \lambda_y < \lambda_x$ és feltesszük, hogy: $\lambda_y < \frac{1}{3}$, továbbá, $\frac{1}{3} < \lambda_x < \frac{1}{2}$ és $0 < b < 1 - \lambda_x$ egy paraméter. Most definiálunk egy Cantor halmazt a síkon:

Legyenek $i = 1, \dots, 3$ -ra, $\varphi_i : Q \rightarrow T_i$ ráképezések, melyek olyan affinitások, melyeknek mátrixai: $\begin{pmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{pmatrix}$.

Egy $(i_1, \dots, i_n)$ -re definiáljuk a $Q_{i_1, \dots, i_n} := \varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(Q)$ halmazt. Legyen

$$\Lambda := \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{i_1, \dots, i_n} Q_{i_1, \dots, i_n}.$$

28. FELADAT: Igazoljuk, hogy ez a Λ Cantor-halmaz egy repellere valamely $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}^2$ diffeomorfizmusnak, olymódon, hogy megadjuk az f -et egy képlettel és meghatározzuk a repeller definíciójában szereplő V nyílt halmazt.

1.2. Termodinamikai formalizmus

Ebben a fejezetben a nyomás (egyesek topológiai nyomásnak, a fizikusok pedig szabad energia megváltozásnak hívják) és az entrópia (mértékelméleti és topológiai) fogalmával ismerkedünk meg.

1.2.1. Mértékelméleti alapok, a fejezetben használt jelölések

10. DEFINÍCIÓ: Tegyük fel, hogy $(X_1, \mathcal{B}_1, m_1)$ és $(X_2, \mathcal{B}_2, m_2)$ valószínűség mértékterek. Ekkor egy $T : X_1 \rightarrow X_2$ transzformáció:

- (a) mérhető, ha $T^{-1}(\mathcal{B}_2) \subset \mathcal{B}_1$. (Vagyis $\forall B_2 \in \mathcal{B}_2$ -re $T^{-1}B_2 \in \mathcal{B}_1$).
- (b) mértéktartó, ha mérhető és $m_1(T^{-1}(B_2)) = m_2(B_2)$ teljesül minden $B_2 \in \mathcal{B}_2$ -re.
- (c) invertálható mértéktartó transzformáció, ha
 - (i) mérték tartó
 - (ii) bijektív
 - (iii) T^{-1} szintén mértéktartó.

Az $(X, \mathcal{B}, m)$ mindig egy valószínűségi mértékteret jelöl, míg az $(X, \mathcal{B}, m, T)$ mindig egy valószínűségi mértékteret jelent, melyen értelmezett a $T : X \rightarrow X$ mérhető leképezés. Ha azt írjuk, hogy $(X, \mathcal{B}, m, T)$ invertálható, akkor azt értjük, hogy az T egy invertálható mértéktartó transzformációja az $(X, \mathcal{B}, m, T)$ térnek.

Gyakran használjuk a következő tételt. A bizonyítása megtalálható [6, 84.1.]

1. TÉTEL: Adott az $(X, \mathcal{B}, m)$ tér. Legyen $\mathcal{A}$ egy olyan rész algebrája a $\mathcal{B}$ -nek, amely generálja a $\mathcal{B}$ -t. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ -ra és $B \in \mathcal{B}$ -re létezik $A \in \mathcal{A}$, melyre $m(A \Delta B) < \varepsilon$.

11. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy a $(X_1, \mathcal{B}_1, m_1)$ és a $(X_2, \mathcal{B}_2, m_2)$ izomorfak, ha létezik $M_i \in \mathcal{B}_i$, úgy hogy: $m_i(M_i) = 1$, $i = 1, 2$ és $\exists \Phi : M_1 \rightarrow M_2$ invertálható és mértéktartó leképezés $m_1(\Phi^{-1}(B)) = m_2(B)$, $\forall B \in M_2 \cap \mathcal{B}_2$.

ebben a fejezetben (és általában az ergodelméletben) az $(X, \mathcal{B}, m)$ tér legtöbbször ún. Lebesgue tér.

12. DEFINÍCIÓ: Az $(X, \mathcal{B}, m)$ Lebesgue tér, ha izomorf egy olyan térhez ami egyrészt a $([0, s], \mathcal{L}, \ell)$ (ahol $0 \leq s \leq 1$, $\mathcal{L}$ a Lebesgue mérhető halmazok σ -algebrája a $[0, 1]$ -en és ℓ a Lebesgue mérték) másrészt véges vagy megszámlálhatóan végtelen atomból áll melyek mértékeinek összege $1 - s$.

A következő tétel mutatja, hogy a Lebesgue tér fogalma milyen általános l. Royden könyv [14, 327.o.]:

2. TÉTEL: Legyen $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \ell)$ az a mértéktér, melyet úgy kapunk, hogy az ℓ Lebesgue mértéket megszorítjuk a $[0, 1]$ Borel halmazaira. Ekkor ha X egy tetszőleges teljes metrikus tér és $\mathcal{B}$ a Borel σ -algebra az X -en továbbá m egy tetszőleges valószínűségi mérték a $\mathcal{B}$ -n, az $(X, \mathcal{B}, m)$ tér izomorf a $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \ell)$ -hez.

Ebből azonnal következik, hogy:

1. KÖVETKEZMÉNY: Ha X egy teljes metrikus tér, $\mathcal{B}$ a Borel σ -algebra és m egy valószínűségi mérték a $\mathcal{B}$ -n, továbbá $\mathcal{B}_m$ a $\mathcal{B}$ teljessé tétele, akkor $(X, \mathcal{B}_m, m)$ egy Lebesgue tér.

Tehát lényegében minden olyan tér, amely érdekel minket a dinamikai rendszerek szempontjából Lebesgue-tér.

Van egy másik ekvivalencia reláció mértékterek között ami fontos. Ennek bevezetéséhez szükségünk van a mérték algebrák fogalmára:

13. DEFINÍCIÓ: Adott az $(X, \mathcal{B}, m)$ tér. Azt mondjuk, hogy $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ekvivalensek, ha $m(B_1 \triangle B_2) = 0$. Ezen ekvivalencia reláció osztályainak halmazát jelöljük $\tilde{\mathcal{B}}$ -vel, és $\tilde{m}$ -el jelöljük az indukált mértéket. Ekkor a $(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{m})$ -et a $(X, \mathcal{B}, m)$ -hoz tartozó mérték algebrának hívjuk. Azt mondjuk, hogy a $(\tilde{\mathcal{B}}_1, \tilde{m}_1)$ és a $(\tilde{\mathcal{B}}_2, \tilde{m}_2)$ mérték algebrák izomorfak, ha létezik $\Phi : \tilde{\mathcal{B}}_2 \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}_1$ bijekció, amely megőrzi a megszámlálható unió képzését, a metszetet, a komplementum képzést és $m_1(\Phi \tilde{B}) = m_2(\tilde{B})$ teljesül minden $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}_2$ -re.

A valószínűségi terek közötti másik fontos ekvivalencia reláció tehát:

14. DEFINÍCIÓ: Két valószínűségi tér konjugált, ha mérték algebrák izomorfak.

29. FELADAT: Igazoljuk, hogy ha két valószínűségi tér izomorf akkor konjugált is!

Legyen $X_1 := \{x\}$, $\mathcal{B}_1 = \{\emptyset, \{x\}\}$. Továbbá, legyen $X_2 := \{y_1, y_2\}$ és $\mathcal{B}_2 := \{\emptyset, X_2\}$.

30. FELADAT: Igazoljuk, hogy a fenti $(X_i, \mathcal{B}_i, m_i)$, $i = 1, 2$ konjugáltak, de nem izomorfak.

A továbbiakban a $(X, \mathcal{B}, m, T)$ terek izomorfizmusát és konjugáltságát definiáljuk.

15. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy az $(X_1, \mathcal{B}_1, m_1, T_1)$ és az $(X_2, \mathcal{B}_2, m_2, T_2)$

- izomorfak, ha $\exists M_i \in \mathcal{B}_i$, $m_i(M_i) = 1$, $T_i M_i \subset M_i$ halmazok és egy $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$ invertálható és mértéktartó leképezés, úgy hogy:

$$\Phi \circ T_1 = T_2 \circ \Phi,$$

- konjugáltak, ha $\exists \Phi : (\tilde{\mathcal{B}}_2, \tilde{m}_2) \rightarrow (\tilde{\mathcal{B}}_1, \tilde{m}_1)$ mérték algebra izomorfizmus, melyre

$$\Phi \circ \tilde{T}_2^{-1} = \tilde{T}_1^{-1} \circ \Phi.$$

1.2.2. mértékelméleti entrópia

Mielőtt definiálnánk egy dinamikai rendszer entrópiáját mutatunk két példát arra, hogy miért fontos számunkra ez a fogalom. Tesszük mindezt azért mert az entrópia definiálása és tulajdonságainak levezetése oly sok munkát igényel, hogy talán érdekes látni előbb, hogy miért is a sok vesződség.

16. DEFINÍCIÓ: Legyen $(Y, \mathcal{F}, \mu)$ egy valószínűségi tér. Legyen továbbá $(X, \mathcal{B}, m) := \prod_{-\infty}^{\infty} (Y, \mathcal{F}, \mu)$, és $T(\{y_n\}) := \{x\}_n$, ahol $x_n := y_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$. Ekkor a T invertálható mértéktartó transzformációt az $(Y, \mathcal{F}, \mu)$ tér feletti Bernoulli-shift-nek hívjuk.

A legegyszerűbb példa az, amikor

4. PÉLDA: $Y = \{0, 1, \dots, k-1\}$ és $\mu(\{i\}) := p_i$, ahol $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_{k-1})$ egy valószínűségi vektor ($p_i > 0$ és $\sum_{n=0}^{k-1} p_i = 1$), $\mathcal{F}$ pedig az Y összes részhalmazai közül áll. Ekkor X a $\{0, 1, \dots, k-1\}$ elemekből képzett két irányban végtelen sorozatok tere, $\mathcal{B}$ a szorzat σ -algebra és $m = \{p_0, \dots, p_{k-1}\}^{\mathbb{Z}}$.

5. PÉLDA: $(X, \mathcal{B}, m) := \prod_{n \in \mathbb{N}} (Y, \mathcal{F}, \mu)$, ahol $(Y, \mathcal{F}, \mu)$ ugyanaz mint a 4. Példában. Vegyük észre, ekkor a fenti T leképezés nem invertálható.

A fenti két példa esetén a definícióbeli T balra tolást mindig σ -val jelöljük. A $(X, \mathcal{B}, m, \sigma)$ tereket nevezzük véges abc feletti egy vagy két irányban végtelen Bernoulli shiftnek.

A Bernoulli shiftek szerepe nagyon fontos a dinamikai rendszerek elméletében, ezért az a kérdés, hogy mikor lesz két Bernoulli shift konjugált szintén fontos. A mértékelméleti entrópia fogalmát Kolmogorov vezette be. Az világos volt rögtön, hogy az entrópia konjugáció invariáns. Azt is viszonylag könnyen lehet találni két olyan ergodikus mérték tartó transzformációt, melyeknek entrópiája azonos de nem konjugáltak. (L. [15, 104.o.]). Kolmogorov kérdezte 1958-ban, hogy igaz-e, hogy a ha két Bernoulli shift azonos entrópiájú, akkor konjugáltak? A pozitív választ erre a nagyon fontos problémára Orstein adta meg 1969-ben.

3. TÉTEL: (Orstein) Legyen T_1, T_2 Lebesgue-terek feletti Bernoulli shiftek. Ha T_1 és T_2 entrópiája azonos, akkor ők izomorfak.

Ez a tétel mutatja az entrópia jelentőségét a dinamikai rendszerek elméletében.

Egy másik fontos tulajdonsága az entrópiának a következő: Tekintsük a 5.Példából $(X, \mathcal{B}, m, \sigma)$ egy irányban végtelen Bernoulli shiftet. Ekkor egy n -ik cylinder halmaz

$$[x_1, \dots, x_n] := \{\mathbf{i} \in X : i_k = x_k, \forall 1 \leq k \leq n\}. \quad (1.14)$$

Minthogy az n -ik cylinder halmazok páronként diszjunkt halmazok és a számuk exponenciálisan növekszik, ezért a mértéke az n -ik cylinder halmazoknak (bár nem feltétlenül egyenlő), de exponenciálisan kell hogy csökkenjen n -ben. Mint látni fogjuk, egy *tipikus* (később pontosítjuk, hogy ez mit jelent) n -ik cylinder mértéke $\approx \exp(-nh)$, ahol h a σ eltolás entrópiája. Tehát az entrópia az az exponens amellyel egy tipikus n hosszúságú sorozat mértéke exponenciálisan csökken.

Partíciók entrópiája

Ebben a fejezetben mindig egy rögzített $(X, \mathcal{B}, m, T)$ valószínűségi mérték-téren dolgozunk (ahol T megőrzi az m mértéket). A $\mathcal{B}$ rész σ -algebráit írott

nagy betűkkel jelöljük p.l. $\mathcal{A}, \mathcal{C}$, míg az $(X, \mathcal{B}, m)$ tér partíciót a görög ábécé első betűivel jelöljük p.l. α, β, γ .

17. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy az $\alpha = \{A_i\}_{i \in I}$, $I \subset \mathbb{N}$ egy megszámlálható mérhető partíció, ha

1. $X = \cup_i A_i$,
2. $m(A_i \cap A_j) = 0$.

18. DEFINÍCIÓ: Ha α, β partíciók és $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ rész σ -algebrái, akkor az α és β közös finomítása:

$$\alpha \vee \beta := \{A_i \cap C_j : A_i \in \alpha, C_j \in \beta\}.$$

Hasonlóan a $\mathcal{A} \vee \mathcal{C}$ az a σ -algebra, melyet a $\{A \cap C : A \in \mathcal{A}, C \in \mathcal{C}\}$ alakú halmazok generálnak. Egy α partícióhoz mindig asszociálhatunk egy $\hat{\alpha}$ σ -algebrát, melyet az α -beli halmazok uniója generál. Azt mondjuk, hogy a α partíciónál finomabb a β partíció (jelben $\alpha \leq \beta$), ha α minden osztálya a β osztályainak uniójaként áll elő.

Egy véges $\alpha = \{A_1, \dots, A_k\}$ partíció entrópiája

$$H(\alpha) = H_m(\alpha) := - \sum_{i=1}^k m(A_i) \log m(A_i).$$

Ebben a fejezetben gyakran használjuk majd a

$$\phi(x) := \begin{cases} x \log x, & \text{ha } x > 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

függvényt.

31. FELADAT: Igazoljuk hogy a ϕ függvény konkáv, vagyis, hogy $\alpha_i, x_i > 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ -ből következik:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \phi(x_i) \leq \phi \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right), \quad (1.15)$$

ahol egyenlőség csak akkor lehet, ha $\forall i, j$ -re $x_i = x_j$.

Definiáljuk az $I(\alpha) : X \rightarrow \mathbb{R}$ információ függvényt:

$$I(\alpha)(x) := - \sum_{i \in I} \log m(A_i) \chi_{A_i}(x).$$

Vegyük észre az $I(\alpha)(x)$ függvény úgy lett definiálva, hogy $H(\alpha) = \int I(\alpha)(x) dm(x)$ teljesüljön.

Feltételes Várható érték (ismétlés)

Legyen $f \in L^1(X, \mathcal{B}, m)$. Ekkor létezik nem negatív $f^+, f^- \in L^1(X, \mathcal{B}, m)$ (az f pozitív és negatív része) úgy hogy: $f = f^+ - f^-$. Egy $\mathcal{A}$ rész σ -algebrára definiáljuk

$$m_{\mathcal{A}}^+(A) := \int_A f^+ dm, \quad m_{\mathcal{A}}^-(A) := \int_A f^- dm \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

mértékeket. Nyilván $m_{\mathcal{A}}^+, m_{\mathcal{A}}^- \ll m$. Ezért léteznek és egyértelműek a Radon-Nykodim deriváltak, amikkel definiáljuk a feltételes várható értéket:

$$E(f|\mathcal{A}) := \frac{dm_{\mathcal{A}}^+}{dm} - \frac{dm_{\mathcal{A}}^-}{dm} \in L^1(X, \mathcal{A}, m).$$

Ismételjük át a feltételes várható érték legfőbb tulajdonságait:

1. $\int_A E(f|\mathcal{A}) dm = \int_A f dm$
2. $E(f|\mathcal{A}) \in L^1(X, \mathcal{A}, m)$.
3. Ha $f \in L^1(X, \mathcal{B}, m)$ és $g \in L^\infty(X, \mathcal{A}, m)$, akkor $E(fg|\mathcal{A}) = gE(f|\mathcal{A})$.
4. Ha $f \in L^1(X, \mathcal{B}, m)$, akkor $|E(f|\mathcal{A})| \leq E(|f||\mathcal{A})$.
5. $E(\cdot|\mathcal{A})$ a merőleges vetítés $L^2(X, \mathcal{B}, m)$ -ből $L^2(X, \mathcal{A}, m)$ -be.
6. Ha az $\mathcal{A}$ σ -algebrát egy véges vagy megszámlálható $\xi = \{C_i\}$ partíció generálja, akkor

$$E(g|\xi) = \sum_i \chi_{C_i}(x) \frac{\int_{C_i} g dm}{m(C_i)}. \quad (1.16)$$

Feltételes entrópia

Sokszor fogjuk használni az $\alpha = \{A_1, \dots, A_k\}$ véges partíciónak a $\beta = \{B_1, \dots, B_\ell\}$ véges partícióra vonatkozó feltételes entrópiáját:

19. DEFINÍCIÓ:

$$\begin{aligned}
 H(\alpha|\beta) = H_m(\alpha|\beta) &= \sum_{j=1}^{\ell} m(B_j) \cdot H_{m(\cdot|B_j)}(\alpha) \\
 &= - \sum_{A \in \alpha, B \in \beta} m(A \cap B) \log m(A|B) \\
 &= - \sum_{A \in \alpha, B \in \beta} m(A \cap B) \log \frac{m(A \cap B)}{m(B)},
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

ahol használtuk a valószínűségszámításban tanult $m(A|B) := \frac{m(A \cap B)}{m(B)}$ feltételes valószínűséget.

A feltételes információ függvényt $I(\alpha|\mathcal{A}) : X \rightarrow \mathbb{R}$ a következőképpen definiáljuk:

$$I(\alpha|\mathcal{A})(x) := - \sum_{i \in I} \log m(A_i|\mathcal{A})(x) \chi_{A_i}(x),$$

ahol $m(A_i|\mathcal{A})(x) := E(\chi_{A_i}|\mathcal{A})(x)$ (a feltételes mérték).

Vegyük észre, hogy

$$H(\alpha|\beta) = \int I(\alpha|\widehat{\beta})(x) dm(x). \tag{1.18}$$

Legyen $\mathcal{N} : \{\emptyset, X\}$. A következő tulajdonságok azonnal adódnak a definícióból:

32. FELADAT: 1. $I(\alpha|\mathcal{N}) = I(\alpha)(x)$.

2. $I(\alpha|\mathcal{A})(Tx) = I(T^{-1}\alpha|T^{-1}\mathcal{A})(x)$

3. Ha $\alpha \subset \mathcal{A}$, akkor m -m.m. x -re: $I(\alpha|\mathcal{A})(x) = 0$.

A következő lemma az alap egyenlőség az információ függvényre vonatkozóan:

5. LEMMA: A következő egyenlőség teljesül m -m.m. x -re:

$$I(\alpha \vee \beta | \hat{\gamma})(x) = I(\alpha | \hat{\beta} \vee \hat{\gamma})(x) + I(\beta | \hat{\gamma})(x). \quad (1.19)$$

Bizonyítás. Először is észrevevessük, hogy (1.16)-ból adódóan minden $B \in \beta$ -ra:

$$m(B | \hat{\gamma})(x) = \sum_{C \in \gamma} \chi_C(x) \frac{m(B \cap C)}{m(C)}.$$

Ezért

$$I(\beta | \hat{\gamma})(x) = - \sum_{C \in \gamma, B \in \beta} \chi_{C \cap B}(x) \log \left(\frac{m(B \cap C)}{m(C)} \right) \quad (1.20)$$

$$= - \sum_{A \in \alpha, B \in \beta, C \in \gamma} \chi_{A \cap B \cap C}(x) \log \left(\frac{m(B \cap C)}{m(C)} \right). \quad (1.21)$$

Mivel a $\beta \vee \gamma$ partíció elemei $B \cap C, B \in \beta, C \in \gamma$ alakúak,

$$I(\alpha | \hat{\gamma} \vee \hat{\beta})(x) = - \sum_{A \in \alpha, B \in \beta, C \in \gamma} \chi_{A \cap B \cap C}(x) \log \left(\frac{m(A \cap B \cap C)}{m(B \cap C)} \right).$$

Összeadva a két előző egyenletet kapjuk a lemma állítását. ■

A feltételes entrópia tulajdonságait a következő pontokban foglaljuk össze. A bizonyításokban szükség lesz az $\mathcal{N} = \{\emptyset, X\}$ triviális algebrára.

1. $H(\alpha \vee \beta | \hat{\gamma}) = H(\alpha | \hat{\beta} \vee \hat{\gamma}) + H(\beta | \hat{\gamma})$.
2. $H(\alpha \vee \beta) = H(\alpha) + H(\beta | \hat{\alpha})$
3. Ha $\alpha \leq \beta$, akkor $H(\alpha | \hat{\gamma}) \leq H(\beta | \gamma)$.
4. Ha $\alpha \leq \beta$, akkor $H(\alpha) \leq H(\beta)$.
5. Ha $\beta \leq \gamma$, akkor $H(\alpha | \hat{\beta}) \geq H(\alpha | \hat{\gamma})$.
6. $H(\alpha) \geq H(\alpha | \hat{\beta})$.
7. $H(\alpha \vee \beta | \hat{\gamma}) \leq H(\alpha | \hat{\gamma}) + H(\beta | \hat{\gamma})$.
8. $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$.

9. Ha T mértéktartó, akkor $H(T^{-1}(\alpha)|T^{-1}(\widehat{\beta})) = H(\alpha|\widehat{\beta})$.

Innen az "A" oldalról folytattam, de kimaradt a 1-6 és a I-III sok része

- 4. TÉTEL:** 1. $H(\alpha|\beta) = 0 \iff \alpha \leq \beta$.
 2. $H(\alpha|\beta) = \alpha \iff \alpha, \beta$ függetlenek.

Bizonyítás.

1. ($\Leftarrow$) Házi feladat
 2. ($\Rightarrow$) A feltételből adódóan:

$$\sum_A \left(- \sum_B m(A)m(A|B) \log m(A|B) \right) = - \sum_A m(A) \log m(A). \quad (1.22)$$

Másrészt minden rögzített A -ra (1.15)-ből $\alpha_i = m(B)$, $x_i = m(A|B)$ választással kapjuk, hogy

$$- \sum_B m(B)m(A|B) \log m(A|B) \leq -m(A) \log m(A), \quad (1.23)$$

ahol egyenlőség csak akkor lehet, ha $\forall B$,

$$m(A|B) = m(A) \quad (1.24)$$

Ahhoz viszont, hogy (1.22)-ban egyenlőség legyen (1.23)-ben egyenlőség kell legyen $\forall B$ -re. Ekkor viszont $\forall A, B$ -re (1.24) teljesül. Ezzel igazoltuk a tételünket.

■

Az előző tételünket felhasználva igazolhatjuk, hogy

- 5. TÉTEL:** 1. $H(\alpha|\mathcal{F}) = 0 \iff \alpha \leq \mathcal{F}$.
 2. $H(\alpha|\mathcal{F}) = H(\alpha) \iff \alpha$ és $\mathcal{F}$ függetlenek.

Bizonyítás.

1. ($\Leftarrow$) Ha $\alpha \leq \mathcal{F}$, akkor $m(A|\mathcal{F}) = \chi_A$ értékei 0 vagy 1 lehet csak. Ezért $H(\alpha|\mathcal{F}) = 0$.
- ($\Rightarrow$) Ha $H(\alpha|\mathcal{F}) = 0$, akkor $0 = \int - \sum_A m(A|\mathcal{F}) \log m(A|\mathcal{F}) dm$. Mivel $-m(A|\mathcal{F}) \log m(A|\mathcal{F}) \geq 0$ teljesül $\forall A$ -ra, ezért $\forall A$ -ra m -majdnem mindenütt $m(A|\mathcal{F}) \log m(A|\mathcal{F}) = 0$. Ezért $m(A|\mathcal{F})$ értéke csak 0 vagy 1 lehet vagyis $m(A|\mathcal{F})$ egy karakterisztikus függvény. Ezért létezik $A' \in \mathcal{F}$, melyre . Innen

$$m(A') = m(A). \quad (1.25)$$

$\chi_{A'} = m(A|\mathcal{F})$ Továbbá

$$\chi_{A'} = \chi_{A'}^2 = \chi_{A'} m(A|\mathcal{F}) = m(A \cap A'|\mathcal{F}).$$

Ezért $m(A') = m(A \cap A')$. Ezért $m(A \triangle A')$. Tehát $A \in \mathcal{F}$ vagyis $\alpha \leq \mathcal{F}$.

2. ($\Leftarrow$) A feltételes valószínűség definíciójából azonnal következik, hogy $m(A|\mathcal{F}) = m(A)$. Ugyanis minden $F \in \mathcal{F}$ -re:

$$m(A \cap F) = \int_F \chi_A dm = \int_F m(A) dm = m(A)m(F).$$

Vagyis $\alpha, \mathcal{F}$ függetlenek.

($\Rightarrow$) Let $B \in \mathcal{F}$ tetszőleges. Nevezzük $\hat{\beta}$ -nak a legszűkebb algebrát ami B -t tartalmazza. Vagyis $\hat{\beta} = \{\emptyset, X, B, X \setminus B\}$. Nyilván $\hat{\beta} \leq \mathcal{F}$. Tehát

$$H(\alpha) \geq H(\alpha|\hat{\beta}) \geq H(\alpha|\mathcal{F}) = H(\alpha).$$

Használva az előző tételünket α és β -ra kapjuk, hogy B független minden A -tól. Mivel $B \in \mathcal{F}$ tetszőleges volt ezért kész vagyunk.

■

2. KÖVETKEZMÉNY:

$$h(T, \alpha) = 0 \iff \alpha \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} T^{-i} \alpha.$$

Bizonyítás.

$$0 = h(T, \alpha) = H\left(\alpha \middle| \bigvee_{i=1}^{\infty} T^{-i}\alpha\right) \iff \alpha \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} T^{-i}\alpha.$$

■

3. KÖVETKEZMÉNY: Ha $h(T) = 0$, akkor $T^{-1}\mathcal{B} = \mathcal{B}$.

Bizonyítás. Csak azt kell belátni, hogy $\mathcal{B} \subset T^{-1}\mathcal{B}$ mert a másik irányú tartalmazás következik abból, hogy T mérték tartó. Legyen $B \in \mathcal{B}$ egy tetszőleges eleme. Defináljuk a legszűkebb $\hat{\alpha} := \{\emptyset, X, B, X \setminus B\}$ algebrát ami B -t tartalmazza. Ekkor $0 = h(T) = h(T, \alpha)$. Használva az 5. tételt, kapjuk, hogy

$$\alpha \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} T^{-i}\alpha = T^{-1} \bigvee_{i=0}^{\infty} \alpha \leq T^{-1}\mathcal{B}.$$

Ezért $B \in T^{-1}\mathcal{B}$ teljesül minden $B \in \mathcal{B}$ -re, vagyis $\mathcal{B} \subset T^{-1}\mathcal{B}$. ■

20. DEFINÍCIÓ: 1. Legyen (∇, d) az a metrikus tér, ahol ∇ a véges partíciók tere és a távolságot a: $d(\alpha, \beta) := H(\alpha|\beta) + H(\beta|\alpha)$ metrika adja meg.

2. Legyen $(\tilde{\nabla}_r, \rho)$ a következőképpen definiált metrikus tér: $\tilde{\nabla}_r$ az r elemű rendezett partíciók tere ($r \geq 1$) és ha $\alpha = \{A_1, \dots, A_r\}$, $\beta = \{B_1, \dots, B_r\}$, akkor

$$\rho(\alpha, \beta) := \sum_{i=1}^r m(A_i \triangle B_i).$$

A következő lemma azt mondja, hogy a $(\tilde{\nabla}_r, \rho)$ metrikus térnek a (∇, d) metrikus térbe való természetes beágyazása egyenletesen folytonos.

6. LEMMA: Legyen $r \geq 1$ tetszőleges rögzített. Ekkor $\forall \varepsilon > 0$ -ra létezik $\delta > 0$, úgy hogy ha $\alpha = \{A_1, \dots, A_r\}$, $\beta = \{B_1, \dots, B_r\}$, akkor

$$\sum_{i=1}^r m(A_i \triangle B_i) < \delta \implies H(\alpha|\beta) + H(\beta|\alpha) < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Válasszuk $\delta > 0$ -át olyan kicsire, hogy

$$-r(r-1)\delta \log \delta - (1-\delta) \log(1-\delta) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.26)$$

teljesüljön. Legyen γ az a partíció, melynek osztályai az összes $A_i \cap B_j$, $i \neq j$ alakú halmazok és ezeken kívül van még egy osztálya, nevezetesen a $\bigcup_{i=1}^r A_i \cap B_i$ halmaz. Tehát ennek a partíciónak összesen $r(r-1) + 1$ osztálya van. Tegyük fel hogy $\rho(\alpha, \beta) < \delta$, ahol $\delta < \frac{1}{4}$. Először is belátjuk, hogy ekkor

$$H(\gamma) \leq -r(r-1)\delta \log \delta - (1-\delta) \log(1-\delta). \quad (1.27)$$

Ez abból az egyszerű észrevételből következik, hogy $i \neq j$ -ra

$$A_i \cap B_j \subset \bigcup_{n=1}^r (A_n \cap B_n).$$

Ekkor ugyanis a Lemma feltevése miatt

$$\sum_{i \neq j} m(A_i \cap B_j) < \delta \text{ tehát } m\left(\bigcup_{i=1}^r (A_i \cap B_i)\right) > 1 - \delta.$$

Egy pillantást vetve a $\phi(x)$ függvény grafikonjára láthatjuk, hogy

$$\phi(m(A_i \cap B_j)) < \phi(\delta) \text{ és } \phi\left(m\left(\bigcup_{i=1}^r (A_i \cap B_i)\right)\right) < \phi(1 - \delta).$$

Ezzel bebizonyítottuk (1.27)-at. A γ definíciójából adódóan

$$\alpha \vee \beta = \alpha \vee \gamma \text{ és } \alpha \vee \beta = \beta \vee \gamma.$$

Ekkor (1.26)-ból következik, hogy

$$\begin{aligned} H(\beta) + H(\alpha|\beta) &= H(\alpha \vee \beta) = H(\beta \vee \gamma) \leq H(\beta) + H(\gamma) \\ &= H(\beta) + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ezért $H(\alpha|\beta) < \frac{\varepsilon}{2}$. Azt, hogy $H(\beta|\alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$ hasonlóan láthatjuk be. ■

A következő tételben használjuk az algebra által generált σ -algebra halmazainak approximációjáról szóló 1. Tételt.

6. TÉTEL: Tegyük fel, hogy a $\mathcal{B}_0$ algebra generálja a $\mathcal{B}$ -t. Ekkor $\forall \alpha, \forall \varepsilon > 0$ -ra létezik $\hat{\gamma} \leq \mathcal{B}_0$, úgy hogy $d(\alpha, \gamma) < \varepsilon$.

Bizonyítás. Legyen $\alpha = \{A_1, \dots, A_r\}$. Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ -át és ehhez válasszunk δ -át a 6. Lemma szerint. Ekkor a 6. Lemma miatt elég megmutatni, hogy $\eta = \frac{\delta}{r}$ -re létezik olyan $\beta = \{B_1, \dots, B_r\}$ partíció, melyre

$$\forall i \quad m(A_i \triangle B_i) < \eta. \quad (1.28)$$

Válasszunk $\lambda > 0$ -át melyre

$$\lambda(r-1)[1+r(r-1)] < \eta.$$

Minden i -re legyen $B'_i \in \mathcal{B}_0$ melyre $m(A_i \triangle B'_i) < \lambda$. Ha $i \neq j$, akkor egy triviális megfontolás mutatja, hogy

$$B'_i \cap B'_j \subset (B'_i \triangle A_i) \cup (B'_j \triangle A_j). \quad (1.29)$$

Ezért $m(B'_i \cap B'_j) < 2\lambda$. Legyen $N := \cup_{i \neq j} (B'_i \cap B'_j)$. Ekkor $m(N) < r(r-1)\lambda$. Most már megválaszthatjuk a keresett β partíciót:

$$i < r\text{-re } B_i := B'_i \setminus N, \text{ és } B_r := X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{r-1} B_i \right).$$

Használva a következő könnyen leellenőrizhető összefüggéseket

$$i < r\text{-re } A_i \triangle B_i \subset (B'_i \triangle A_i) \cup N \text{ és } A_r \triangle B_r \subset \bigcup_{i=1}^{r-1} (A_i \triangle B_i),$$

kapjuk, hogy

$$i < r\text{-re } m(A_i \triangle B_i) < \lambda + \lambda r(r-1). \text{ és } m(A_r \triangle B_r) < (r-1)\lambda(1+r(r-1)).$$

Ezzel beláttuk, hogy (1.28) teljesül, ami bizonyítja a tétel állítását. ■

33. FELADAT: Legyen $\mathcal{A}_n$ a $\mathcal{B}$ rész σ -algebráinak növekvő sorozata. Definíció szerint:

$$\cup \mathcal{A}_n := \{A \mid \exists n, \text{ hogy } A \in \mathcal{A}_n\}.$$

Igazoljuk, hogy $\cup \mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ -nek rész algebrája!

4. KÖVETKEZMÉNY: Ha $\gamma < \bigvee_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, ahol α_n növekvő véges partíciók, akkor $H(\gamma|\alpha_n) \rightarrow 0$.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}_0 := \cup \alpha_n$. Ekkor a fenti feladat miatt $\mathcal{B}_0$ egy algebra ami nyilván generálja a $\bigvee_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ σ -algebrát. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A 6. Tétel miatt létezik $\gamma_\varepsilon \leq \mathcal{B}_0$, melyre $H(\gamma|\gamma_\varepsilon) < \varepsilon$. Mivel γ_ε egy véges partíció, és $\gamma_\varepsilon \leq \cup \alpha_n$ ezért létezik olyan j_0 , hogy $j > j_0$ -ra $\gamma_\varepsilon \leq \alpha_j$. Ezért, ha $j > j_0$, akkor

$$H(\gamma|\alpha_j) \leq H(\gamma|\gamma_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt ez igazolja az állítást. ■

7. TÉTEL: (Kolmogorov-Sinai Tétel) Ha T egy invertálható mérték-tartó transzformáció és ha

$$\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} T^n \alpha = \mathcal{B},$$

akkor $h(T, \alpha) = h(T)$.

Bizonyítás. Azt kell belátni, hogy tetszőleges γ -ra $h(T, \gamma) \leq h(T, \alpha)$. Vegyük észre, hogy $n \geq 1$ -re:

$$\begin{aligned} h(T, \gamma) &\leq h\left(T, \bigvee_{i=-n}^n T^i \alpha\right) + H\left(\gamma \mid \bigvee_{i=-n}^n T^i \alpha\right) \\ &= h(T, \alpha) + H\left(\gamma \mid \bigvee_{i=-n}^n T^i \alpha\right). \end{aligned}$$

Tehát csak azt kell belátnunk, hogy $H\left(\gamma \mid \bigvee_{i=-n}^n T^i \alpha\right) \rightarrow 0$. Legyen $\alpha_n := \bigvee_{i=-n}^n T^i \alpha$. Ekkor a feltétel szerint $\gamma \leq \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} T^n \alpha$. Ezért a 4. Következmény szerint $H(\gamma|\alpha_n) \rightarrow 0$. ■

34. FELADAT: A fentiek mintájára igazoljuk, hogy ha $\bigvee_{i=0}^{\infty} T^{-i} \alpha = \mathcal{B}$, akkor $h(T, \alpha) = h(T)$.

5. KÖVETKEZMÉNY: Adott $(X, \mathcal{B}, m, T)$, ahol T invertálható mértéktartó transzformáció. Tegyük fel, hogy

$$\bigvee_{i=0}^{\infty} T^{-i}\alpha = \mathcal{B}.$$

Ekkor, $h(T) = 0$.

Bizonyítás. Mivel T invertálható, ezért $\mathcal{B} = T^{-1}\mathcal{B}$. Ezt használva:

$$\begin{aligned} h(T) &= h(T, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} H\left(\alpha \middle| \bigvee_{i=1}^n T^{-i}\alpha\right) = H\left(\alpha \middle| T^{-1} \bigvee_{i=0}^n T^{-i}\alpha\right) = \\ &= H(\alpha | T^{-1}\mathcal{B}) = H(\alpha | \mathcal{B}) = 0, \end{aligned}$$

hiszen $\alpha \leq \mathcal{B}$. ■

Irodalomjegyzék

- [1] R. Bowen, *Equilibrium States and Ergodic Theory of Anosov diffeomorphisms*. New York, Springer-Verlag (1975) (Lecture Notes in Mathematics **470**).
- [2] M.P. Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall 1976.
- [3] R.L. devanay, *An introduction to chaotic Dyanamical Systems*. The benjamin/Cummings Publishing CO. Inc. 1986.
- [4] K. Falconer, *Fractal Geometry*, John Wiley and Sons, (1990).
- [5] K. Falconer, *Techniques in Fractal Geometry*, John Wiley and Sons, (1997).
- [6] Kingman, Taylor, *Introduction to measure and probability*. Cambridge Univ. Press. Cambridge, England, (1966).
- [7] P. Mattila, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **44** Cambridge Univ. Press(1995).
- [8] H. McCluskey and A.K. Manning, *Hausdorff dimension for horseshoes*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **3** (1983), 251-260.
- [9] J. Palis, F. Takens, *Hyperbolic & sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics **35**, Cambridge Univ. Press 1993.
- [10] Y. Pesin, *Dimension Theory in Dynamical Systems*. Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press 1997.

- [11] M. Pollicott, *Lectures on ergodic theory and Pesin theory on compact manifolds*. London Mathematical Society Lecture Notes Series **180**, Cambridge Univ. Press 1993.
- [12] Szász D. *Előadás jegyzetek az Ergodelmélet és Dinamikai Rendszerek Tárgyhoz* www.math.bme.hu/~szasz
- [13] M. Misiurewicz Strange attractors for Lozi mappings. *Non-linear dynamics* R.H.G. Helleman (ed.) Annals of the New York Academy of Sciences. **357** (1980) 348-358.
- [14] H.L. Royden, *Real Analysis* (2nd edition). McMillan, New York, 1968.
- [15] P. Walters, *An introduction to Ergodic Theory* New York, Springer-Verlag (1981).