

B3 parciális differenciálegyenletek rész

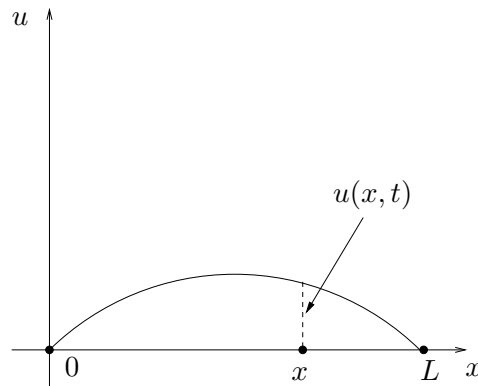
Simon Károly

2007.07.07

1. fejezet

Parciális differenciálegyenletek

1.1. Rezgő húr



Tekintsük az l hosszúságú tökéletesen rugalmas húr. Helyezzük ezt a húr az x -tengely $[0, l]$ szakaszára és mozdítsuk ki az x -tengelyre merőlegesen. A húr az x tengelyre merőlegesen az (x, u) síkban mozog. Azt, hogy a húr egy x abszcisszájú pontja hol van t idő múlva az $u(x, t)$ függvény adja meg. A rezgő húr mozgását tehát meghatároztuk, ha az $u(x, t)$ ismeretlen függvényt megtaláljuk.

Amint az a fizikai megfontolásokból adódik, a keresett $u(x, t)$ függvény kielégíti a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

másodrendű parciális differenciálegyenletet, ahol $c > 0$ egy konstans. A fenti (1.1) differenciálegyenletet a rezgő húr differenciálegyenletének hívjuk. Ahhoz, hogy ebből a húr helyzetét leíró $u(x, t)$ -t megkapjuk, még tudnunk kell a húr alakját a $t = 0$ időpontban. (Fent feltettük, hogy ez az x -tengely $[0, l]$ intervalluma, de lehet helyette bármely $f(x)$ függvény is.) Továbbá szükséges még tudnunk, hogy a $t = 0$ -ban a húr egyes pontjait milyen sebességgel mozdítottuk el az u tengely irányába. Vagyis a $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ differenciálegyenletnek adottak az

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{(x,0)} = g(x) \end{cases} \text{ kezdeti feltételei.}$$

Egy kerületi feltétel: $u(0, t) = u(l, t) = 0 \forall t$ -re. Fent használtuk a $\frac{\partial u}{\partial t}|_{(x,0)}$ jelölést.

1. DEFINÍCIÓ: Általában, ha F egy függvény és H az értelmezési tartományának egy (nem üres) részhalmaza, akkor $F|_H$ jelenti az F megszorítását H -ra. Vagyis $F|_H$ egy olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya H és az $F|_H$ függvény a H halmazon megegyezik az F függvénnyel. Ha például a H egy egyelemű halmaz, $H = \{P\}$, akkor az $F|_P = F(P)$.

Tehát meg kell oldani a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

differenciálegyenletet az

$$u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x) \text{ és } u(0, t) = u(l, t) = 0$$

feltételek mellett.

1.1.1. I. megoldás David Bernoullitól:

A megoldást kereshetjük $u(x, t) = X(x)T(t)$ alakban. Ekkor $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$ és $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t)$. Ezeket az egyenletbe visszaírva kapjuk, hogy $X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$, vagyis:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha^2.$$

Ugyanis az egyenlet bal oldala csak t -től, jobb oldala csak x -től függ, amiből adódik, hogy ők ugyanazzal az állandóval egyenlők, amit fizikai okból negatívnak kell feltételeznünk. Így tehát **két** közönséges differenciálegyenletet kaptunk.

$$(1) \quad \frac{T''(t)}{T(t)} = -\alpha^2; \quad \text{és} \quad (2) \quad c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha^2.$$

Vagyis:

$$(1') \quad T''(t) + \alpha^2 T(t) = 0, \quad \text{és} \quad (2') \quad X''(x) + \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 X(x) = 0,$$

$T(t) = A \cos(\alpha t) + B \sin(\alpha t)$, és $X(x) = C \cos\left(\frac{\alpha}{c}x\right) + D \sin\left(\frac{\alpha}{c}x\right)$ az általános megoldások. Innen:

$$u(x, t) = X(x) T(t) = \underbrace{(A \cos(\alpha t) + B \sin(\alpha t))}_{T(t)} \underbrace{\left(C \cos\left(\frac{\alpha}{c}x\right) + D \sin\left(\frac{\alpha}{c}x\right)\right)}_{X(x)}$$

Tudjuk, hogy $u(0, t) = (A \cos \alpha t + B \sin \alpha t) C \equiv 0$. Innen $C = 0$, másrészt $u(l, t) \equiv 0 = (A \cos \alpha t + B \sin \alpha t) D \sin\left(\frac{\alpha}{c}l\right)$, így $\sin\left(\underbrace{\frac{\alpha}{c}l}_{k\pi}\right) = 0$, amiből

$$\alpha_k = \frac{kc\pi}{l}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ebből látható, hogy

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \left[A_k \cdot \cos\left(\frac{kc\pi}{l}t\right) + B_k \cdot \sin\left(\frac{kc\pi}{l}t\right) \right]$$

Az $\{A_k\}_{k=1}$ és $\{B_k\}_{k=1}$ együtthatókat a kezdeti feltételekből, pontosabban az $f(x)$ és a $g(x)$ függvények tiszta szinuszos Fourier-sorának segítségével állíthatjuk elő. Mivel $u(x, 0) = f(x)$ és $u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$ így A_k az $f(x)$ függvény $[0, l]$ intervallumon vett tiszta szinuszos Fourier-sorának k -adik együtthatója. Másrészt,

$$u_t(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-A_k \alpha_k \sin \alpha_k t + B_k \alpha_k \cos \alpha_k t) \sin\left(\frac{\alpha_k}{c}x\right).$$

Helyettesítve $t = 0$ -át és felhasználva, hogy $\sin(0) = 0$; $\cos(0) = 1$ kapjuk, hogy

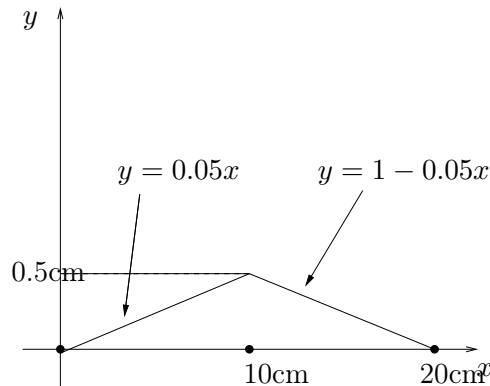
$$u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k B_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) = g(x).$$

Tehát meg kell határozni a $g(x)$ függvény tiszta szinuszos Fourier-sorát. A $[0, l]$ intervallumon legyen ez

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right).$$

A $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k B_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) = g(x)$ és a $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$ egyenletekből adódik, hogy $\alpha_k B_k = b_k$. Tehát $B_k = \frac{b_k}{\alpha_k} = \frac{lb_k}{kc\pi}$.

1. PÉLDA: Legyen az $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ -ben szereplő $c = 1$. A 20 cm hosszú két végén rögzített húrt megfeszítjük úgy, ahogyan az ábra mutatja, és azután elengedjük. Határozzuk meg a húr mozgását leíró $u(x, t)$ függvényt!



Megoldás:

Mivel a húrt magára hagytuk (nem adtunk neki kezdeti sebességet), ezért a húr kezdeti sebessége 0. Tehát $g(x) \equiv 0$. Innen $\forall k \geq 1$ -re $B_k = 0$, hiszen a $g(x) \equiv 0$ függvény szinuszos Fourier-sora minden b_k együtthatója 0 lesz. Az $\{A_k\}$ együtthatók kiszámolásához meg kell határozni az

$$f(x) = \begin{cases} 0,05x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 10 \\ 1 - 0,05x, & \text{ha } 10 \leq x \leq 20 \end{cases} \quad (1.2)$$

tiszta szinuszos sorfejtését!

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^{20} f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx = \frac{2}{20} \int_0^{10} 0,05x \sin \left(\frac{k\pi}{20} x \right) dx + \frac{2}{20} \int_{10}^{20} (1 - 0,05x) \sin \frac{k\pi}{20} x dx = \frac{40}{(k\pi)^2} \sin \frac{k\pi}{2}$$

(A hiányzó részletszámítások Sch. 328.oldalán található.)

Tehát:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{40}{k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} \cos \left(\frac{k\pi}{20} t \right) \sin \left(\frac{k\pi}{20} x \right)$$

Vagyis:

$$u(x, t) = \frac{40}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \cos \left(\frac{\pi}{20} t \right) \sin \left(\frac{\pi}{20} x \right) - \frac{1}{3^2} \cos \left(\frac{3\pi}{20} t \right) \sin \left(\frac{3\pi}{20} x \right) + \frac{1}{5^2} \cos \left(\frac{5\pi}{20} t \right) \sin \left(\frac{5\pi}{20} x \right) - \dots \right)$$

1.1.2. II. megoldás D'Alambert-től

A $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ egyenletre az $u(x, 0) = f(x)$; $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x,0)} = g(x)$; $u(0, t) = u(l, t) = 0$ feltételek mellett D'Alambert megoldása azon az észrevételen alapul, hogy ha $u_1, u_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ kétszer differenciálható tetszőleges függvények, akkor az

$$u(x, t) = u_1(x + ct) + u_2(x - ct)$$

mindig kielégíti a rezgő húr $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ parciális differenciálegyenletét.

Ugyanis: ha $u(x, t) = u_1(x + ct) + u_2(x - ct)$, akkor $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x,t)} = cu_1'(x + ct) - cu_2'(x - ct)$. Továbbá

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(x,t)} = c^2 u_1''(x + ct) + c^2 u_2''(x - ct)$$

Másrészt: $\frac{\partial u}{\partial x} = u'_1(x + ct) + u'_2(x - ct)$ és

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u''_1(x + ct) + u''_2(x - ct)$$

A fenti két egyenletből adódik:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(x,t)} = c^2 [u''_1(x + ct) + u''_2(x - ct)] = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x,t)}$$

Ekkor tehát a feltételekből kell meghatároznunk az u_1, u_2 függvényeket.

Megoldás: Az $u(x, 0) = f(x)$ és $u_t(x, 0) = g(x)$ kezdeti feltételek esetén az

$$u(x, t) = u_1(x + ct) + u_2(x - ct)$$

egyenletbe $t = 0$ -t írva $u(x, 0) = u_1(x) + u_2(x)$.

Ha az

$$u(x, t) = u_1(x + ct) + u_2(x - ct)$$

kifejezést t szerint deriváljuk, majd $t = 0$ -t helyettesítünk, akkor

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x,0)} = cu'_1(x) - cu'_2(x).$$

Tehát kapjuk, hogy

$$f(x) = u(x, 0) = u_1(x) + u_2(x) \text{ és } g(x) = u_t(x, 0) = c(u'_1(x) - u'_2(x))$$

így

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_1(x) + u'_2(x) = f'(x) \\ u'_1(x) - u'_2(x) = \frac{g(x)}{c} \end{array} \right\}$$

egy közönséges differenciálegyenlet rendszer, melynek megoldását tanultuk (?? fejezet).

Alkalmazva a tanult módszert adódik, hogy

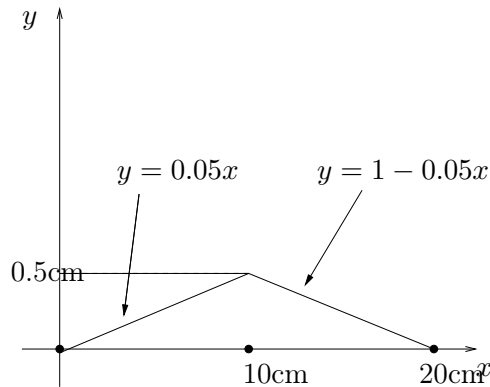
$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(s) = \frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2c} \int_0^s g(\tau) d\tau + A \\ u_2(s) = \frac{1}{2}f(s) - \frac{1}{2c} \int_0^s g(\tau) d\tau + B \end{array} \right\}$$

Ebből kapjuk, hogy $A + B = 0$ kell legyen. Így tehát:

$$u(x, t) = u_1(x + ct) + u_2(x - ct) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau$$

Vegyük észre, hogy ebben a levezetésben *nem* használtuk azt a kerületi feltételt, hogy $u(0, t) = u(l, t) = 0$, tehát a fenti levezetés "végtelen hosszú" húr esetén is működik.

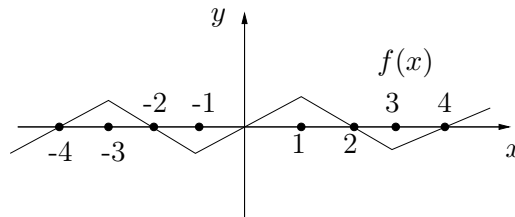
2. PÉLDA: Tekintsük megint az előző példát, és oldjuk meg D'Alambert módszerével. A húr kezdeti alakját az ábra mutatja. Elengedve a húrt adjuk meg a húr mozgását leíró $u(x, t)$ függvényt.



Megoldás:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + t) + f(x - t)], \text{ ahol } f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0.05x & \text{ha } 0 \leq x \leq 10 \\ 1 - 0.05x & \text{ha } 10 \leq x \leq 20 \end{array} \right\}$$

nek a kiterjesztése a számegyenesre:



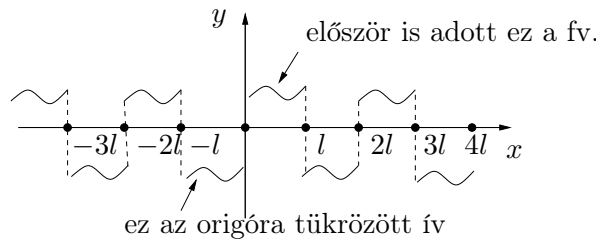
Tehát azt, hogy 10 időegység múlva az $x = 2 \text{ cm}$ -ben mi lesz a húr kitérése úgy határozzuk meg, hogy:

$$\begin{aligned} u(2, 10) &= \frac{1}{2} [f(12) - f(-8)] = \frac{1}{2} \left[\underbrace{1 - 0.05 \cdot 12}_{f(12)} - \left(\underbrace{-0.05 \cdot 8}_{f(-8)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} [1 + 0.4 - 0.6] = 0.4 \end{aligned}$$

1.1.3. A Bernoulli és a D'Alambert-féle módszerek összehasonlítása

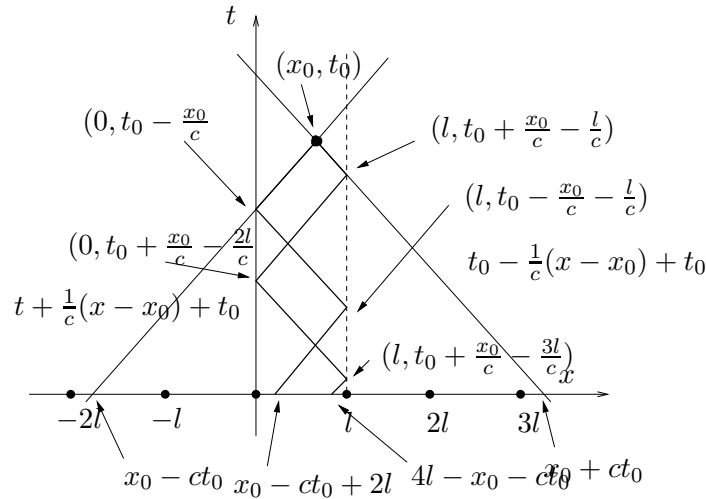
A Bernoulli-féle módszernél mind a kezdeti feltételeket: $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$, mind a kerületi feltételeket: $u(0, t) = u(l, t) \equiv 0$ felhasználtuk. A D'Alambert-féle módszernél az $u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau$ megoldást kaptuk pusztán a kezdeti feltételek figyelembevételével. Hogy a megoldás a kerületi feltételeknek is eleget tegyen az f és a g függvények értelmezését ki kell terjeszteni a $[0, l]$ -ről \mathbf{R} -be a következő képen:

Adott a grafikonon látható függvény, melynek a $[0, l]$ intervallumhoz tartozó darabját az origóra tükrözzük. Az így kapott $[-l, l]$ -en értelmezett függvényt $2l$ szerint periodikusan kiterjesztjük a számegyenesre.

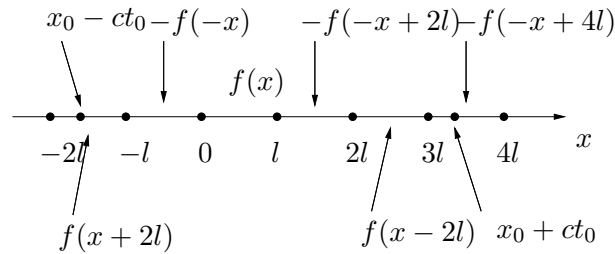


A D'Alambert módszerrel kapott megoldás működik végtelen hosszú húr esetén, amikor természetesen nincs az $u(0, t) = u(l, t) \equiv 0$ kerületi feltétel, és az f, g függvények az egész számegyenesen adottak.

A D'Alambert formula egy bonyolult formulát ad, amely tartalmazza a hullámok össze-vissza verődését mind a két határnál ($x = 0$ és $x = l$)-nél. Válasszunk egy konkrét (x_0, t_0) pontot, amely az ábrán a $t = -\frac{1}{c}(x - x_0) + t_0$ és a $t = \frac{1}{c}(x - x_0) + t_0$ egyeneseken fekszik.



Ez azért fontos, mert az $x + ct = const_1$ és az $x - ct = const_2$ alakú függvények egyenesek. Először azt szeretnénk tudni, hogy mivel egyenlő $f(x_0 + ct_0)$. Ez abból adódik, hogy:



Tehát $f(x_0 + ct_0) = -f(4l - x_0 - ct_0)$ és ugyanígy $f(x_0 - ct_0) = f(x_0 - ct_0 + 2l)$.

(A $4l - x_0 - ct_0$ és az $x_0 - ct_0 + 2l$ argumentumok már a $[0, l]$ -ből vannak.)

Tehát

$$\begin{aligned}
u(x_0, t_0) &= \frac{1}{2}f(x_0 - ct_0 + 2l) - \frac{1}{2}f(4l - x_0 - ct_0) \\
&+ \frac{1}{2c} \left[\int_{x-ct}^{-l} g(y+2l) dy + \underbrace{\int_{-l}^0 -g(-y) dy + \int_0^l g(y) dy}_0 \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\int_l^{2l} -g(-y+2l) dy + \int_{2l}^{3l} g(y-2l) dy}_0 + \int_{3l}^{x+ct} -g(-y+4l) dy \right]
\end{aligned}$$

Kihasználva, hogy $\int_{x-ct}^{x+ct} g(y+2l) dy = \int_{2l+x-ct}^{x+ct} g(s) ds$ és $\int_{3l}^{x+ct} -g(-y+4l) dy =$

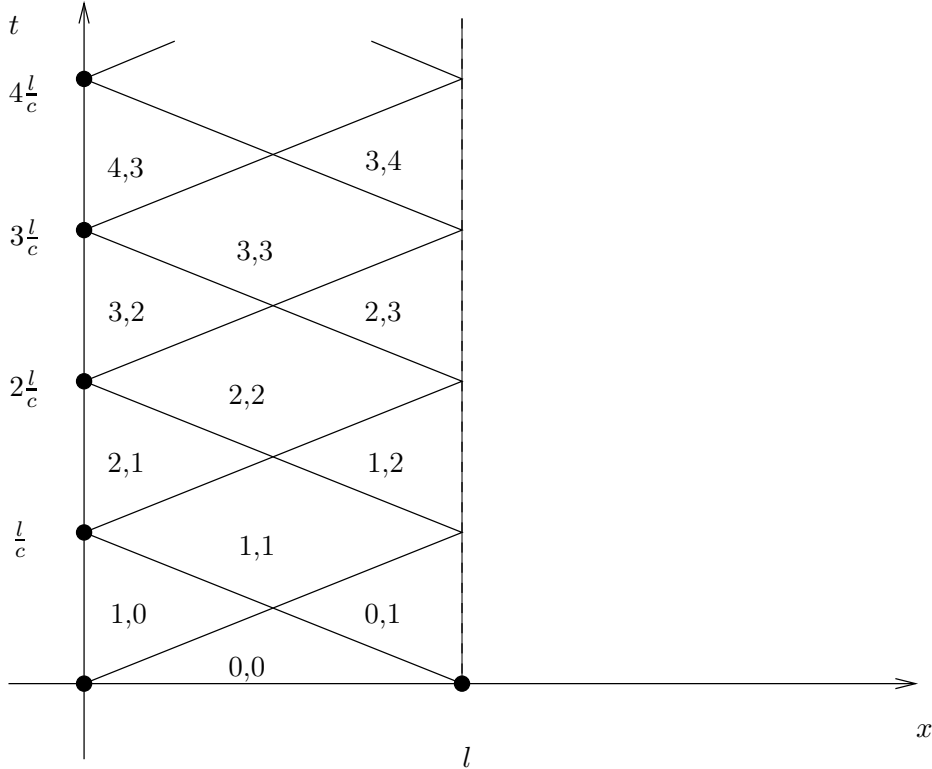
$$\left[\begin{array}{ccc} s = -y + 4l, & y & 3l & x_0 + ct_0 \\ ds = -dy, & s & l & 4l - x_0 - ct_0 \end{array} \right] = \int_l^{4l-x_0-ct_0} g(s) ds.$$

Tehát

$$\begin{aligned}
u(x_0, t_0) &= \frac{1}{2}(f(x_0 - ct_0 + 2l) - f(4l - x_0 - ct_0)) + \\
&+ \frac{1}{2c} \left[\int_{2l+x_0-ct_0}^l g(s) ds + \int_l^{4l-x_0-ct_0} g(s) ds \right] \\
&= \frac{1}{2}(f(x_0 - ct_0 + 2l) - f(4l - x_0 - ct_0)) + \frac{1}{2c} \left[\int_{2l+x_0-ct_0}^{4l-x_0-ct_0} g(s) ds \right].
\end{aligned}$$

Ez azért hasznos, mert $(x_0 - ct_0 + 2l)$, $(4l - x_0 - ct_0)$, $(4l - x_0 - ct_0)$ és $(2l + x_0 - ct_0)$ a $[0, l]$ intervallumból vannak. Nagyon fontos, hogy ez a formula arra a partikuláris (x_0, t_0) -ra vonatkozik, amelyet a legutolsó ábra mutat. Attól függően, hogy hány "visszaverődéssel" juthatunk egy (x, t) pontból a $[0, l]$ intervallumra, felosztjuk a $\{(x, y) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq y\}$ sávot

$$\left. \begin{array}{l} x + ct = kl \\ x - ct = kl \end{array} \right\} \text{alakú egyenesekre.}$$



Az előző feladat (x_0, t_0) pontja a satírozott $(2, 3)$ tartományban volt, mert az $x - ct = kl$ egyenesek irányában **kettő**, az $x + ct = kl$ egyenesek irányában **három** tükröződése van. Tehát ezen $(2, 3)$ tartományban lévő bármely más (x, t) -re az $u(x, t)$ is az $\frac{1}{2}(f(x_0 - ct_0 + 2l) - f(4l - x_0 - ct_0)) + \frac{1}{2c} \left[\int_{2l+x_0-ct_0}^{4l-x_0-ct_0} g(s) ds \right]$ explicit formulával számolható, de más tartományokban az explicit formula különböző lesz.

Ezzel befejeztük az $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$ kezdeti és $u(0, t) = u(l, t) \equiv 0$ kerületi feltételű egyenlet vizsgálatát.

1.1.4. Végtelen hosszú húr esete

Mostantól az $u(0, t) = u(l, t) \equiv 0$ kerületi feltételt elhagyjuk. Marad az a *végtelen hosszú húr esete*, vagy úgy is felfoghatjuk, hogy a hullám egyenlete. $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

Mint korábban a D’Alambert módszernél láttuk, ennek megoldása:

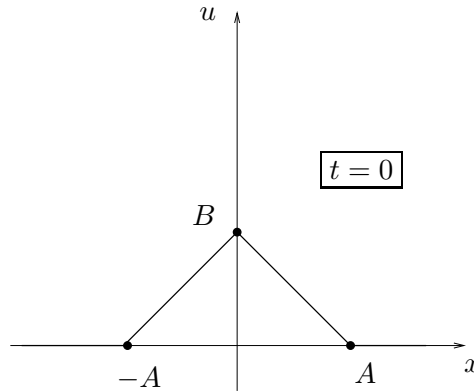
$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

3. PÉLDA: Ha $f(x) \equiv 0$ és $g(x) = \cos x$, akkor

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} (\sin(x + ct) - \sin(x - ct)) = \frac{1}{c} \cos x \sin ct.$$

(Használtuk a $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$ összefüggést.)

4. PÉLDA: Tekintsünk egy végtelen hosszú húrt, amelyet három ujjunkkal lefogunk a $(-a, 0)$; $(a, 0)$; $(0, b)$ pontokban, majd elengedjük. Írjuk fel a húr mozgását leíró $u(x, t)$ függvényt.

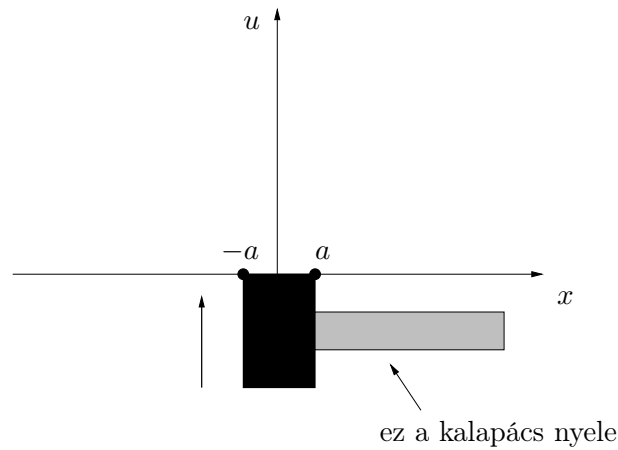
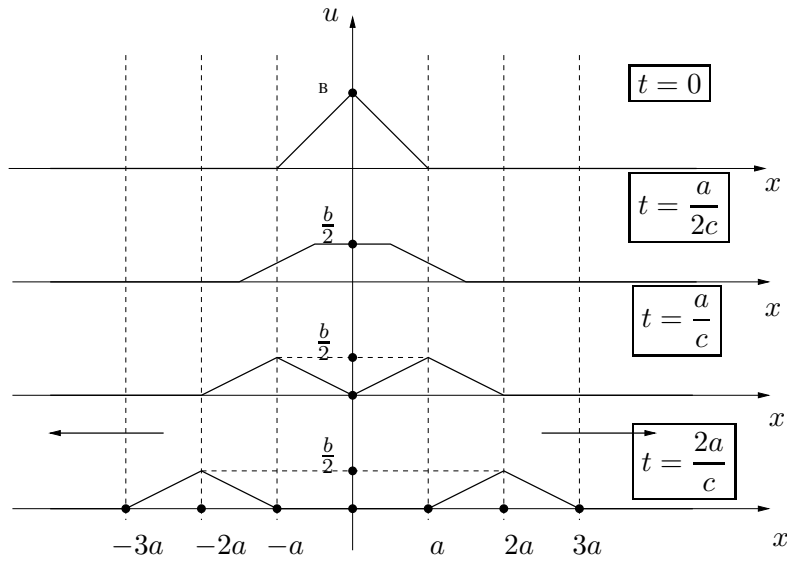


Megoldás: Ekkor $f(x) = \begin{cases} b - \frac{b|x|}{a} & \text{ha } |x| \leq a \\ 0 & \text{ha } |x| > a \end{cases}$ és $g(x) \equiv 0$, hiszen a húrt magára hagytuk. A keresett $u(x, t)$ függvény:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)],$$

melyet a 1.1.4 ábrák szemléltetnek:

5. PÉLDA: Kalapácsütés:



A húr az x tengelyen fekszik, és képzeletben rávágunk egyet a kalapáccsal. Az ütés középpontja az $x = 0$. A kalapácsütés a $t = 0$ -ban az $|x| < a$ pontoknak $g(x) = 1$ sebességet ad, a többi pontnak nem ad sebességet. Írjuk fel a húr alakját leíró $u(x, t)$ függvényt!

Megoldás:

$$f(x) \equiv 0; g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |x| < a \\ 0, & \text{ha } |x| \geq a \end{cases}.$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds = \frac{1}{2c} \{ \text{hossza az: } (x-ct, x+ct) \cap (-a, a) \text{-nak} \}.$$

Ekkor

$$u\left(x, \frac{a}{2c}\right) = \frac{1}{2c} \left\{ \text{hossza az: } \left(x - \frac{a}{2}, x + \frac{a}{2}\right) \cap (-a, a) \text{-intervallumnak} \right\}.$$

Ez különböző $|x| < \frac{a}{2}$ -re; $\frac{a}{2} < x < \frac{3a}{2}$ -re és $x > \frac{3a}{2}$.

A hullámegyenlet megoldásának

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

alakjából látszik, hogy az $(x_0, 0)$ beli kezdeti feltétel hatása c sebességgel, vagy legfeljebb c sebességgel terjed.

1.2. Hővezetés egyenlete

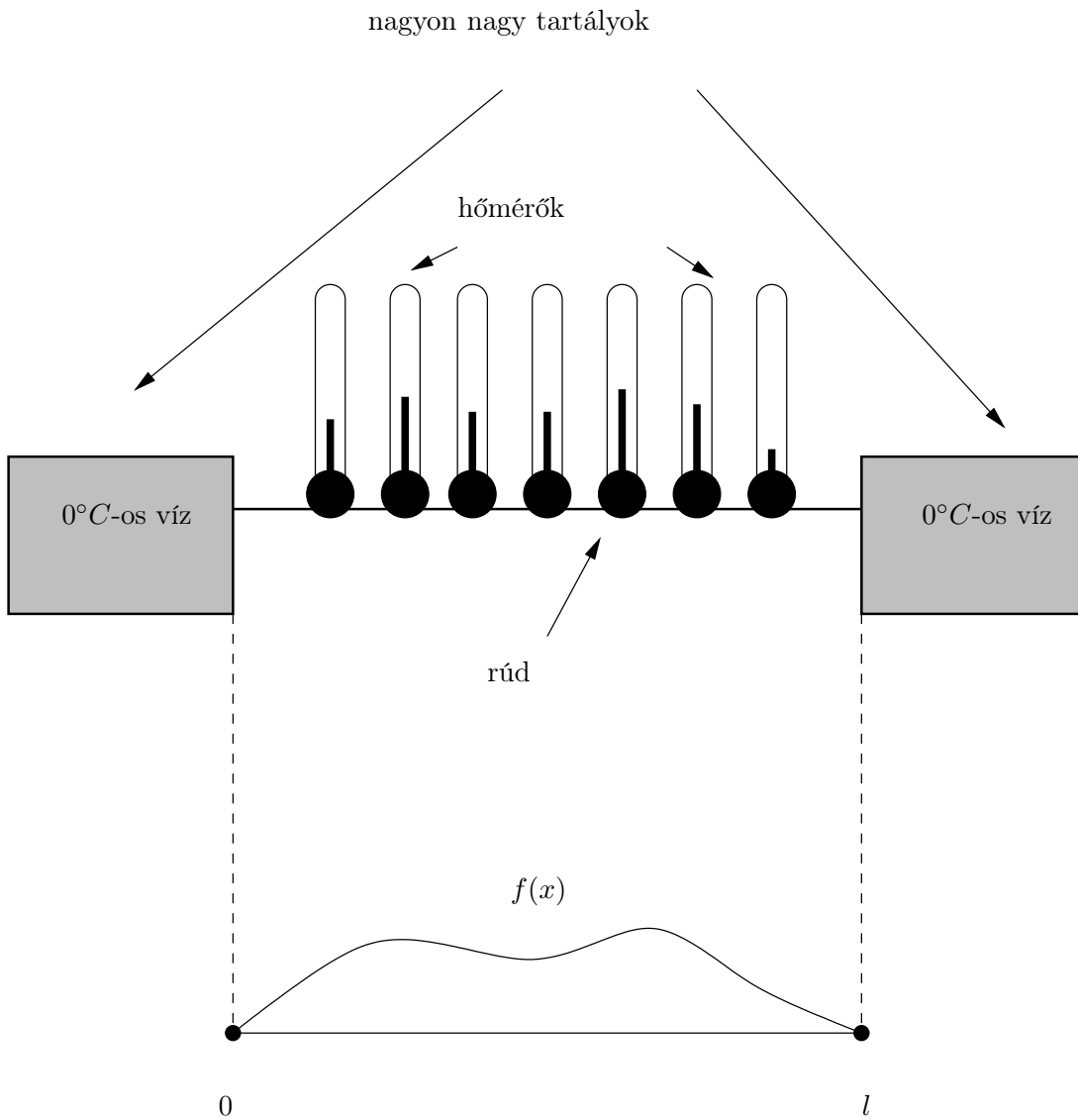
1.2.1. Hővezetés véges hosszúságú rúdban

Képzeljünk el egy rudat, melynek mindkét végét 0°C -os vízzel telt hatalmas tartályokba tették. A rúd hossza l . Úgy képzeljük, hogy a rúd az x tengelyen van, és bal végpontja a *zérus* pont.

A rúd kezdeti hőmérsékletét az $f(x)$ függvény adja meg. Adjuk meg az $u(x, t)$ függvényt, amely a rúd hőmérsékletét írja le az x pontban t idő múlva. A kezdeti hőmérsékletet $t = 0$ -ban a 1.2.1. ábra mutatja. Mivel a hő a melegebb helyről áramlik a hidegebb felé, ezért az ábra által szemléltetett állapot az idő múlásával változik. Egy adott x pontban a rúdnek néha magasabb, néha alacsonyabb a hőmérséklete az idő előrehaladásával. Hogy egy adott x pontban t idő múlva mért $u(x, t)$ hőmérsékletet meghatározhassuk, fel kell használni azt a Fouriertől származó észrevételt, hogy a hőterjedést az

$$u_t = k u_{xx}, \quad (0 < x < l; 0 < t)$$

másodrendű parciális differenciálegyenlet írja le. (Ennek levezetését megtalálhatjuk Simonyi Károly: A fizika kultúrtörténete című könyvében.) A *kezdeti feltétel* a rúd hőmérséklete a $t = 0$ -ban, vagyis $u(x, 0) = f(x)$. A *kerületi feltétel* pedig abból adódik, hogy a rúd két vége olyan nagy 0°C -os vizet tartalmazó tartályokban van, melyeket a rúdból áramló hő nem tud



felmelegíteni. (Ezért kell, hogy a tartályok nagyon nagyok legyenek.) Tehát a *kerületi feltétel*: $u(0, t) = u(l, t) \equiv 0$. Vagyis:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < l, 0 < t \\ u(0, t) = u(l, t) \equiv 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Ezt a problémát is a Fourier-sorok használatával oldjuk meg. (A hővezetés

elméletét Fourier alkotta meg, és a róla elnevezett sorokat pontosan ezen probléma megoldása céljából vezette be 1822-ben.)

Megoldás: Az ismeretlen $u(x, t)$ függvényt, csakúgy mint a rezgő húr esetén

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

alakban keressük. A levezetés követi a rezgő húr differenciálegyenletének levezetésénél alkalmazott lépéseket. Vagyis:

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda = \text{konstans.}$$

Innen:

$$T' = -\lambda kT \Rightarrow T(t) = Ae^{-\lambda kT}.$$

Továbbá:

$$-X''(x) = \lambda X(x), \quad 0 < x < l$$

-re és $X(0) = X(l) = 0$. Ez pontosan az a probléma, mint ami a rezgő húr esetén fordult elő. Amint ott láttuk, ennek megoldása:

$$X(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Tehát

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

feltéve, hogy

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

az $f(x)$ függvény tiszta szinuszos Fourier-sora. Az

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = ku_{xx}, \quad (0 < x < l, 0 < t) \\ u(0, t) = u(l, t) \equiv 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{array} \right\}$$

problémát tehát úgy oldjuk meg, hogy az $f(x)$ függvényt tiszta szinuszos Fourier-sorba fejtjük a $[0, l]$ -en. (Ezt már gyakoroltuk a rezgő húr esetén.) Innen nyerjük az $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ együtthatókat, majd ezek segítségével felírjuk az $u(x, t)$ képletét az $\{A_n\}$ -nek értékeinek behelyettesítésével az

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

összefüggésbe.

A $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ számokat *sajátértékeknek* az $X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ függvényeket pedig *saját függvényeknek* hívjuk. Az ok erre az, hogy ha A egy az $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ -be képező kétszer folytonosan differenciálható függvényeken értelmezett ún. operátor, melyre

$$Ag = -g'',$$

akkor ezzel a jelöléssel

$$AX_n = \lambda_n X_n.$$

Vegyük észre, hogy A -nak végtelen sok sajátértéke van:

$$\frac{\pi^2}{l^2}; \frac{4\pi^2}{l^2}; \frac{9\pi^2}{l^2}; \dots$$

Be lehet látni, hogy A -nak **csak** ezek a sajátértékei.

6. PÉLDA: Oldjuk meg a
$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & (0 < x < l, 0 < t) \\ u(t, 0) = u(t, l) \equiv 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$
 feladatot, ha $l = 10$ és $f(x) = \begin{cases} 20x & \text{ha } 0 \leq x \leq 5 \\ 200 - 20x & \text{ha } 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$

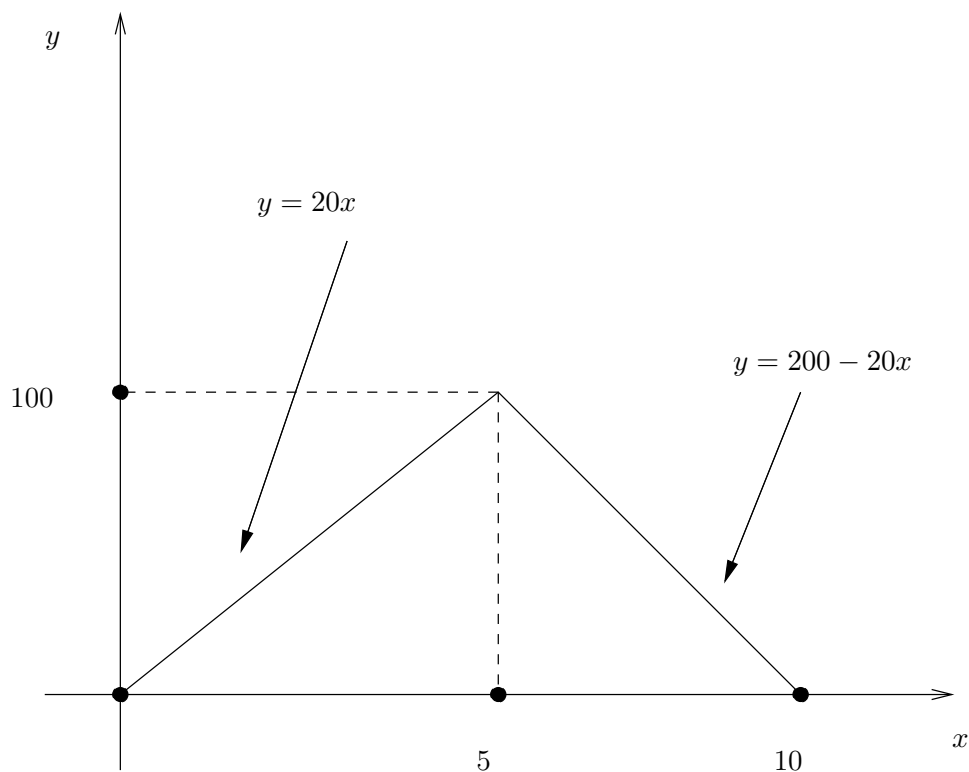
(1.1.2.1. ábra.)

Legyen $k = 1$. Vagyis $t = 0$ -ban a rúd közepén a hőmérséklet 100°C -os, és a vége felé lineárisan csökken 0-hoz.

Megoldás: Tiszta szinuszos Fourier-sorba kell fejteni az $f(x)$ függvényt.

Vagyis meg kell találni az $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ értékeket, melyekre $f(x) = \sum_{n=1}^\infty A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ ($0 \leq x \leq l$). A korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy $A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$.

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{5} \int_0^5 20x \sin \frac{n\pi}{10} x dx + \frac{1}{5} \int_5^{10} (200 - 20x) \sin \frac{n\pi}{10} x dx = \\ &= -200 \frac{-2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + n\pi \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2 \pi^2} + 200 \frac{-2 \sin(n\pi) + n\pi \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2 \pi^2} = \\ &= \frac{800}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right). \quad (1.3) \end{aligned}$$



$$\text{Mivel } \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 4k \\ 1, & \text{ha } n = 4k + 1 \\ 0, & \text{ha } n = 4k + 2 \\ -1, & \text{ha } n = 4k + 3 \end{cases}, \text{ így}$$

$$f(x) = \frac{800}{\pi^2} \left[\frac{\sin \frac{x\pi}{10}}{1^2} - \frac{\sin(\frac{x\pi}{10} 3)}{3^2} + \frac{\sin(\frac{x\pi}{10} 5)}{5^2} - \frac{\sin(\frac{x\pi}{10} 7)}{7^2} + \dots \right].$$

Használva az

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

összefüggést kapjuk:

$$u(x, t) = \frac{800}{\pi^2} \left[\frac{e^{-\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 t} \sin \frac{x\pi}{10}}{1^2} - \frac{e^{-\left(\frac{3\pi}{10}\right)^2 t} \sin(\frac{x\pi}{10} 3)}{3^2} + \frac{e^{-\left(\frac{5\pi}{10}\right)^2 t} \sin(\frac{x\pi}{10} 5)}{5^2} - \dots \right]$$

1.2.2. Fourier- transzformált

A következő probléma megoldásához a Fourier-transzformáltat használjuk, ezért összefoglaljuk annak definícióját, és egyes tulajdonságait.

Legyen $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, amely folytonos (ez nem szükséges, csak azért tesszük fel, mert Lebesgue integrált még nem használtunk), továbbá $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$. Az $f(x)$ Fourier-transzformáltja:

$$F[f](\lambda) = g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

Emlékeztetünk, hogy i az imaginárius egység ($i^2 = -1$).

1. Belátható, hogy $g(\lambda)$ korlátos és folytonos az \mathbf{R} -en, és $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} g(\lambda) = 0$.
2. Ha f' folytonos, és $\int_{-\infty}^{\infty} f'(x) dx < \infty$, akkor $F[f'](\lambda) = i\lambda F[f](\lambda)$, és így $\forall n$ -re $F[f^{(n)}](\lambda) = (i\lambda)^n F[f](\lambda)$ teljesül, ha $f^{(n)}$ folytonos, és $\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x) dx < \infty$.

1.2.3. Hővezetés végtelen hosszú rúdban

Az egyszerűség miatt legyen $k = 1$ a hővezetés $u'_t = ku''_{xx}$, egyenletében. Így a következő problémát vizsgáljuk:

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_t = u''_{xx} \quad -\infty < x < \infty \text{ és } t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{array} \right\}$$

Tegyük fel, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$; $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx$; és $\int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)| dx$ improprius integrálok mind léteznek. ($f \in C^2(\mathbf{R})$). A feladat megoldását azon $u(x, t)$ függvények körében keressük, melyekre $u \in C^2$ (vagyis kétszer folytonosan differenciálható) és

$$(i) \quad \forall x \in \mathbf{R} \text{-re } \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)| dx; \int_{-\infty}^{\infty} |u'_x(x, t)| dx; \int_{-\infty}^{\infty} |u''_{xx}(x, t)| dx < \infty.$$

- (ii) Az $u_t(x, t)$ függvénynek minden $[0, r]$ intervallumon van egy (t -től független) integrálható majoránsa $g(x)$ azaz $|u_t(x, t)| \leq g(x)$ és $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx < \infty$.

Megoldás:

Vegyük az $u'_t = u''_{xx}$ mindkét oldalának x -szerinti Fourier-transzformáltját:

$$v(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\lambda x} dx = F[u]. \text{ Ezzel}$$

$$F[u'_t] = \int_{-\infty}^{\infty} u'_t(x, t) e^{-i\lambda x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\lambda x} dx = v'_t(\lambda, t),$$

ehhez kellett a fenti (ii) feltétel az $u(x, t)$ -re. Mivel $F[u''_{xx}] = -\lambda^2 v(\lambda, t)$, így kapjuk $\forall \lambda$ -ra a t változót tartalmazó *közönséges differenciálegyenletet*:

$$\left. \begin{aligned} v'_t(\lambda, t) &= -\lambda^2 v(\lambda, t) \\ v(\lambda, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \end{aligned} \right\}, \text{ melyre ez egy Cauchy feladat.}$$

Ennek a t változóra vett Cauchy feladatnak a megoldása:

$$v(\lambda, t) = e^{-\lambda^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = e^{-\lambda^2 t} F[f](\lambda).$$

Előző tanulmányainkból tudjuk, hogy $F[e^{-ax^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}$. Az $a = \frac{1}{4t}$ helyettesítéssel kapjuk a következőt:

$$F\left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\right](\lambda) = e^{-\lambda^2 t}.$$

Ezt felhasználva a $v(\lambda, t) = e^{-\lambda^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = e^{-\lambda^2 t} F[f](\lambda)$ számolásánál adódik a következő:

$$F[u](\lambda) = v(\lambda, t) = F\left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\right](\lambda) F[f](\lambda) = F\left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} * f(x)\right],$$

(ahol a *konvolúció* $[h * g](x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) g(x - u) du$.)

Tehát

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} f(x - v) dv.$$

Tehát a Fourier-transzformált segítségével a parciális differenciálegyenlet megoldását közönséges differenciálegyenlet megoldására vezettük vissza.

Irodalomjegyzék

- [1] Raisz Péterné: Közönséges differenciál egyenletek. Tankönyvkiadó, Budapest 1990.
- [2] Reiman József: Matematika II/1. Tankönyvkiadó Budapest 1989.
- [3] Scharnitzky Viktor: Differenciálegyenletek. Műszaki Könyvkiadó Budapest