

Közönséges differenciálegyenletek

1. Bevezetés, definíciók

A differenciálegyenletek olyan egyenletek, melyekben az ismeretlen egy függvény és az egyenletben az ismeretlen függvény deriváltja is előfordul. Például ha $y = y(x)$ az ismeretlen függvény, akkor

$$y' = y \tag{1}$$

$$y'' = -y \tag{2}$$

$$y'' = y \tag{3}$$

$$y = \frac{y}{x} + x \tag{4}$$

függvényegyenletek közül az első három differenciálegyenlet, de a negyedik már nem, mert ott az ismeretlen $y = y(x)$ függvény semelyik deriváltja nem szerepel. A differenciálegyenletek tanulmányozása azért fontos, mert amint Newton mondta: "a természet törvényeit differenciálegyenletek írják le". Az $y' = y$ differenciálegyenletet megoldani annyit jelent, mint megtalálni az összes olyan függvényt, amely egyenlő az ő derivált függvényével. Könnyű látni, hogy minden $c \in \mathbf{R}$ -re az $y = ce^x$ alakú függvényekre igaz, hogy az ő deriváltjaik saját magukkal megegyeznek, tehát az összes $y = ce^x$ alakú függvény a (1) differenciálegyenlet megoldása. (Azt, hogy ennek az egyenletnek minden megoldása $y = ce^x$ alakú, majd később látjuk be.)

A (2) egyenletet illetően, középiskolás tanulmányainkra visszagondolva láthatjuk, hogy mind a $y(x) = \cos(x)$, mind pedig az $y(x) = \sin(x)$ függvényekre igaz, hogy az ő második deriváltjuk saját maguk negatívjával egyezik meg, vagyis, hogy a $\cos(x)$ és $\sin(x)$ függvények a (2) egyenlet megoldását képezik. Azt nagyon könnyű látni, hogy ezek tetszőleges lineáris kombinációja szintén megoldást ad. Tehát tetszőlegesen választott $a, b \in \mathbf{R}$ számokra: az $y(x) = a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$ a (2) diff.egyenlet megoldását adja. Szintén később fogjuk belátni, hogy a (2) egyenlet minden megoldása ilyen alakú. Hasonlóan kapjuk, hogy a (3) egyenlet minden megoldása

$y = a \cdot ch(x) + b \cdot sh(x)$. Az nyilvánvaló, hogy a fenti három differenciálegyenlet a legegyszerűbb alakú nem-triviális differenciálegyenlet. Később látni fogjuk, hogy ezek mindegyike rendkívül fontos is, mert a legfontosabb fizikai alkalmazásokban ezek fordulnak elő.

Az első féléves analízis tanulmányok után már nyilvánvaló, hogy nem lehet remélni sem azt, hogy minden differenciálegyenlet megoldását valamilyen képlettel leírható függvények segítségével megadhatjuk. Ugyanis, az $f(x) = \frac{e^x}{x}$ függvénynek nincs képlettel megadható primitív függvénye. Ez éppen azt jelenti, hogy az $y' = \frac{e^x}{x}$ differenciálegyenletnek nincs képlettel megadható megoldása.

2. Elsőrendű diff.egyenletek

Ebben a fejezetben az

$$y'(t) = F(t, y(t)) \quad (5)$$

alakú differenciálegyenletekkel foglalkozunk. Először a szétválasztható változójú azután pedig az első rendű lineáris differenciálegyenleteket tekintjük. Ezeket meg tudjuk oldani elég egyszerűen. Azután azt vizsgáljuk általános elsőrendű differenciálegyenletekre, hogy a kezdeti érték problémának létezik-e megoldása (egzisztencia) és ha igen akkor egyértelmű-e (unicitás). Ezután **autonóm egyenleteket** tekintünk. Ezek a olyan speciális (5) alakú elsőrendű egyenletek, amelyekre a (5) egyenlet jobb oldala nem függ a t független változótól közvetlenül. (Például $y'(t) = y(t) \cdot (1 - y(t))$ autonóm egyenlet, de $y'(t) = y(t) \cdot (1 - y(t)) + t$ már nem autonóm egyenlet.) A fejezetet az autonóm egyenletek stabilitási vizsgálatával zárjuk.

2.1. Szétválasztható diff.egyenletek

Legyen $f(x)$ egy folytonos függvény valamely I_1 és $g(y)$ egy folytonos függvény valamely I_2 intervallumon, továbbá $g(y) \neq 0$ ha $y \in I_2$. Ekkor az

$$y' = f(x) g(y) \quad (6)$$

alakú elsőrendű közönséges differenciálegyenleteket *szétválasztható változójú differenciálegyenleteknek* hívjuk. Legyen $h(y) = \frac{1}{g(y)}$. Tehát (6) szerint: $h(y) y' = f(x)$. Ekkor a helyettesítéses integrálás szabálya szerint és $\frac{dy}{dx} = y'$ alapján:

$$\underbrace{\int h(y) dy}_{\substack{\text{Ez csak} \\ y\text{-től függ}}} = \underbrace{\int f(x) dx}_{\substack{\text{Ez csak} \\ x\text{-től függ}}} + C.$$

A szétválasztható változójú diff.egyenletek megoldását a következő példán mutatjuk be:

- 1. PÉLDA:** 1. *A normális növekedés egyenlete:* legyen $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ és $a \in \mathbf{R}$

$$y' = ky \text{ és } y(0) = a. \quad (7)$$

ez nagyon fontos egyenlet, mert sokszor előfordul a gyakorlatban ezért a megoldását fejből kell tudni. Nyilvánvalóan szétválasztható változójú diff.egyenlet. $y' = \frac{dy}{dx}$ -et írva: $\frac{dy}{dx} = ky$. Az y -os és x -es tagokat külön oldalra rendezve: $\frac{1}{k} \frac{dy}{y} = dx$. Mindkét oldalt integrálva: $\ln |y| = kx + C$, amiből az $y' = ky$ általános megoldása $y = e^c e^{kx}$. Használva, hogy $a = y(0) = Ce^0$, ebből a (7) Cauchy feladat megoldása:

$$y = ae^{kx}.$$

Ezt kérem jegyezzék meg!

2. $y'y^2 = 1$. Ez a diff.egyenlet szétválasztható változójú, mivel a fenti $f(x) = 1$ és $g(y) = \frac{1}{y^2}$ választással $y' = f(x)g(y)$. Az $y' = \frac{dy}{dx}$ -et írva és a dx -el formálisan átszorozva kapjuk, hogy:

$$y^2 dy = dx.$$

Mindkét oldalt integrálva: $\int y^2 dy = \int dx$. Amiből $\frac{y^3}{3} = x + C$ adódik. Innen $y = \sqrt[3]{3x + C}$ (mivel C tetszőleges konstans, nem kell 3-al megszorozni, mert $3C$ ugyanúgy mindentől független konstans, mint C).

3. $y' = \frac{2xy \ln y}{x^2 - 1}$. ez a diff.egyenlet is szétválasztható változójú, ugyanis ha $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$ -et és $g(y) = y \ln y$ -t írunk akkor a diff.egyenlet $y' = f(x)g(y)$ alakú lesz. A diff.egyenlet megoldása most is úgy történik, hogy $y' = \frac{dy}{dx}$ -et írva:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy \ln y}{x^2 - 1}.$$

Most az y -os és x -es tagokat más-más oldalra rendezve:

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{2x}{x^2 - 1} dx.$$

(Ha $y \ln y \neq 0$.) Mindkét oldalon integrálva:

$$\int \frac{\frac{1}{y} dy}{\ln y} = \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx$$

-ből adódik, hogy $\ln |\ln y| = \ln |x^2 - 1| + \ln C$. (Itt a konstanszt eleve $\ln C$ alakba írtuk, amit megtehetünk, mert az $\ln x$ függvény értékkészlete az \mathbf{R} .) Ahonnan: $y = e^{C(x^2-1)}$. Az $\ln y = 0$ -nak az $y \equiv 1$ felel meg.

2.2. Elsőrendű lineáris diff.egyenletek megoldása

Az

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{8}$$

alakú diff.egyenleteket *elsőrendű lineáris diff.egyenleteknek hívjuk*. It feltételezzük, hogy a $p(x)$ a $q(x)$ függvények folytonosak. (Vagyis a megoldásokat olyan intervallumon keressük ahol a $p(x)$ a $q(x)$ függvények folytonosak.)

Az (8) alakú egyenletek megoldását a következő példán szemléltetjük:

$$xy' + 3y = x^2, \quad x > 0 \tag{9}$$

Ahhoz, hogy az egyenletet (8) alakúra hozzuk el kell osztanunk x -el mind a két oldalon. Ezért, a megoldásokat olyan intervallumokon kereshetjük amelyek a 0-át nem tartalmazzák. Tegyük fel tehát, hogy mostantól $x > 0$ és osszunk el x -el. Kapjuk, hogy

$$y' + \frac{3}{x}y = x. \tag{10}$$

Ekkor az (8) egyenlet jelöléseivel: $p(x) = \frac{3}{x}$; $q(x) = x$. A megoldás két lépésből áll. Először megoldjuk az

$$Y' + \frac{3Y}{x} = 0 \tag{11}$$

homogén diff.egyenletet. Majd ennek az általános megoldásában előforduló C konstans helyére egy olyan $C(x)$ függvényt írunk, hogy ezzel a (9) megoldását kapjuk. Ily módon a (9) egy partikuláris megoldásához jutunk. A (9) általános megoldását úgy kapjuk, hogy

$$y_{i,ált} = Y_{h,ált} + y_{i,p} \quad (12)$$

vagyis a (9) inhomogén egyenlet általános megoldása $y_{i,ált}$ egyenlő az (11) általános megoldása $Y_{h,ált}$ plusz a (9) inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása $y_{i,p}$.

1. lépés: A homogén rész az $Y' + \frac{3Y}{x} = 0$ diff.egyenlet, amely szétválasztható változójú és megoldása: $Y_{h,ált} = C/x^3$.

2.lépés: Most keressük az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását, $y_{i,p}$ -t. Ehhez szeretnénk határozni **egy** olyan $C(x)$ függvényt, amelyre

$$y = C(x) / x^3$$

megoldása a (9) egyenletnek. Mivel $y' = -3Cx^{-4} + C'x^{-3}$, ezt behelyettesítve a (10) egyenletbe kapjuk, hogy

$$C'x^{-3} - 3Cx^{-4} + 3x^{-1}Cx^{-3} = x.$$

Innen: $C(x) = x^5/5$ (itt nem kell feltüntetni az integrárból adódó konstans, mert csak **egy** partikuláris megoldást keresünk). Tehát $y_{i,p} = C(x) \cdot x^{-3} = x^5/5 \cdot x^{-3} = \frac{x^2}{5}$. Így a (10) egyenlet általános megoldása:

$$y_{i,ált} = Y_{h,ált} + y_{i,p} = \underbrace{C \cdot x^{-3}}_{Y_{h,ált}} + \underbrace{\frac{x^2}{5}}_{y_{i,p}}.$$

A megoldásnak ezt a módszerét **konstans variációs módszernek** nevezzük, mert az $y_{i,p}$ -t úgy határoztuk meg, hogy az (11) homogén egyenlet általános megoldásában előforduló C konstans helyettesítettük egy $C(x)$ függvénnyel.

2.3. Egzisztencia, unicitás, stabilitás

Ha egy elsőrendű egyenletet nem is tudunk megoldani, akkor is lehet esélyünk annak a nagyon fontos kérdésnek az eldöntésére, hogy létezik-e és ha

igen akkor egyértelmű-e a megoldás. Ha az előbbire a válasz igen, akkor van egzisztencia, ha a ezen felül a második kérdésre is pozitív a válasz, akkor teljesül az unicitás. A következő tételek nem a lehető legerősebb eredményeket adják, de a legkönnyebben érthetőek.

Először vizsgáljuk az egzisztencia és unicitás kérdést az elsőrendű lineáris egyenletekre:

1. TÉTEL: (Egzisztencia és unicitás Tétel (első rendű lineáris egyenletre))

Ha a $p(t)$ és $q(t)$ függvények folytonosak az $I = (\alpha, \beta)$ nyílt intervallumon és $t_0 \in I$ akkor a

$$y' + p(t)y = q(t), \quad y(t_0) = y_0$$

kezdeti érték probléma megoldása létezik és egyértelmű az I intervallumon. Azaz létezik EGYETLEN olyan $y(t)$ függvény, amely a kezdeti érték problémának megoldása és amely minden $t \in I$ -re értelmezett.

A következő tétel az általános esetre vonatkozik:

2. TÉTEL: (Egzisztencia és unicitás Tétel (általános eset)) Tegyük fel, hogy mind az F mind a $\partial F / \partial y$ folytonos függvények egy olyan $\alpha < t < \beta, \gamma < y < \delta$ téglalapon, amely tartalmazza a (t_0, y_0) pontot. Akkor van olyan $(t_0 - h, t_0 + h) \subset (\alpha, \beta)$ intervallum, amelyben a következő kezdeti érték probléma megoldása létezik és egyértelmű:

$$y' = F(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (13)$$

1. MEGJEGYZÉS: Ha csak annyit tudunk, hogy az $F(x, y)$ függvény folytonos akkor ez már elég ahhoz, hogy a megoldás létezzon, de lehetséges, hogy nem egyértelmű.

2. PÉLDA: A fenti tételek valamelyikét használva találjunk olyan intervallumot, amelyen

$$ty' + 2y = 4t^2 \quad y(1) = 2$$

kezdeti érték probléma megoldása létezik és egyértelmű.

Megoldás: Mindkét oldalt t -vel leosztva kapjuk a

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t$$

egyenletet. Tehát $p(t) = \frac{2}{t}$ és $q(t) = 4t$. Vagyis $q(t)$ értelmezett és folytonos minden $t \in \mathbb{R}$ -re de $p(t)$ a $t = 0$ -ban nincs értelmezve. Tehát vagy azt kell feltennünk, hogy $t > 0$ vagy azt, hogy $t < 0$. Figyelembe véve a kezdeti feltételt a $t > 0$ rész a releváns. Ezután használva az 1. Tételt kapjuk, hogy a kezdeti érték probléma megoldása létezik és egyértelmű a $0 < t < \infty$ intervallumon.

3. PÉLDA: Alkalmazzuk a 2. Tételt a következő kezdeti érték probléma megoldására:

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)} \quad y(0) = -1.$$

Megoldás: Vegyük észre, hogy

$$F(x, y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)} \quad \text{és} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)^2}$$

értelmezett és folytonos mindenütt kivéve az $y \equiv 1$ horizontális egyenest pontjait. A $(0, -1)$ pont körül nyilván rajzolható olyan téglalap ami nem metszi az $y \equiv 1$ egyenest. Ezért a 2. Tétel értelmében a kezdeti érték problémának a megoldása létezik és egyértelmű VALAMELY olyan intervallumon amely a 0-át tartalmazza. Az azonban, hogy akármilyen hosszú olyan téglalapot rajzolhatunk a $(0, -1)$ pont körül, amely nem metszi az $y \equiv 1$ horizontális egyenest NEM jelenti azt, hogy a megoldás létezik minden x -re! Valójában a szétválasztható változójú differenciálegyenletet megoldva kapjuk, hogy a kezdeti érték probléma megoldása:

$$y(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}.$$

Könnyen látható, hogy ez a kifejezés csak $x > -2$ esetén ad megoldást ($x = -2$ -ben $y(-2) = 1$ és az nem lehetséges mert, akkor az egyenletben 0-val kellene osztani és $x < -2$ -re a gyök alatti kifejezés negatív hiszen $x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = (x+2)(x^2+2)$).

4. PÉLDA: Vizsgáljuk a következő kezdeti érték problémát a megoldás létezése és egyértelműsége szempontjából!

$$y' = y^{1/3}, \quad y(0) = 0, t \geq 0.$$

Megoldás:

A 2. Tétel jelöléseit használva: $F(t, y) = y^{1/3}$. Mivel

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t, y) = \frac{1}{3} \cdot y^{-2/3}$$

nincs értelmezve a $y = 0$ -ban ezért ott nem is folytonos, tehát a 2. Tételt nem is alkalmazhatjuk ebben az esetben. Könnyű látni, hogy mind a két függvény

$$y(t) = -\left(\frac{2}{3} \cdot t\right)^{3/2} \text{ és } y(t) = \left(\frac{2}{3} \cdot t\right)^{3/2}$$

megoldása a kezdeti érték problémának. Sőt ennek a kezdeti érték problémának végtelen sok megoldása van. Nevezetesen minden $t_0 > 0$ -ra a következő függvények megoldások a \pm előjel tetszőleges választása esetén:

$$y(t) = \begin{cases} \pm \left[\frac{2}{3}(t - t_0)\right]^{3/2}, & \text{ha } t \geq t_0; \\ 0, & \text{ha } 0 \leq t < t_0. \end{cases}$$

5. PÉLDA: Vizsgáljuk a következő kezdeti érték problémát a megoldás létezése és egyértelmősége szempontjából!

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1.$$

A 2 Tétel feltételei teljesülnek ezért LÉTEZIK a $t = 0$ körül olyan intervallum, amelyben a megoldás létezik és egyértelmű. Sőt erre az ártatlan kinézetű egyenletre tekintve az ember azt gondolná, hogy a megoldás talán az egész számegyenesen létezik. Azonban, ha megoldjuk a szétválasztható változójú egyenletet látjuk, hogy a Cauchy feladat megoldása:

$$y = \frac{1}{1 - t},$$

ami nem értelmezett $t = 1$ -ben tehát a megoldás csak a $(-\infty, 1)$ nyílt intervallumon létezik. Erre a jelenségre az egyenletünk alakja nem figyelmeztet!!!

2.4. Iránymező

Tekintsük az

$$y' = F(t, y) \quad y(t_0) = y_0 \tag{14}$$

kezdeti érték feladatot. Ha $F(t, y) = f(y) \cdot g(t)$, akkor mint tanultuk ez egy szétválasztható változójú egyenlet amit meg tudunk oldani. Ha $F(t, y) = \alpha(t) \cdot y(t) + \beta(t)$ valamilyen $\alpha(t), \beta(t)$ folytonos függvényekre, akkor a (14) egyenlet elsőrendű lineáris egyenlet és megint csak tanultuk, hogy hogyan lehet megoldani. Ezeken kívül még nagyon sok olyan eset van amikor a (14) kezdeti érték feladatot meg tudjuk oldani. Azonban olyan esetek is vannak amikor az egyenletet megoldására semmilyen módszert nem találunk vagy ugyan meg tudjuk oldani az egyenletet de a megoldást olyan bonyolult képlet adja ami nem mond semmit. Az egyik dolog amit ilyen esetben tehetünk ha megnézzük az *iránymezőt* (persze komputerrel). Az *iránymezőt* úgy kapjuk ha a ty sík nagyon sok (t, y) pontján keresztül megrajzoljuk annak az egyenesnek egy picike darabját, amelynek meredeksége $F(t, y)$. Mivel ez az egyenes a keresett megoldás érintője a t -ben ezen vonal elemek a keresett megoldások közelítését adják. Annál pontosabb közelítését minél több ponton keresztül rajzoljuk meg a fenti vonal elemeket.

Ezt az alábbiakban egy példán szemléltetjük: Tekintsük az $y' - 2y = 3e^t$ egyenletet! A Maple programot használva a következőket írjuk:

```
> ode := D(y)(t) - 2*y(t) = 3*exp(t);
```

```
ode := D(y)(t) - 2 y(t) = 3 exp(t)
```

```
> with(DEtools):
```

```
> InitialValues := [[0,1],[0,-5]];
```

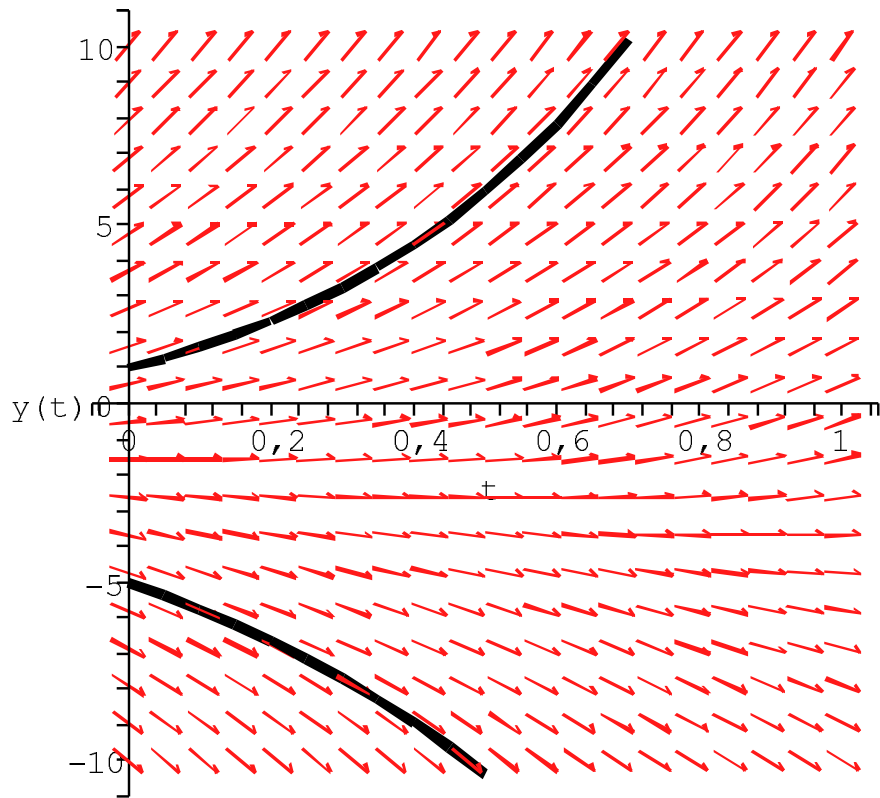
```
InitialValues := [[0, 1], [0, -5]]
```

```
> DEplot(ode, y(t), t=0..1, y=-10..10, InitialValues, linecolor=black);
```

2.4.1. Autonóm egyenletek, stabilitás

Ha a fentiekben vizsgált $y' = F(t, y)$ egyenletben a $F(t, y)$ függvény nem függ a t változótól, akkor autonóm egyenletről beszélünk. Az autonóm egyenletek általános alakja tehát:

$$y' = f(y). \tag{15}$$



1. ábra. Iránymező az $y' - 2y = 3e^t$ egyenletre.

A továbbiakban ha csak mást nem mondunk mindig feltesszük, hogy az $f(y)$ függvény deriváltja létezik és folytonos. Ezért tehát a 2. Tétel értelmében a

$$y' = f(y) \quad y(0) = y_0. \quad (16)$$

kezdeti érték feladat megoldása létezik és egyértelmű a $t = 0$ egy környezetében. Ilyen egyenlet volt például a normális növekedés egyenlete (1. Példa a 3. oldalon) vagy az 5. Példa a 8. oldalon. Az $f(y) = 0$ egyenlet (nem differenciálegyenlet csak sima algebrai egyenlet) megoldásait *kritikus pontoknak*

vagy *egyensúlyi megoldásoknak* hívjuk. Az utóbbi elnevezésnek az az oka, hogy ha $f(y_0) = 0$, akkor az

$$y(t) \equiv y_0$$

konstans függvény megoldása a (15) egyenletnek. Ugyanis mivel ez a függvény egy konstans függvény a (15) egyenletnek mind a jobb mind a bal oldalán az azonosan nulla függvény szerepel. Ekkor tehát az $y(t) \equiv y_0$ konstans függvény megoldása (és az egyetlen megoldása) a (16) kezdeti érték feladatnak. Képzeljük el, hogy az $y(t)$ egy időben változó mennyiséget ír le, ahol t az idő. Ekkor az, hogy az $y(t) \equiv y_0$ megoldása a (16) feladatnak azt jelenti, hogy ha kezdetben $t = 0$ időpillanatban az $y(0)$ értéke y_0 volt, akkor az is marad. Mindez a tulajdonság abból következett, hogy $f(y_0) = 0$. Ezért nevezzük a f függvény zérus helyeit egyensúlyi megoldásoknak. Nézzük ezt egy konkrét példán:

6. PÉLDA:

$$y' = (y - 1)y(y + 1).$$

Az egyensúlyi állapotok az $y = -1, 0, 1$. Az irány mezőt a 2. ábra mutatja. Az a 2. ábrán látható, hogy

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty, & \text{ha } y(0) > 1; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0, & \text{ha } -1 < y(0) < 1; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -\infty, & \text{ha } y(0) < -1. \end{cases}$$

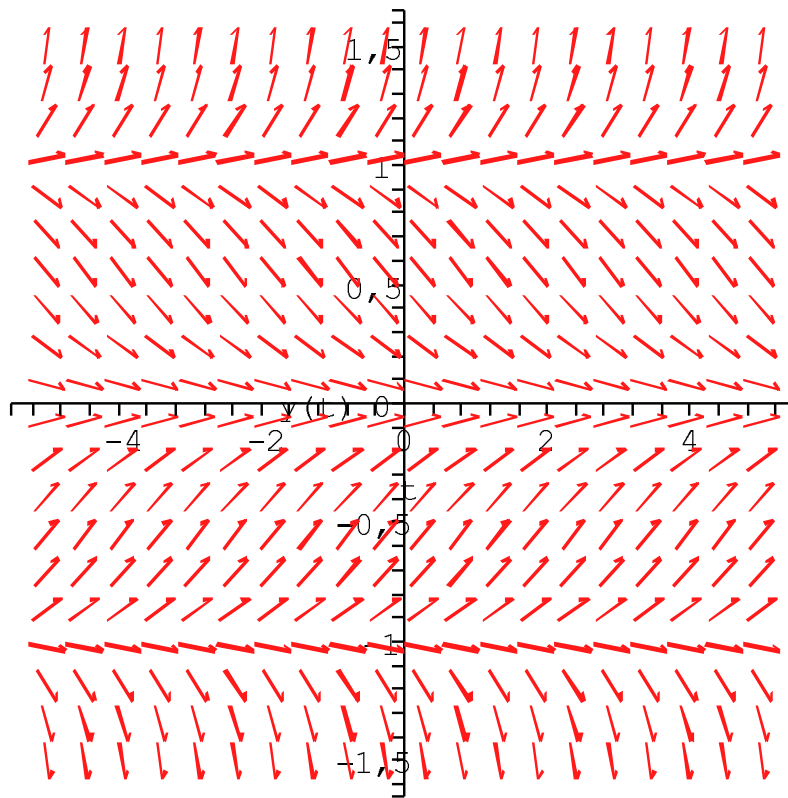
Általánoságban:

1. DEFINÍCIÓ: Az $y(t) \equiv y_0$ egyensúlyi helyzetet *Ljapunov-stabilnak* nevezzük, ha $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, hogyha $\varphi(t)$ az $y' = f(y)$ -nak egy olyan megoldása, melyre $|\varphi(0) - y_0| < \delta$, akkor $|\varphi(t) - y_0| < \varepsilon \forall t$ -re. Ellentétes esetben az $y = y_0$ egyensúlyi állapotot *instabilnak* hívjuk.

A fenti példában tehát $y = 0$ Lyapunov stabil de az $y = -1$ és az $y = 1$ instabil. Továbbá

2. DEFINÍCIÓ: Az $y(t) \equiv y_0$ egyensúlyi helyzet *aszimptotikusan stabil*, ha

- (a) Ljapunov-stabil és



2. ábra. Az $y \equiv 1$ és $y \equiv -1$ egyensúlyi állapotok instabilok az $y \equiv 0$ asszimptotikusan stabil.

- (b) $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = y_0$ teljesül az $y' = f(y)$ minden olyan $\varphi(t)$ megoldására, melyre $\varphi(0)$ az y_0 -hoz elég közel van.

Ez tehát azt mutatja, hogy a fenti példa egyetlen olyan egyensúlyi állapota, amely nem instabil, nevezetesen az $y = 0$, nem csak Lyapunov stabil hanem valójában asszimptotikusan stabil.

7. PÉLDA: Vizsgáljuk az

$$y' = (y - 1)y(y + 1)^2.$$

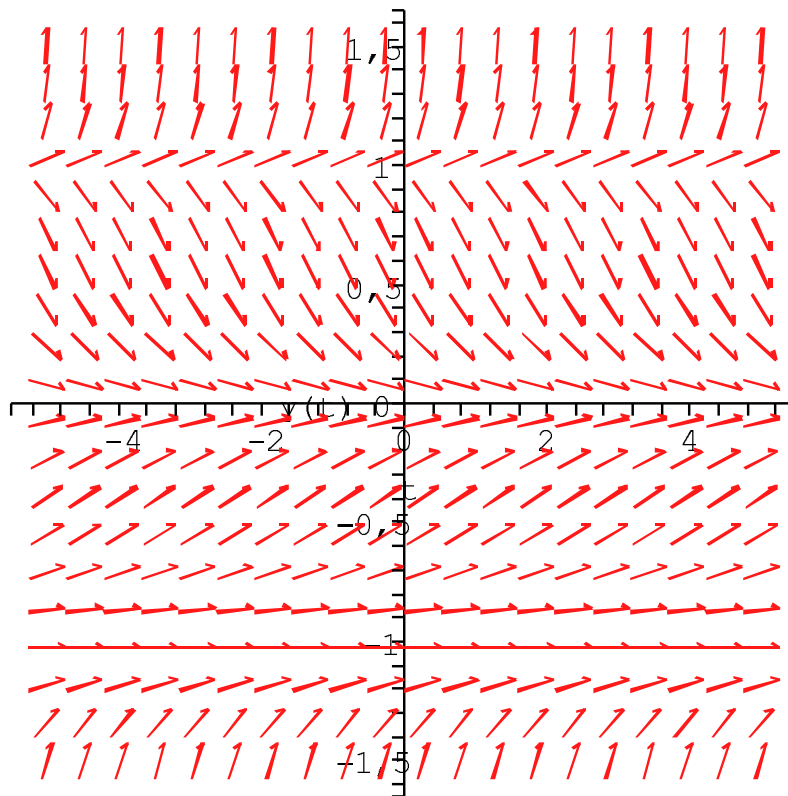
autonóm egyenletet egyensúlyi állapotait stabilitás szempontjából.

Megoldás: Az egyensúlyi helyzetek megint csak $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$. A 3. ábra mutatja az iránymezőt.

Az a 3. ábrán látható, hogy

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty, & \text{ha } y(0) > 1; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0, & \text{ha } -1 < y(0) < 1; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -1, & \text{ha } y(0) < -1. \end{cases}$$

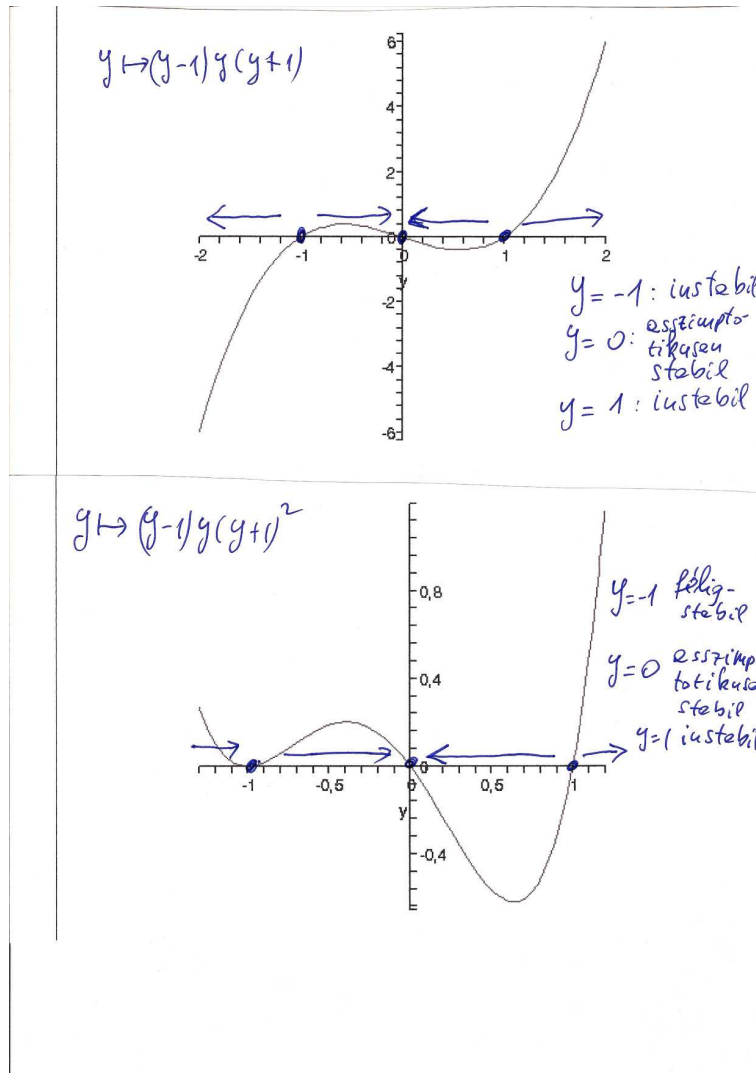
Ebből tehát nyilvánvaló, hogy megint csak az $y = 0$ stabil és a másik két egyensúlyi állapot pedig instabil. Azonban amiatt, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -1$ teljesül, ha $y(0) < -1$ azt mondjuk, hogy az $y = -1$ egyensúlyi állapot *félig-stabil*.



3. ábra. Az $y \equiv 1$ instabil az $y \equiv -1$ félig-stabil, az $y \equiv 0$ asszimptotikusan stabil.

Fázis vonalak: Az egyensúlyi helyzetek stabilitását az iránymező felrajzítása nélkül is nagyon egyszerűen eldönthetjük ún. fázis vonalak segítségével. Először is lerajzoljuk az $f(y)$ függvény görbét és az ábránkon megjelöljük az $f(y)$ függvény zérus helyeit (vagyis az egyensúlyi állapotokat). Ez intervallumokra (két végtelen és néhány véges intervallumra) osztja a számegyeneset. Ha egy ilyen intervallumon az $f(y) > 0$ akkor az intervallumra rajzolunk egy jobbra mutató nyilat, ha egy ilyen intervallumon $f(y) < 0$, akkor az

intervallumra egy balra mutató nyilat rajzolunk. Így kapjuk a fázis vonalakat. Nézzük a fázis vonalakat először a 6. Példa utána pedig a 7. Példa differenciálegyenletére.



4. ábra. Fázis vonalak

Ha egy intervallumon a fázis vonal jobbra mutat az azért van mert ott $f(y) > 0$. Mivel $y' = f(y)$ ezért itt a megoldás növekszik. Fordítva, ha a fázis vonal balra mutat, akkor a megoldás csökken. Ez tehát azt adja,

hogy ha egy egyensúlyi állapotot körülvevő két intervallum mindegyikén ezen egyensúlyi állapot felé mutat a nyíl, akkor az az egyensúlyi állapot asszimptotikusan stabil. Ha csak az egyik nyíl mutat az egyensúlyi állapot felé, akkor az egyensúlyi állapot félig stabil és ha mind a két nyíl az egyensúlyi állapottól ellenkező irányba mutat, akkor az egyensúlyi állapot instabil.

2.5. Euler formula

A célunk az, hogy definiáljuk az olyan kifejezéseket mint például

$$3^{2+4i},$$

i az imaginárius egység $i \cdot i = -1$. Vegyük észre, hogy ehhez elég értelmezni az e alapú és komplex kitevőjű hatványokat. Nevezetesen, használva, hogy $3 = e^{\ln 3}$ kapjuk, hogy

$$3^{2+4i} = e^{2 \cdot \ln 3 + i4 \cdot \ln 3}.$$

Tehát definiálnunk kell az e^{a+bi} , $a, b \in \mathbb{R}$ számokat.

3. DEFINÍCIÓ: Valamely $z \in \mathbb{C}$ -re

$$e^z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (17)$$

Helyettesítsük ebbe a képletbe $z = i \cdot t$, ahol t egy valós szám. Ekkor:

$$e^{it} = \underbrace{1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots}_{\cos t} + i \cdot \underbrace{\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \right)}_{\sin t} = \cos t + i \cdot \sin t.$$

Kapjuk tehát az ún. **Euler formulát:**

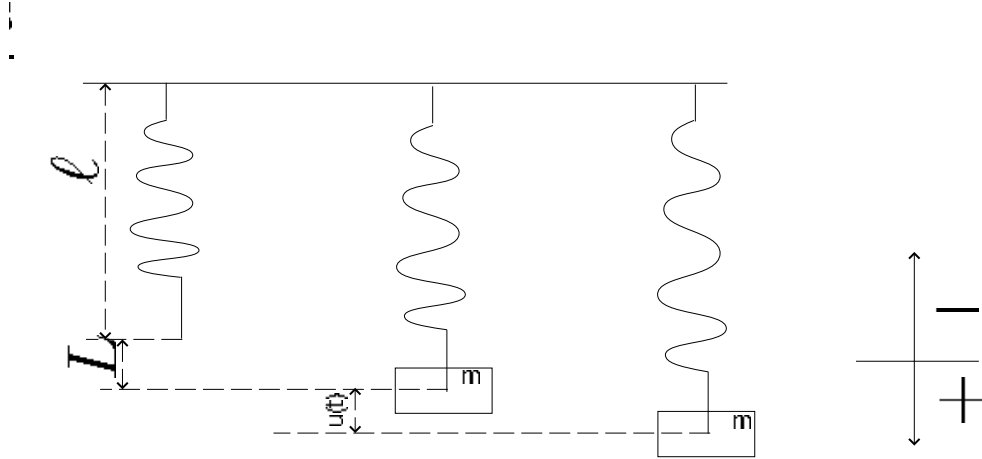
$$\underline{e^{it} = \cos t + i \cdot \sin t, \quad t \in \mathbb{R}.} \quad (18)$$

Ebből már könnyű meghatározni a 3^{2+4i} értékét. Nevezetesen:

$$\begin{aligned} 3^{2+4i} &= 9 \cdot 3^{4i} = 9 \cdot \left(\underbrace{e^{(\ln 3)}}_3 \right)^{4i} = 9 \cdot e^{(4 \ln 3)i} \\ &= 9 \cdot \left(\underbrace{\cos(4 \ln 3)}_{-0.3126103028} + \underbrace{\sin(4 \ln 3)}_{-0.9498814656} \cdot i \right) \\ &= -2.813492725 - 8.548933190 \cdot i. \end{aligned}$$

3. Másodrendű lineáris egyenletek

3.1. Csillapított harmonikus rezgőmozgás



5. ábra. Rugó

Egy vízszintes rúdra függesztünk egy rugót, melynek hossza eredetileg ℓ . Ezután erre a rúdra egy m tömegű testet helyezünk. Ekkor a test kitér L egységnyit majd egyensúlyba kerül. A testre ható erők :

Gravitációs erő: $w = mg$,

Hooke törvénye miatt: $F_s = -kL$.

Tehát ebben a pillanatban:

$$mg = -kL \quad (20)$$

Képzeljük el, hogy a testet kimozdítjuk és magára hagyjuk. Célunk a test mozgásának leírása súrlódási erő jelenléte esetén.

Newton törvénye szerint a testre ható erők eredője $f(t)$ egyenlő a tömeg szorozva a gyorsulással. Ha a testnek a $\ell + L$ szinttől való eltérését a t időben az $y(t)$ függvény adja meg, akkor:

a test sebessége: $y'(t)$,

a test gyorsulása: $y''(t)$.

Tehát Newton törvénye szerint: e

$$m \cdot y''(t) = f(t). \quad (21)$$

Az $f(t)$ a testre ható erők eredője. Tehát

$$m \cdot y''(t) = f(t) = \underbrace{mg}_{\text{gravitációs erő}} + \underbrace{(-k(L + y(t)))}_{\text{rugó erő}} + \underbrace{(-\gamma y'(t))}_{\text{surlódási erő}} + \underbrace{F(t)}_{\text{külső erő}} \quad (22)$$

Kihasználjuk, hogy a (20) egyenlet szerint: $mg = -kL$. Ezért (22)-et rendezve kapjuk, hogy

$$my'' + \gamma y' + ky = F(t) \quad (23)$$

másodrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet írja le a csillapított harmonikus rezgő mozgást. Ezért vizsgáljuk általában a másodrendű lineáris differenciálegyenleteket.

3.2. Az inhomogén lineáris egyenlet általános megoldása

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = r(t), \quad (24)$$

alakú egyenletek a **másodrendű lineáris egyenletek**, feltéve, hogy az $a_2(t), a_1(t)$ függvények folytonosak. Ha egy I (véges vagy végtelen) intervallumon az $a_2(t) \neq 0$, akkor vele leosztva kapjuk, az

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad (25)$$

egyenletet. Ebben a fejezetben azt tanuljuk, hogy a (25) alakú egyenletek hogyan lehet megoldani. A (25) alakú egyenletet *inhomogénnek* nevezzük, ha $g(t) \neq 0$; *homogénnek* hívjuk, ha $g(t) = 0$.

Ebben az esetben is érvényes az a formula amit az elsőrendű lineáris egyenletek esetén tanultunk:

$$y_{i,\text{ált}} = Y_{h,\text{ált}} + y_{i,p} \quad (26)$$

Vagyis a (25) inhomogén egyenletet úgy oldjuk meg, hogy először meghatározzuk a megfelelő

$$Y'' + p(t)Y' + q(t)Y = 0 \quad (27)$$

homogén egyenlet általános megoldását $Y_{h,\text{ált}}$ és ennek ismeretében kiszámoljuk a (25) egyenlet egy partikuláris megoldását vagyis az $y_{i,p}$ függvényét. Ezen az előadáson a homogén rész megoldási módszerét tanuljuk.

3.3. Homogén egyenletek

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \quad (28)$$

alakú

8. PÉLDA: 1. $y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 0; \quad (t > 0)$

2. $y'' + y = 0$

3. $y'' - y = 0$

4. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy az $\{y_1(t), y_2(t)\}$ függvények az a (28) egyenlet fundamentális megoldásai, ha

1. $y_1(t), y_2(t)$ megoldásai a (28) egyenletnek

2. az $y_2(t)$ függvény NEM konstans szorosa az $y_1(t)$ függvénynek.

A (8) Példabeli egyenleteket tekintve:

$$y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 0; \quad (t > 0)$$

esetén könnyen ellenőrizhető, hogy mind az $y_1(t) = t$ és az $y_2(t) = t^2$ megoldásai az egyenletnek és ezek nyilván nem konstans szorosai egymásnak tehát az $\{t, t^2\}$ függvény pár az egyenlet fundamentális megoldásai.

$$y'' + y = 0$$

egyenletnek az $y_1(t) = \cos t, y_2(t) = \sin t$ függvények megoldásai. mivel nem konstans szorosai egymásnak, ezért ők fundamentális megoldást képeznek.

$$y'' - y = 0$$

egyenletnek megoldásai az $y_1(t) = e^t, y_2(t) = e^{-t}$ függvények. Mivel nem konstans szorosai egymásnak, ezért ők fundamentális megoldást képeznek. Vegyük észre, hogy ugyan ennek az egyenletnek az $y_1(t) = \sinh t, y_2(t) = \cosh t$ függvények is megoldásai. Mivel ezek sem konstans szorosai egymásnak, ezért ők **IS** fundamentális megoldást képeznek.

3. TÉTEL: Ha az $\{y_1, y_2\}$ függvények a homogén (28) fundamentális megoldása, akkor a (28) egyenlet **összes** megoldását megkapjuk

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \text{ alakban valamely } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ -re.} \quad (29)$$

Vagyis ha $\{y_1, y_2\}$ a (28) egyenlet fundamentális megoldása, akkor a (28) általános megoldása:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (30)$$

Ez a jelenség analóg a következőhöz: Legyen a tér valamely origón átmenő S síkjának két egymással nem párhuzamos vektora: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in S$. Ekkor az S sík minden vektora \mathbf{w} vektora előállítható \mathbf{v}_1 -el és \mathbf{v}_2 -vel párhuzamos komponensek összegeként. Ugyanez algebrailag: $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, úgy hogy

$$\mathbf{w} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2. \quad (31)$$

A (29) és a (31) egyenleteknek ugyanaz a lényege, csak az előbbiben a $w, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ szerepét az y, y_1, y_2 függvények játsszák.

9. PÉLDA: Tekintsük a másodrendű lineáris homogén

$$y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 0, \quad t > 0 \quad (32)$$

egyenletet. Szemrevételezéssel azonnal látható, hogy az $y_1(t) = t$ egy megoldása az egyenletnek. Próbálkozással hamar rájöhettünk arra is, hogy az $y_2(t) = t^2$ is megoldása az egyenletnek. Ezek nem szám szorosai egymásnak. Tehát az egyenletnek

$$\{y_1(t) = t, y_2(t) = t^2\}$$

fundamentális megoldása. Ebből azután az előző tétel alkalmazásával kapjuk, hogy az egyenlet általános megoldása:

$$y(t) = c_1 \cdot t + c_2 \cdot t^2, \quad t > 0.$$

3.3.1. Konstans együtthatós másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletek.

Most azzal a speciális esettel foglalkozunk, amikor az együttható függvények konstansok, vagyis

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (a \neq 0). \quad (33)$$

Ebben az esetben egy másodfokú egyenlet (amit majd karakterisztikus a egyenletnek hívunk) megoldása nyomán kapott gyökökből azonnal kapjuk a (33) differenciálegyenlet fundamentális megoldását. Azonban meg kell különböztetnünk három esetet annak megfelelően, hogy a karakterisztikus egyenlet két különböző valós, két azonos valós- vagy egy komplex konjugált-pár gyökkel rendelkezik.

1. Ötlet: Keressük a (33) differenciálegyenlet megoldását

$$y(t) = e^{r \cdot t},$$

alakban, ahol a r alkalmasan választott komplex vagy valós szám.

Ha a fenti ötletet akarjuk megvalósítani, akkor meg kell találnunk azokat a valós vagy komplex r számokat, melyekre az $y(t) = e^{rt}$ megoldása a (33)-nek nevezett

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (a \neq 0).$$

differenciálegyenletnek. Ehhez vegyük észre, hogy $y(t) = e^{rt}$ esetén

$$y' = re^{rt} \quad y'' = r^2e^{rt}.$$

Ezeket helyettesítjük a differenciálegyenletbe és osztunk e^{rt} -vel:

$$a \cdot r^2e^{rt} + b \cdot re^{rt} + c \cdot e^{rt} = 0 \quad : e^{rt}$$

kapjuk:

1. LEMMA: Legyenek r_1 és r_2 (akár valós, akár komplex) gyökei az

$$a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0 \tag{34}$$

ún. **karakterisztikus egyenletet**nek. Ekkor a

$$t \mapsto e^{r_1 t} \text{ és a } t \mapsto e^{r_2 t}$$

függvények az

$$ay'' + by' + cy = 0$$

differenciálegyenlet megoldásai. Ha $r_1 \neq r_2$, akkor az

$$y_1 = e^{r_1 t} \text{ és az } y_2 = e^{r_2 t}$$

függvények a differenciálegyenlet fundamentális megoldását alkotják.

Három esetet különböztetünk meg:

I.eset $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ és $r_1 \neq r_2$. Ekkor a differenciál egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (35)$$

II. eset $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ de $r := r_1 = r_2$. Vegyük észre, hogy ekkor a

$$t \mapsto t \cdot e^{rt}$$

függvény is megoldás. Ezért az alaprendszer:

$$e^{rt}, t \cdot e^{rt}.$$

Tehát az általános megoldás:

$$y(t) = c_1 \cdot e^{rt} + c_2 \cdot t \cdot e^{rt}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

III.eset $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$. A fenti Lemma szerint az $\{e^{r_1 t}, e^{r_2 t}\}$ egy fundamentális megoldás. Igen ám de ezek komplex függvények és mi valós függvényekből álló megoldást akarunk! Itt fel kell használnunk azt az A1 tárgyban tanult tételt, hogy ha az r_1, r_2 számok **komplex** gyökei a **valós** együtthatós

$$a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$$

másodfokú egyenletnek, akkor ők egymás komplex konjugáltjai. Vagyis, ha $r_1 = u + i \cdot v$, akkor $r_2 = u - i \cdot v$, ahol $u, v \in \mathbb{R}$. Ekkor tehát

$$\begin{aligned} e^{r_1 t} &= e^{ut} e^{ivt} = e^{ut} \cdot (\cos(vt) + i \sin(vt)) \\ e^{r_2 t} &= e^{ut} e^{-ivt} = e^{ut} \cdot (\cos(vt) - i \sin(vt)) \\ \frac{e^{r_1 t} + e^{r_2 t}}{2} &= e^{ut} \cos(vt) \\ \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{2i} &= e^{ut} \sin(vt) \end{aligned}$$

Vagyis ha $r_1 = u + i \cdot v$, $r_2 = u - i \cdot v$ komplex gyökök, akkor az

$$y_1 = e^{ut} \cos(vt) \quad y_2 = e^{ut} \sin(vt)$$

az egyenlet egy fundamentális megoldása és az egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 \cdot e^{ut} \cos(vt) + c_2 \cdot e^{ut} \sin(vt). \quad (36)$$

10. PÉLDA: Oldjuk meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$y'' + y' - 30y = 0, \quad y(0) = 5; \quad y'(0) = -8.$$

Megoldás: A karakterisztikus egyenlet:

$$r^2 + r - 30 = 0.$$

Ennek gyökei: $r_1 = 5, r_2 = -6$. Tehát

$$y_1 = e^{5t}, \quad y_2 = e^{-6t}$$

az egyenlet fundamentális megoldása. Vagyis az egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-6t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Az általános megoldás deriváltja:

$$y' = 5c_1 e^{5t} - 6c_2 e^{-6t}.$$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} 5 = y(0) &= c_1 + c_2 \\ -8 = y'(0) &= 5c_1 - 6c_2. \end{aligned}$$

Ebből adódik, hogy $c_1 = 2$ és $c_2 = 3$. Vagyis a kezdeti érték feladat megoldása:

$$y = 2e^{5t} + 3e^{-6t}.$$

11. PÉLDA: Oldjuk meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 7.$$

Megoldás: A karakterisztikus egyenlet:

$$r^2 - 6r + 9 = 0.$$

Ennek gyökei: $r = 3$ kétszeres gyök. Tehát a

$$y_1(t) = e^{3t}, \quad y_2(t) = t \cdot e^{3t}$$

fundamentális megoldás. Ezért az általános megoldás:

$$y = c_1 \cdot e^{3t} + c_2 \cdot t \cdot e^{3t}.$$

Az általános megoldás deriváltja:

$$y' = 3c_1 e^{3t} + c_2 e^{3t} + 3c_2 t e^{3t}.$$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} 1 = y(0) &= c_1 \\ 7 = y'(0) &= 3c_1 + c_2. \end{aligned}$$

Tehát $c_1 = 1$ és $c_2 = 4$. Vagyis a kezdeti érték feladat megoldása:

$$y = e^{3t} + 4te^{3t}.$$

12. PÉLDA: Oldjuk meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$y'' - 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = 1.$$

Megoldás: A karakterisztikus egyenlet:

$$r^2 - 4r + 13 = 0.$$

Ennek gyökei: $r_1 = 2 + 3i$ és $r_2 = 2 - 3i$. Tehát a

$$y_1(t) = e^{2t} \cos(3t), \quad y_2(t) = e^{2t} \cdot \sin(3t)$$

fundamentális megoldás. Ezért az általános megoldás:

$$y = c_1 \cdot e^{2t} \cos(3t) + c_2 e^{2t} \cdot \sin(3t).$$

Az általános megoldás deriváltja:

$$\begin{aligned} y' &= 2c_1 e^{2t} \cos(3t) - 3c_1 e^{2t} \sin(3t) \\ &+ 2c_2 e^{2t} \sin(3t) + 3c_2 e^{2t} \cos(3t) \end{aligned}$$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} 2 = y(0) &= c_1 \\ 1 = y'(0) &= 4 + 3c_2. \end{aligned}$$

Tehát $c_1 = 2$ és $c_2 = -1$. Vagyis a kezdeti érték feladat megoldása:

$$y = 2e^{2t} \cos(3t) - e^{2t} \sin(3t).$$

3.3.2. Konstans együtthatós másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek.

Tegyük fel, hogy egy véges vagy végtelen I intervallum minden pontjában értelmezett és folytonos a $p(t), q(t), g(t)$ függvények mindegyike. Most azzal foglalkozunk, hogy a

$$ay'' + by' + cy = g(t), \quad a \neq 0 \text{ és } t \in I \quad (37)$$

konstans együtthatós másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletet hogyan lehet megoldani. Már tanultuk, hogy a (37) egyenlet megoldásának első lépése az, hogy felírjuk a megfelelő homogén egyenletet, vagyis az

$$aY'' + bY' + cY = 0 \quad (38)$$

egyenletet. Meghatározzuk ennek $Y_{h,lt}$ általános megoldását az előző fejezetben tanult módon. Ezután már csak a (37) inhomogén egyenlet **egyetlen** $y_{i,p}$ megoldását kell megtalálnunk hogy felírhatjuk az inhomogén (37) egyenlet általános megoldását:

$$y_{i,ált} = Y_{h,ált} + y_{i,p}. \quad (39)$$

Ennek a fejezetnek a célja két olyan módszer ismertetése, amelyek segítségével megtalálhatjuk a fenti $y_{i,p}$ megoldást.

Először az ún. "**próbafüggvény módszer**" tárgyaljuk.

Próba függvény módszer: Ezt nem mindig lehet alkalmazni, csak ha a (37) egyenletben a $g(t)$ függvény alakja

$$g(t) = e^{ut} (A_n(t) \cos(vt) + B_m(t) \sin(vt)), \quad (40)$$

ahol $A_n(t), B_m(t)$ olyan polinomok melyeknek rendje, n és m Vagyis valamely a_0, \dots, a_n és b_0, \dots, b_m valós számokra

$$A_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0, \quad B_m(t) = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \dots + b_1 t + b_0 \quad (41)$$

13. PÉLDA: A következő függvények mind (40) alakúak a konstansok és polinomok mellékelt választásaival:

1. $g(t) = 1 - 30t,$

$$u = 0, v = 0, n = 1, A_n(t) = 1 - 30t.$$

$$2. \quad g(t) = e^{5t}, \quad u = 5, v = 0, n = 0, A_0(t) \equiv 1,$$

$$3. \quad g(t) = e^{-6t} \cos(3t), \quad u = -6, v = 3, n = 0, A_0(t) \equiv 1, m = 0, B_m(t) \equiv 0.$$

$$4. \quad g(t) = t^2, \quad u = 0, v = 0, m = 2, A_2(t) = t^2.$$

$$5. \quad g(t) = te^{7t} \quad u = 7, v = 0, n = 1, A_1(t) = t.$$

A (37) egyenlet egy $y_{i,p}$ partikuláris megoldásának próbafüggvény módszerrel történő meghatározását egy konkrét példán ismertetjük.

$$y'' + y' - 30y = e^{5t}. \quad (42)$$

1. Megoldjuk a (42) egyenletnek megfelelő

$$Y'' + Y' - 30Y = 0$$

HOMOGÉN egyenletet. Ennek felírjuk a karakterisztikus egyenletét és meghatározzuk ennek gyökei. Ez az egyenlet előfordult a 10. Példában ezért mint ott láttuk a karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$r_1 = 5 \text{ és } r_2 = -6.$$

2. Most meghatározzuk a (40) formulához tartozó u és v számokat. Mint a (13). Példa 2. részében láttuk ezek:

$$u = 5, v = 0.$$

3. Legyen $s \in \{0, 1, 2\}$ definíció szerint az $u + i \cdot v$ komplex szám multiplicitása a karakterisztikus egyenlet gyökei között. Ez azt jelenti, hogy

(a) $s = 0$, ha $u + i \cdot v$ nem szerepel a karakterisztikus egyenlet gyökei között,

- (b) $s = 1$ ha $u + i \cdot v$ egyszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek,
- (c) $s = 2$ ha a karakterisztikus egyenletnek egyetlen, kétszeres multiplicitású gyöke van, ami éppen egyenlő $u + i \cdot v$ -vel.

A mi esetünkben $u + i \cdot v = 5$, ami a karakterisztikus egyenlet gyökei között egyszer szerepel, ezért

$$s = 1.$$

Ezek után a (42) egyenlet egy $y_{i,p}$ partikuláris megoldását kereshetjük

$$y_{i,p} = t^s e^{ut} (P_k(t) \cos(vt) + Q_k(t) \sin(vt)) \quad (43)$$

alakban, ahol

$$k := \max \{n, m\}$$

és

$$P_k(t) = p_k t^k + \dots + p_1 t + p_0 \quad Q_k(t) = q_k t^k + \dots + q_1 t + q_0$$

általános alakú k -ad fokú polinomok.

A mi általunk vizsgált speciális esetben: $n = m = 0$ tehát $k = 0$. Az általános 0-ad fokú polinomok a konstans függvények. Ezért a mi speciális esetünkben a (43) alakja

$$y_{i,p} = C \cdot e^{5t} \cdot t. \quad (44)$$

Annyi maradt mindössze, hogy a fenti C konstanst meg kell határoznunk az $y_{i,p} = C \cdot e^{5t} \cdot t$ függvénynek az eredeti (42) egyenletbe való vissza helyettesítésével. Ehhez kellenek az első és a második deriváltak:

$$y'_{i,p} = C \cdot e^{5t} + 5 \cdot C t e^{5t} \quad \text{és} \quad y''_{i,p} = 10 \cdot C e^{5t} + 25 \cdot C t e^{5t}.$$

Ezeket a (42) egyenletbe vissza írva kapjuk:

$$\underbrace{10C e^{5t} + 25C t e^{5t}}_{y''(t)} + \underbrace{C e^{5t} + 5C t e^{5t}}_{y'(t)} - 30 \underbrace{C t e^{5t}}_{y(t)} = e^{5t}.$$

Innen kapjuk, hogy $C = \frac{1}{11}$: Vagyis

$$y_{i,p} = \frac{1}{11} t e^{5t}.$$

Ezért:

$$y_{i,\acute{a}lt} = Y_{h,\acute{a}lt} + y_{i,p} = \underbrace{C_1 e^{5t} + C_2 e^{-6t}}_{Y_{h,\acute{a}lt}} + \underbrace{\frac{1}{11} t e^{5t}}_{y_{i,p}}.$$

Konstans variációs módszer: Ezt a módszert is az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának meghatározására használjuk. Abban különbözik az előző módszertől, hogy

- bármilyen **folytonos** jobb oldali $g(t)$ függvény esetén a (37) egyenlet megoldható.
- nem csak konstans de függvény együtthatós másodrendű lineáris inhomogén egyenletek partikuláris megoldására is használható. Vagyis ha a $p(t), q(t), g(t)$ függvények folytonosak az I intervallumon és az

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad t \in I \quad (45)$$

egyenlet homogén részének

$$Y'' + p(t)Y' + q(t)Y = 0$$

ismerjük egy fundamentális megoldását, a akkor konstans variációs módszerrel megkapjuk a (45) egyenlet egy $y_{i,p}$ partikuláris megoldását.

- A legtöbb olyan esetben mikor az egyenlet konstans együtthatós és jobb oldali $g(t)$ függvény (40) alakú az előbb tanult próbafüggvény módszer kevesebb számolással ad eredményt. Tehát a most bemutatásra kerülő módszer sokkal általánosabb (működik függvény együtthatós esetben is és nem csak speciális jobboldalra), de azért amikor lehet próba függvény módszert jobb választani.

A (45) egyenlet egy partikuláris megoldásának meghatározása konstans variációs módszerrel egy példán keresztül:

Tekintsük a

$$y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 2t; \quad t > 0 \quad (46)$$

másodrendű lineáris inhomogén függvény együtthatós differenciálegyenletet. Próbálgatással könnyen látható, hogy mint az

$$y_1(t) = t \text{ és } y_2(t) = t^2$$

függvények fundamentális megoldását képezik az

$$Y'' - \frac{2}{t}Y' + \frac{2}{t^2}Y = 0 \quad (47)$$

homogén egyenletnek. Tehát ezen homogén egyenlet általános megoldása:

$$Y_{h,ált} = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = C_1 t + C_2 t^2 \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

A módszer ötlete az, hogy a (46) egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_{i,p} = C_1(t) \cdot y_1(t) + C_2(t) \cdot y_2(t) = C_1(t) \cdot t + C_2(t) \cdot t^2 \quad (48)$$

alakban keressük. Vagyis keressük azon $C_1(t), C_2(t)$ **függvényeket**, melyekre a fenti $y_{i,p} = C_1(t) \cdot t + C_2(t) \cdot t^2$ a (47) egyenlet egy megoldása lesz. Be lehet látni (itt nincs rá időnk), hogy a keresett $C_1(t), C_2(t)$ függvényeket megkapjuk, ha megoldjuk a keresett függvények $C_1'(t), C_2'(t)$ deriváltjaira vonatkozó

$$\begin{aligned} C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) &= 0 \\ C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) &= g(t) \end{aligned} \quad (49)$$

egyenletet. Ez a mi speciális esetünkben ($y_1(t) = t, y_2(t) = t^2$):

$$\begin{aligned} C_1'(t) \cdot t + C_2'(t) \cdot t^2 &= 0 \\ C_1'(t) \cdot 1 + C_2'(t) \cdot 2t &= 2t. \end{aligned} \quad (50)$$

Ennek megoldása

$$C_1'(t) = -2t, \quad C_2'(t) \equiv 2.$$

Ezt integrálva (konstansok nélkül mert csak egy partikuláris megoldást keresünk):

$$C_1(t) = -t^2 \text{ és } C_2(t) = 2t.$$

Tehát ezt (48)-ba vissza írva:

$$y_{i,p} = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t) = -t^2 \cdot t + 2t \cdot t^2 = t^3.$$

Vagyis az általános megoldás:

$$y_{i,ált} = Y_{h,ált} + y_{i,p} = \underbrace{a \cdot t + b \cdot t^2}_{Y_{h,ált}} + \underbrace{t^3}_{y_{i,p}}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

3.4. Rezgőmozgás súrlódás nélkül

Térjünk vissza a harmonikus rezgő mozgáshoz 5. ábra. Ekkor mint láttuk a test mozgását a (23) formula írja le. Ha feltesszük, hogy nincs súrlódás és a külső erő $F(t) = F_0 \cos \omega t$, ahol F_0, ω konstansok, akkor a (23) formulában $\gamma = 0$, vagyis a test mozgását a

$$my'' + ky = F_0 \cos \omega t \quad (51)$$

differenciálegyenlet írja le. Legyen $\omega_0 := \sqrt{k/m}$. Ekkor ω_0 -át a rendszer természetes frekvenciájának hívjuk, ugyanis a homogén

$$mY'' + kY = 0$$

egyenlet általános megoldása

$$Y_{h,alt} = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t.$$

Abban az esetben ha a külső erő ω frekvenciája nem egyenlő az ω_0 -al az (51) egyenlet általános megoldása:

$$y_{i,alt} = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \cos \omega t. \quad (52)$$

Nézzük ezt egy konkrét esetben:

14. PÉLDA: Legyen ω egy 1-hez közeli szám. Vizsgáljuk a

$$y'' + y = 0.5 \cos \omega t \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$$

kezdeti érték feladat megoldásának viselkedését, amint $\omega \rightarrow 1$.

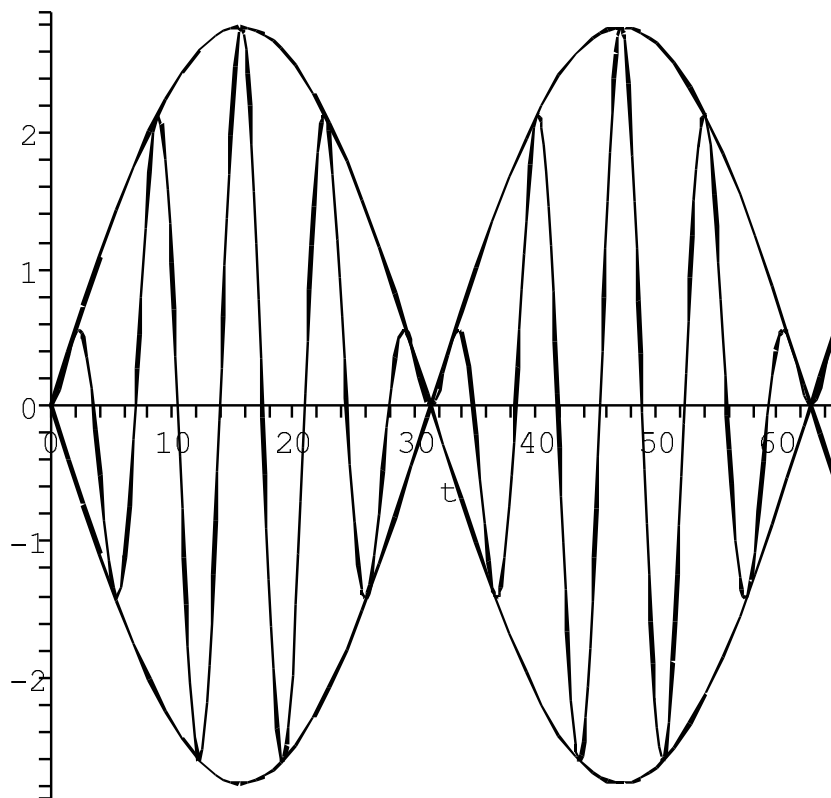
Az fent ismertetett módszerrel könnyen látszik, hogy a megoldás:

$$y = \frac{\cos(\omega t) - \cos(t)}{2(1 - \omega^2)} = \frac{1}{1 - \omega^2} \sin \frac{(1 - \omega)t}{2} \cdot \sin \frac{(1 + \omega)t}{2}. \quad (53)$$

Speciálisan az $\omega = 0.8$ esetben ez:

$$y(t) = 2.77778 \cdot \sin(0.1t) \sin(0.9t).$$

és a megoldást grafikonját a 3.4. ábra mutatja.



6. ábra. A $\pm 2.77778 \cdot \sin(0.1t)$ és a $2.77778 \cdot \sin(0.1t) \sin(0.9t)$ függvények

4. Hiányos másodrendű diff.egyenletek

Egy másodrendű differenciálegyenlet általános alakja:

$$F(x, y, y', y'') = 0, \quad (54)$$

ahol tehát F egy olyan formula ami közvetlenül függhet mind az

$$x, y, y' \text{ és } y''$$

-tól (nem feltétlenül függ mindtől de függhet mindtől). Például

$$\underbrace{((y'')^5 + \sin(y'')^3 + \cos(y') + y)^{\tan x} - \cos x}_{F(x,y,y',y'')} = 0.$$

Ha képesek vagyunk az y'' -öt kifejezni az (54) formulából, akkor a differenciálegyenletet megadhatjuk ún. *explicit* alakban. Vagyis

$$y'' = f(x, y, y') \quad (55)$$

alakban. A legtöbb esetben amivel itt találkozunk a differenciálegyenletet fel tudjuk írni explicit alakban de azért mi itt mindig azt az általános tárgyalás módot követjük, hogy feltételezzük, hogy a differenciálegyenletünk implicit alakban adott. Általánosságban nem tudunk olyan módszert amivel egy akármilyen (54) alakú differenciálegyenletet meg tudnánk oldani. Azonban abban a speciális esetben, ha az (54)-ban szereplő $F(x, y, y', y'')$ valójában nem függ az

$$x, y, y' \text{ és } y''$$

mindegyikétől, tehát az F képletéből az x, y, y' valamelyike hiányzik, akkor kapjuk a **hiányos másodrendű differenciálegyenleteket**, melyek megoldásának módszerét példákon keresztül szemléltetjük (az y'' nem hiányozhat mert akkor az egyenlet nem lenne másodrendű).

Hiányosnak nevezünk egy másodrendű diff.egyenletet, ha az x, y, y' , közül legalább az egyik hiányzik. Most osztályozzuk a hiányos másodrendű diff.egyenleteket aszerint, hogy az x, y, y' közül melyik hiányzik és mindegyik esetben megmondjuk, hogyan találhatjuk meg a megoldást.

1. *Ha y és y' hiányzik:* Ekkor $y'' = f(x)$. A feladatot $f(x)$ kétszeres integrálásával oldhatjuk meg.

15. PÉLDA: $y'' = 5 + \sin 3x$. Ekkor $y' = \int (5 + \sin 3x) dx = 5x - \frac{\cos 3x}{3} + C_1$. Tehát $y = \int (5x - \frac{\cos 3x}{3} + C_1) dx = \frac{5}{2}x^2 - \frac{\sin 3x}{9} + C_1x + c_2$.

2. *Ha y hiányzik.* Ez az $F(x, y', y'') = 0$ alak. A megoldás kulcsa az, hogy a

$$p(x) = y'(x)$$

helyettesítést kell alkalmazni, ekkor $y''(x) = p'(x)$.

16. PÉLDA: Oldjuk meg az

$$\frac{1}{2}(1+x^2)y'' - xy' = 0, \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

Cauchy feladatot!

Megoldás: Mivel $y' = p(x)$ ezért $y'' = p'(x)$. Ezzel a helyettesítéssel az egyenlet a

$$\frac{1}{2}(1+x^2)p' - xp = 0$$

szétválasztható változójú diff.egyenletbe megy át. Ennek megoldása: $p = c(1+x^2)$. Tehát $y' = c(1+x^2)$. Innen pedig az általános megoldás:

$$y_{\text{ált}} = c \left(x + \frac{x^3}{3} \right) + K.$$

A Cauchy feladat megoldását úgy kapjuk, hogy behelyettesítünk $x = 0$ -át mind az $y_{\text{ált}}$, mind az $y'_{\text{ált}}$ képletébe:

$$\begin{aligned} y(0) &= K = 0 \\ y'(0) &= c = 3 \end{aligned}$$

Tehát a Cauchy feladat megoldása: $y = 3x + x^3$.

17. PÉLDA: Függesszünk fel egy homogén állandó keresztmetszetű γ fajsúlyú hajlékonynak és nyúlhatatlannak feltételezett kötelet az A és B pontokban. Határozzuk meg azt az $y(x)$ függvényt, amely a köté alakját meghatározza, ha a kötelet csak saját súlya terheli.

Megoldás: Egyszerű fizikai megfontolások mutatják, hogy valamely V konstansra, az $y(x)$ függvényre teljesül, hogy:

$$y'' = \frac{\gamma}{V} \sqrt{1 + (y')^2}. \quad (56)$$

Ebből a hiányos másodrendű egyenletből hiányzik például az y . Tehát a következő helyettesítést használhatjuk:

$$y' = p(x), \quad y'' = p'(x).$$

Ezzel a differenciálegyenletünk alakja:

$$\frac{dp}{dx} = p' = \frac{\gamma}{V} \sqrt{1 + p^2}.$$

Ez egy szétválasztható változójú egyenlet,

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{\gamma}{V} \cdot dx,$$

melynek megoldása:

$$y'(x) = p(x) = \sinh \frac{\gamma}{V} (x + C - 1).$$

Integrálva kapjuk, hogy

$$y = \frac{V}{\gamma} \cosh \left(\frac{\gamma}{V} (x + C_1) \right) + C_2.$$

Ebben három konstans van: C_1 , C_2 és V . Ezek meghatározásához három egyenlet kell. Ezek felírásához a következő három adatot használjuk:

- a kötélt átmege az $A = (a_1, a_2)$ ponton
- a kötélt átmege az $B = (b_1, b_2)$ ponton
- a kötélt hossza egy adott ℓ szám.

Ezen három adatnak megfelelő három egyenlet sorrendben:

$$a_2 = \frac{V}{\gamma} \cosh \left(\frac{\gamma}{V} (a_1 + C_1) \right) + C_2.$$

$$b_2 = \frac{V}{\gamma} \cosh \left(\frac{\gamma}{V} (b_1 + C_1) \right) + C_2.$$

$$s = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + (y')^2} = \frac{V}{\gamma} \left[\sinh \left(\frac{\gamma}{V} [a_2 + C_1] \right) - \sinh \left(\frac{\gamma}{V} [a_1 + C_1] \right) \right]$$

Ebből a három egyenletből az aktuális C_1, C_2, V konstansok értékei kiszámolhatók.

3. Ha x hiányzik. Ekkor az egyenlet $F(y, y', y'')$ alakú. Ebben az esetben az

$$y' = p(y)$$

helyettesítést kell alkalmazni. Ekkor

$$y'' = \frac{dp(y(x))}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} y' = \frac{dp}{dy} p.$$

18. PÉLDA: Oldjuk meg az $yy'' = 2(y')^2 - 2y'$ egyenletet.

Megoldás: Az egyenletbe helyettesítjük az $y' = p$ és a $y'' = \frac{dp}{dy}p$ összefüggéseket. Így kapjuk az

$$y \frac{dp}{dy} p = 2p^2 - 2p$$

szétválasztható változójú diff.egyenletet (itt y a változó és $p = p(y)$ az y függvénye). Ennek megoldása a $p \equiv 0$ és a $p = c^2 y^2 + 1$. Felhasználva, hogy $y' = p$ kapjuk, hogy $y \equiv C$ és $y = \frac{1}{c} t g(cx + c_2)$.

4. Ha az y' hiányzik akkor csak nagyon speciális típusokat tudunk megoldani.

5. Egzakt differenciálegyenletek

Az

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

differenciálegyenlet egzakt, ha a

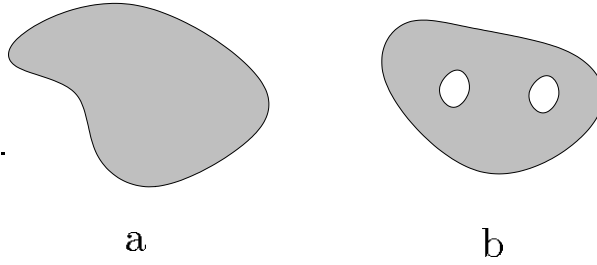
$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$$

feltétel teljesül, és mind $M(x, y)$, mind $N(x, y)$ függvények parciális deriváltjai léteznek és folytonosak egy olyan tartományon, melyben nincsenek lyukak. Az ilyen tartományokat egyszerűen összefüggőnek hívjuk.

4. TÉTEL: Ha $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$ és mind $M(x, y)$ mind $N(x, y)$ függvények parciális deriváltjai léteznek és folytonosak egy egyszerűen összefüggő tartományon, akkor létezik olyan $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ függvény amelyre:

$$M = \frac{\partial F}{\partial x} \text{ és } N = \frac{\partial F}{\partial y}$$

vagyis $\text{grad}(F) = (M, N)$.



Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a F függvény a **potenciálfüggvénye** az

$$(x, y) \mapsto (N(x, y), M(x, y))$$

vektormezőnek. Általánosságban egy vektormező potenciálfüggvénye lehet, hogy nem létezik. Viszont ha létezik, akkor meg egész bizonyos, hogy nem egyértelmű. Ha ugyanis $F(x, y)$ egy potenciálfüggvénye az

$$(x, y) \mapsto (N(x, y), M(x, y))$$

vektormezőnek, akkor $F(x, y) + C$, ahol a C egy tetszőleges konstans, szintén potenciálfüggvénye ugyanezen vektormezőnek. Tehát a potenciálfüggvény csak additív konstans erejéig meghatározott. Ha a potenciál függvény létezik, akkor a sík valamely A pontjából valamely B pontjába történő elmozdulás során az

$$(x, y) \mapsto (N(x, y), M(x, y))$$

erőtér ellenében végzett munka nem függ attól, hogy milyen úton megyünk A -ból B -be és a munkát az $F(B) - F(A)$ különbség adja.

Visszatérve a fenti differenciálegyenletünkhöz, ha az

$$(x, y) \mapsto (N(x, y), M(x, y))$$

vektormezőre létezik F potenciál függvény akkor az

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

differenciálegyenletet tehát exact differenciálegyenletnek hívjuk és általános megoldását az

$$F(x, y) = C$$

implicit alakban kaphatjuk meg.

19. PÉLDA: Oldjuk meg a

$$y' (3x^4y^2 - x^2) + (4x^3y^3 - 2xy) = 0$$

diff.egyenletet.

Megoldás: Használjuk fel, hogy $y' = \frac{dy}{dx}$ és formálisan szorozzuk meg az egyenlet mind két oldalát dx -el. Kapjuk, hogy

$$\underbrace{(4x^3y^3 - 2xy)}_{M(x,y)} dx + \underbrace{(3x^4y^2 - x^2)}_{N(x,y)} dy = 0.$$

Ez a diff.egyenlet egzakt, mivel az M és az N függvények és minden parciális derivátjaik mindenütt értelmezettek és

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12x^3y^2 - 2x = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Tehát a fenti tétel szerint létezik egy F , melyre $M = \frac{\partial F}{\partial x}$ és $N = \frac{\partial F}{\partial y}$.

Az F potenciálfüggvény meghatározása: Mivel $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$, ezért

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx = \int (4x^3y^3 - 2xy) dx = x^4y^3 - x^2y + f(y).$$

Ezután már csak az $f(y)$ függvényt kell meghatározni. Ezt abból kapjuk, hogy

$$N = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Ezt felírva:

$$(3x^4y^2 - x^2) = 3x^4y^2 - x^2 + f'(y).$$

Innen $f'(y) \equiv 0$ vagyis $f(y) \equiv C$. Tehát

$$F(x, y) = x^4y^3 - x^2y + C.$$

A fenti tétel értelmében tehát a diff.egyenlet megoldását az $x^4y^3 - x^2y = C$ adja. Itt a megoldást implicit alakban kaptuk meg de ennél többet ilyen egyenleteknél csak speciális esetekben remélhetünk.

Eddig tart az I. Zh anyaga.

6. Differenciálegyenlet-rendszerek

Ebben a fejezetben a független változót t -vel jelöljük, az ismeretlen függvényeket pedig $x(t)$ és $y(t)$ -vel. Használni fogjuk a D differenciálás operátort. Vagyis $x'(t) = Dx(t)$ és $y'(t) = Dy(t)$. Ha azt írjuk például, hogy $(D-5)x$ ez azzal egyenértékű, hogy $x'(t) - 5x(t)$. A differenciálegyenlet rendszerek közül csak a legegyszerűbbeket tekintjük, és ezeknek megoldását a következő példán mutatjuk be:

20. PÉLDA: Oldjuk meg a következő diff.egyenlet rendszert:

$$\begin{aligned} 2x' + y' - 4x - y &= e^t \\ x' + 3x + y &= 0 \end{aligned}$$

Megoldás: Az egyenlet rendszer a D operátorral:

$$\begin{aligned} 2(D-2)x + (D-1)y &= e^t \\ (D+3)x + y &= 0 \end{aligned}$$

A Cramer-szabály szerint egyértelmű megoldás azért van, mert a

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix} = -(D^2+1) \neq 0.$$

A megoldások adódnak a következő két egyenletből:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} e^t & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{és} \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 2(D-2) & e^t \\ D+3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ezeket kifejtve:

$$-(D^2+1)x = e^t \quad \text{és} \quad -(D^2+1)y = -4e^t.$$

Ezek megoldásai:

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{2}e^t$$

és

$$y(t) = c_3 \cos t + c_4 \sin t + 2e^t.$$

Csak két szabad paraméter lehet, ezért c_3, c_4 kifejezhető c_1, c_2 -vel. Az $x(t), y(t)$ fenti képleteit az egyenletrendszer 2. egyenletébe helyettesítve:

$$\left(\underbrace{c_2 + 3c_1 + c_3}_0 \right) \cos t + \left(\underbrace{3c_2 - c_1 + c_4}_0 \right) \sin t = 0$$

ez adja a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} -3c_1 - c_2 &= c_3 \\ c_1 - 3c_2 &= c_4 \end{aligned}$$

Vagyis az egyenlet rendszer megoldása:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{e^t}{2} \\ y(t) &= -(3c_1 + c_2) \cos t + (c_1 - 3c_2) \sin t + 2e^t \end{aligned}$$

21. PÉLDA: Oldjuk meg a következő Cauchy feladatot:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' - y + 3x = 0 \\ y' + 2x = 0 \end{array} \right\} \quad x(0) = 1, y(0) = 3 \quad (57)$$

Megoldás: Felírjuk az egyenletrendszert a D operátor használatával:

$$\begin{aligned} (D + 3)x - y &= 0 \\ 2x + Dy &= 0 \end{aligned}$$

Kiszámítjuk a $\Delta = \begin{vmatrix} D + 3 & -1 \\ 2 & D \end{vmatrix} = D^2 + 3D + 2 \neq 0$. Tehát a fenti módszer alkalmazható. Ezután a Cramer-szabályból:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & D \end{vmatrix} = 0 \quad \text{és} \quad \Delta y = \begin{vmatrix} D + 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ezt kiírva:

$$x'' + 3x' + 2x = 0 \quad \text{és} \quad y'' + 3y' + 2y = 0. \quad (58)$$

Ezeket megoldva kapjuk, hogy

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \quad \text{és} \quad y(t) = c_3 e^{-t} + c_4 e^{-2t}.$$

Mivel csak két konstans lehet a négy helyett, mindezt vissza kell helyettesíteni az egyenletrendszer valamelyik, mondjuk a második egyenletébe. Ebből adódik, hogy:

$$\left(\underbrace{2c_1 - c_3}_0 \right) e^{-t} + \left(\underbrace{2c_2 - 2c_4}_0 \right) e^{-2t} \equiv 0.$$

Tehát $c_3 = 2c_1$, és $c_4 = c_2$. Ezt visszahelyettesítve a (58) megoldásaiba, kapjuk, hogy a diff. egyenletrendszer általános megoldása:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \\ y(t) &= 2c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}. \end{aligned} \quad (59)$$

A Cauchy-feladat megoldását úgy kapjuk, ha $t = 0$ -át helyettesítünk mindkét oldalra és felhasználjuk az $y(0) = 3, x(0) = 1$ kezdeti feltételeket:

$$\begin{aligned} 1 &= x(0) = c_1 + c_2 \\ 3 &= y(0) = 2c_1 + c_2. \end{aligned}$$

Ezen egyenletrendszer megoldásaként kapjuk, hogy: $c_1 = 2, c_2 = -1$. Ezeket (59)-ba visszaírva kapjuk a Cauchy-feladat megoldását:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{-t} - e^{-2t} \\ y(t) &= 4e^{-t} - e^{-2t}. \end{aligned} \quad (60)$$

Az előbbiek egy alkalmazása: Tegyük fel, hogy a síkon mozog egy pontszerű bogárka a következő feltételek mellett: A bogárka a $t = 0$ időpontban a sík $A = (1, 3)$ pontjában található. A bogárka mozgása során bármely (x, y) pontba is jut, a pillanatnyi sebessége ebben a pontban az $(y - 3x, -2x)$ vektor által adott. Feladat: írjuk le a bogárka mozgását.

Megoldás: Mivel a bogárka az A pontból indul ki és a pillanatnyi sebessége $(x', y') = (y - 3x, -2x)$ ez azt jelenti, hogy a bogárka pályájának x és y koordinátájának időbeli függését leíró $x(t), y(t)$ függvények eleget tesznek a fenti (57) Cauchy feladatnak, vagyis a bogárka pályáját a 21 példa megoldásaként kapott

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{-t} - e^{-2t} \\ y(t) &= 4e^{-t} - e^{-2t}. \end{aligned} \quad (61)$$

függvények írják le.