Feladatok a Diffrenciálegyenletek V. témakörhöz

1. Oldjuk meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad y(0) = 3,\ y'(0) = 1$$

2. Ha egy rudat az x abszcisszájú keresztmetszetében adott $f(x)$ függvénnyel arányos hajlítónyomaték terhel, akkor a rúd súlyvonalának alakja a terhelés után az alábbi differenciálegyenletből számítható:

$$\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} = f(x).$$

Határozzuk meg a rúd alakját ha a nyomaték eloszlás

$$f(x) = 1 - x$$

és a kezdeti feltételek

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

3. (a) Oldjuk meg a külső erő nélküli csillapítatlan szabad rezgés differnciálegyenletét

$$my'' + ky = 0 \tag{1}$$

mint hiányos másodrendű differenciálegyenletet!

(b) Oldjuk meg az (1) egyenletet mint másodfokú lineáris egyenletet a két héttel ezelőtt tanult technikával (melyben a karakterisztikus polinom gyökeit kerestük meg és ebből felírtuk az általános megoldást).

(c) Mutassuk meg, hogy a két eredmény ugyanaz.

4. Határozzuk meg az általános megoldását a következő másodrendű differenciálegyenleteknek. A megoldásokat elég implicit alakban megadni.

(a)

$$(y')^2 + 2yy'' = 0,$$

(b)

$$y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}},$$

(c)
$$yy'' + (y')^2 = 1$$

5. Oldjuk meg a következő másodrendű differenciálegyenleteket: $xy'' - y' = x^3$.

6. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket:

   (a) $2x \cos y + [2y \cos y - (x^2 + y^2) \sin y]\, y' = 0$,

   (b) $xdy + ydx = 0$,

   (c) $\frac{x}{x^2+y^2} y' = \frac{y}{x^2+y^2}$,

   (d) $2x(\sin y + 1) + x^2 \cos y \cdot y' = 0$.

Eredmények

1. A differenciálegyenlet mindkét oldalát kétszer x szerint deriváljuk:

$$y' = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C_1,$$

$$y = \int (\arcsin x + C_1) dx = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C_1 x + C_2.$$

Behelyettesítve a kezdeti feltételeket kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 3 = y(0) &= 1 + C_2 \\ 1 = y'(0) &= \arcsin 0 + 1 \end{aligned}$$

Vagyis

$$C_1 = 1 \text{ és } C_2 = 2.$$

Tehát a kezdeti érték feladat megoldása:

$$y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + x + 2.$$

2. A másodrendű egyenletünkből hiányzik az y. Tehát amint előadáson tanultuk, ekkor a $p = p(x)$ új változót behozzuk az y' helyére. Vagyis

$$p(x) = y'(x) \text{ és } p'(x) = y''(x).$$

Az új változóval az egyenletünk alakja átrendezés után:

$$\int \frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}} = \int f(x)dx.$$

Bevezetve az

$$\int f(x)dx = F(x)$$

jelölést, az integrálás elvégzése után kapjuk, hogy

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = F(x) + c_1.$$

Innen p-t kifejezve:

$$p(x) = \frac{F(x)+c_1}{\sqrt{1-(F(x)+C-1)^2}}.$$

Használva, hogy $y' = p$ kapjuk, hogy

$$y = \int \frac{F(x)+c_1}{\sqrt{1-(F(x)+c_1)^2}}dx. \tag{2}$$

Abban a speciális esetben amikor $f(x) = 1 - x$ integrálással kapjuk, hogy

$$F(x) + c_1 = x(1 - \frac{x}{2}) + c_1.$$

Ekkor tehát

$$y' = p = \frac{x(1-\frac{x}{2})+c_1}{\sqrt{1-\left(x(1-\frac{x}{2})+c_1\right)^2}}.$$

Használva az $y'(0) = 0$ kezdeti feltételt és azt hogy egy tört pontosan akkor egyenlő nullával amikor a számlálója nulla adódik, hogy

$$c_1 = 0.$$

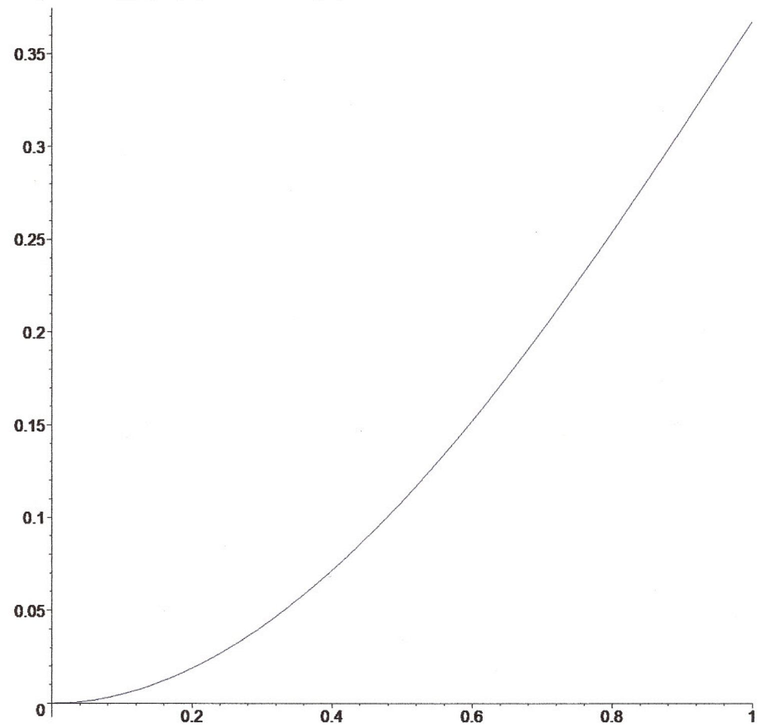
Ezt helyettesítve (2)-ba és kihasználva, hogy $y(0) = 0$:

$$y(x) = \int_{t=0}^{x} \frac{t(1-\frac{t}{2})}{\sqrt{1-t^2\left(1-\frac{t}{2}\right)^2}}dt.$$

```
> y:=x->int((t*(1-t/2))/(sqrt(1-t^2*(1-t/2)^
  2)),t=0..x);
```

$$y := x \to \int_0^x \frac{t\left(1-\frac{t}{2}\right)}{\sqrt{1-t^2\left(1-\frac{t}{2}\right)^2}}\,dt$$

```
> plot(y(x),x=0..1);
```



1. ábra. Az $y(x) = \int\limits_{t=0}^{x} \frac{t(1-\frac{t}{2})}{\sqrt{1-t^2\left(1-\frac{t}{2}\right)^2}} dt$ függvény grafikonjának lerajzolása

Ez azonban egy ún. *elliptikus integrál* amit nem lehet elemi függvényekkel kifejezni. Azonban le tudjuk rajzolni számítógéppel (l. 1. ábra).

3a. Az (1) differenciálegyenletet átrendezve és az előadáson látott

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}$$

jelölést alkalmazva a megoldandó differenciálegyenlet:

$$y'' = -\omega_0^2 y. \tag{3}$$

Az előadáson ez volt a 3. eset, amikor is az egyenletben nem jelenik meg expliciten az x. Ekkor mint az előadáson tanultuk az

$$y' = p = p(y), \qquad y'' = \frac{dp}{dy}p,$$

helyettesítést alkalmazhatjuk. Ezzel a (3) egyenletet a

$$p \cdot p' = -\omega_0^2 y \tag{4}$$

alakra hozzuk. Itt $p' = \frac{dp}{dy}$ azt jelenti, hogy a $p = p(y)$ függvényt az y mint független változó szerint deriváljuk. A (4) egyenlet szétválasztható változójú. Átszorzunk a (4) egyenletben dy-al, hogy megkapjuk a

$$p \cdot dp = -\omega_0^2 y \cdot dy.$$

Integrálás után kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{2}p^2 = -\frac{\omega_0^2}{2}y^2 + C_1.$$

Vagyis

$$\frac{dy}{dt} = y' = p = \pm\sqrt{2C_1 - \omega_0^2 y^2}.$$

Ez tehát a

$$\frac{dy}{dt} = \pm\sqrt{2C_1 - \omega_0^2 y^2}. \tag{5}$$

egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet. A fenti differenciálegyenletben dt-vel átszorozva és $\sqrt{2C_1 - \omega_0^2 y^2}$ átosztva adódik, hogy

$$\frac{dy}{\sqrt{2C_1 - \omega_0^2 y^2}} = \pm dt.$$

Használva, hogy

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$$

kapjuk, hogy a differenciálegyenlet megoldása:

$$y = \frac{\sqrt{2C_1}}{\omega_0} \sin(\omega_0(t + C_2)). \tag{6}$$

(Az utolsó előtti egyenletben akár melyik előjelet vesszük az lényegében ugyanazt a fenti eredményt adja csak a plusz előjel esetén vett C_2 konstansnak a mínusz előjel esetén az a C_2' konstans felel meg amire: $\omega_0 C_2' = \omega_0 C_2 + \pi$. De ez teljesen lényegtelen hiszen a C_2 egyszerűen csak egy konstans).

3b. Tekintsük most az (1) egyenletet mint másodfokú lineáris egyenletet. Először is felírjuk a karakterisztikus polinomot:

$$mr^2 - k = 0.$$

Használva az $\omega_0 := k/m$ jelölést, a gyökök:

$$r_1 = i \cdot \omega_0, \qquad r_2 = i \cdot \omega_0.$$

Tehát az általános megoldás:

$$y = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t). \tag{7}$$

3c. A (6) egyenletben a jobb oldalon emeljünk ki $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$-et. Ekkor kapjuk, hogy

$$y = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cdot \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos(\omega_0 t) + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin(\omega_0 t) \right). \tag{8}$$

Vegyük észre, hogy a

$$\mathbf{v} = \left(\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \right)$$

vektor hossza egységnyi. Ezért létezik egy olyan θ szög amire $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Vagyis erre az θ szögre:

$$\cos\theta = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \text{ és } \sin\theta = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}.$$

Ezt behelyettesítve a (8) formulába:

$$y = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cdot \underbrace{(\sin\theta \cdot \cos(\omega_0 t) + \cos\theta \cdot \sin(\omega_0 t))}_{\sin(\theta+\omega_0 t)}.$$

Használva a $d_1 := \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ és a $d_2 := \theta/\omega_0$ jelöléseket:

$$y = d_1 \sin(\omega_0(t + d_2)). \tag{9}$$

Ez pedig $d_2 = c_2$ és $d_1 = \frac{\sqrt{2C_1}}{\omega_0}$ ugyanazt adja mint (6).

4a.$y = C_1(x + C_2)^{2/3}$,

4b.$3x = 4(\sqrt{y} - 2C - 1)\sqrt{C_1 + \sqrt{y}} + C_2$,

4c.$(x + C_2)^2 - y^2 = C_1$.

5. $y = \frac{x^4}{8} + \frac{C_1 x^2}{2} + C - 2$.

6a. Az $y' = \frac{dy}{dx}$-et felírva és dx-el mindkét oldalt beszorozva kapjuk, hogy az egyenlet

$$\underbrace{2x\cos y}_{M(x,y)}\, dx + \underbrace{\left[2y\cos y - (x^2 + y^2)\sin y\right]}_{N(x,y)} dy = 0$$

alakú. Mivel

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x} = -2x\sin y$$

ezért a differenciálegyenlet ekzakt tehát van olyan $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$\mathbf{grad}(F) = (M, N).$$

Vagyis

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = N.$$

Ezért

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx + h(y) = x^2\cos y + h(y). \tag{10}$$

A $h(y)$ függvény abból az egyenletből határozzuk meg hogy: $\frac{\partial F}{\partial y} = N$. Vagyis:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x^2\sin y + h'(y) = \underbrace{2y\cos y - (x^2 + y^2)\sin y}_{N}.$$

Innen

$$h'(y) = 2y\cos y - y^2 \sin y.$$

Innen:

$$h(y) = y^2 \cos y.$$

Ezt vissza helyettesítve (10)-be adódik, hogy:

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)\cos y.$$

Vagyis a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$(x^2 + y^2)\cos y = Const.$$

6b. $xy = Const$

6c. $\arctan \frac{y}{x} = Const.$

6d. $x^2 \sin y + \sin y = Const.$