Feladatok és pár megoldás is az első hétre

2.1. Mi az
$$y' = \frac{y}{x}$$
egyenlet általános és egy partikuláris megoldása?

2.2. Oldjuk meg az
$$y' = \mathrm{e}^{x+y}$$
szétválasztható változójú differenciálegyenletet.

2.3. A rádioaktív bomlás során a sugárzó anyag $y(t)$ mennyisége arányos az anyag csökkenésének gyorsaságával. Írjuk fel a folyamatot leíró differenciálegyenletet. Határozzuk meg az arányossági tényezőt, ha az anyag felezési ideje 100 (másodperc), azaz ennyi idő múlva éppen fele annyi sugárzó anyag van, mint kezdetben. Mi lesz az $y(t)$ függvény alakja, ha kezdetben 1 (kilogramm) volt anyagunkból?

2.4. Határozzuk meg az
$$y' = \frac{\mathrm{e}^x}{y+1} \quad ; \quad y(0) = -4$$
Cauchy-feladat megoldását.

2.5. Közegben (pl. víz, levegő) nagyobb sebességgel haladó magára hagyott test sebességének négyzetével arányos módon lassul. Milyen görbe szerint alakul sebesség-idő grafikonja?

2.6. Keressük meg az
$$y' = \frac{1+2\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^y x \ln(x)}$$
szétválasztható változójú egyenlet általános és egy partikuláris megoldását.

2.7. Oldjuk meg az
$$(\mathrm{e}^{-2y} - \mathrm{e}^{-y})y' = \frac{\mathrm{e}^{x-y} + \mathrm{e}^{-x-y}}{\mathrm{e}^y + 1}$$
ijesztő alakú egyenletet.

2.8. Oldjuk meg az
$$x + y - xy' = 0 \quad ; \quad y(1) = 1$$
változóban homogén kezdetiérték-feladatot (Cauchy-problémát).

2.9. Keressük meg az
$$x\mathrm{e}^{y/x} + y = xy'$$
egyenlet összes megoldását.

2.10. Mely $y(x)$ függvényekre igaz az
$$xy' = y\left(\ln(y) - \ln(x)\right)$$
változóban homogén differenciálegyenlet?

2.1. eredménye: $y = 0$ minden x-re, vagy $y = \pm e^C x$, ahol C konstans. Egy partikuláris megoldása például $y = -3x$ amikor a mínusz érvényes és $C = \ln(3)$.

2.2. eredménye: $y = -\ln(-e^x - C)$, ahol $C < 0$ konstans. A megoldás adott C mellett csak ott értelmezett, ahol $-e^x - C > 0$ azaz $x < \ln(-C)$.

2.3. megoldása: A differenciálegyenlet

$$-\frac{dy}{dt} = A\,y \quad ,$$

hiszen bal oldalon áll az anyag csökkenésének sebessége, jobb oldalon a mennyisége, A az arányossági tényező. Ez egy egyszerű szétválaszthatójú egyenlet. "Átrendezve" és integrálva

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y} &= -A \int dt \\
\ln(|y|) &= -A\,t + C \qquad (C \text{ konstans}) \\
y &= \pm e^C e^{-At} \quad ,
\end{aligned}$$

de persze csak a plusz eset azaz $y > 0$ megoldás releváns. Mi lesz A értéke? A felezési idő értéke és definíciója szerint

$$\begin{aligned}
y(100) &= \frac{1}{2} y(0) \\
e^C e^{-100A} &= \frac{1}{2} e^C \\
-100A &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\
A &= \frac{\ln(2)}{100} \quad .
\end{aligned}$$

A kezdeti $y(0) = 1$ (kilogramm) feltétellel a feladat Cauchy-problémává vált. $e^C e^{-A0} = 1$ miatt $e^C = 1,\ C = 0$, így ezzel a feltétellel az

$$y(t) = e^{-A\,t} = e^{-(\ln(2)/100)\,t}$$

függvény írja le a sugárzó anyag mennyiségét.

2.4. megoldása: Az egyenletet átírva

$$\begin{aligned}
\int (y+1)\,dy &= \int e^x\,dx \\
\frac{y^2}{2} + y &= e^x + C
\end{aligned}$$

másodfokú egyenletre jutunk, melynek megoldása

$$y(x) = -1 \pm \sqrt{1 + 2(e^x + C)} \quad ,$$

a kezdeti feltétel szerint

$$y(0) = -1 \pm \sqrt{1 + 2C} = -4$$

tehát a megoldásban a mínusz érvényes, és $C = 3$. Ezzel a megoldás

$$y(x) = -1 - \sqrt{7 + 2\mathrm{e}^x} \quad .$$

2.5. eredménye: A felírható egyenlet

$$-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A\,v^2$$

($A > 0$ konstans), megoldása

$$v = \frac{1}{A\,t + C} \quad .$$

2.6. megoldása: A szétválasztható egyenletet átrendezve és integrálva

$$\int \frac{\mathrm{e}^y}{1 + 2\mathrm{e}^y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x \quad .$$

Az $u = \mathrm{e}^y$ és $v = \ln(x)$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}u}{1 + 2u} &= \int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v \\
\frac{1}{2}\ln(1 + 2u) &= \ln(|v|) + C \\
\ln(1 + 2u) &= \ln(v^2) + 2C \\
u &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2C}v^2 - 1\right) \\
y = \ln(u) &= \ln\left(\mathrm{e}^{2C}(\ln x)^2 - 1\right) - \ln(2)
\end{aligned}$$

az általános megoldás (olyan $x > 0$-ra, hogy $\left(\mathrm{e}^{2C}(\ln x)^2 - 1\right) > 0$ teljesüljön). Egy partikuláris megoldás a $C = 2$ eset, ekkor

$$y = \ln\left(\mathrm{e}^4(\ln x)^2 - 1\right) - \ln(2) \quad .$$

2.7. eredménye: $y = \operatorname{arch}\left(\operatorname{sh}(x) + \frac{C}{2}\right)$ adott C konstans mellett ott, ahol $\left(\operatorname{sh}(x) + \frac{C}{2}\right) \geq 1$.

2.8. eredménye: Az egyenlet általános megoldása ($u = \frac{y}{x}$) helyettesítéssel) $y = x\ln(|x|) + C|x|$, melyet az $y(1) = 1$ kezdetiérték-feltételhez igazítva $C = 1$, így a Cauchy-feladat megoldása $y = x\ln(|x|) + |x|$.

2.9. eredménye: Szintén az előbbi helyettesítéssel $y = x\ln\left(C + \ln(|x|)\right)$.

2.10. megoldása: Az egyenletet átírva és $u = \frac{y}{x}$-et majd $z = \ln(u)$-t helyettesítve (x, $y > 0$)

$$\begin{aligned}
xy' &= y\ln\left(\frac{y}{x}\right) \\
y' &= u\ln(u) \\
u'x + u &= u\ln(u) \\
\int \frac{\mathrm{d}u}{u\ln(u) - u} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
\int \frac{\mathrm{d}z}{z - 1} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
\ln(|z - 1|) &= \ln(x) + C \\
|z - 1| &= \mathrm{e}^C x \quad .
\end{aligned}$$

Ha $z > 1$ azaz $y > \mathrm{e} \cdot x$, akkor

$$y = ux = \mathrm{e}^z x = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^C x + 1} x \quad ,$$

míg $y < \mathrm{e} \cdot x$ esetén

$$y = ux = \mathrm{e}^z x = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^C x + 1} x \quad .$$

Ezek a megoldások előbb felírt feltételeiket magukban foglalják. Vizsgálatinkból kimaradt az $u = \mathrm{e}$ azaz $y = \mathrm{e} \cdot x$ eset (a negyedik sorban osztottunk olyan taggal, amely nullát ad ebben az esetben), mely szintén megoldása az egyenletnek.