# Matematika ÉP2 3. zh megoldásai

Sélley Fanni

## A csoport

1. Határozza meg a következő kétváltozós függvény $P(0,1)$ pontbeli gradiensét, majd a kiszámolt gradiens irányú iránymenti deriváltját ugyancsak a $P(0,1)$ pontban!

$$f(x,y) = e^{xy} \cdot y + \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

**Megoldás.**

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= (f'_x(x,y), f'_y(x,y)) \\
&= \left( (e^{xy})'_x \cdot y + \arctan'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x,\ (e^{xy})'_y \cdot y + e^{xy} \cdot (y)'_y + \arctan'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_y \right) \\
&= \left( e^{xy} \cdot y^2 + \frac{1}{1+(x/y)^2} \cdot \frac{1}{y},\ e^{xy} \cdot xy + e^{xy} + \frac{1}{1+(x/y)^2} \cdot \left(\frac{-x}{y^2}\right) \right)
\end{aligned}$$

Tehát

$$\nabla f(0,1) = (e^0 \cdot 1 + 1 \cdot 1, 0 + e^0 + 1 \cdot 0) = (2,1).$$

Mivel

$$\|\nabla f\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5},$$

a gradiens irányú egységvektor a $P(0,1)$ pontban

$$v = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Így a gradiens irányú iránymenti derivált a $P(0,1)$ pontban

$$\nabla f(0,1) \cdot v = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

2. Keresse meg a következő függvény lokális szélsőértékeit és nyeregpontjait, ha vannak:

$$f(x,y) = 3 \cdot \ln(x^2+y^2+1) - 2x - 2y$$

**Megoldás.** Lokális szélsőérték és nyeregpont csak ott lehet, ahol a parciális deriváltak nullák, azaz az alábbi egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= 3 \cdot \ln'(x^2+y^2+1) \cdot (x^2+y^2+1)'_x - 2 = \frac{6x}{x^2+y^2+1} - 2 = 0 \\
f'_y(x,y) &= 3 \cdot \ln'(x^2+y^2+1) \cdot (x^2+y^2+1)'_y - 2 = \frac{6y}{x^2+y^2+1} - 2 = 0
\end{aligned}$$

Ezt továbbalakítva:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{3}(x^2+y^2+1) \\
y &= \frac{1}{3}(x^2+y^2+1)
\end{aligned}
$$

Mivel a két jobboldal megegyezik, a két baloldal is, azaz $x = y$. Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe:

$$
\begin{aligned}
3x &= 2x^2+1 \\
0 &= 2x^2-3x+1
\end{aligned}
$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai $x_1 = 1$ és $x_2 = \frac{1}{2}$. Tehát a kritikus pontjaink (emlékezzünk, hogy $x = y$):

$$
P_1(1,1) \qquad \text{és} \qquad P_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).
$$

A típusuk megállapításához szükség lesz a második deriváltakat tartalmazó Hesse-mátrixra.

$$
\begin{aligned}
f''_{xx}(x,y) &= \frac{(6x)'_x\cdot(x^2+y^2+1)-6x\cdot(x^2+y^2+1)'_x}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{6(x^2+y^2+1)-12x^2}{(x^2+y^2+1)^2} \\
f''_{yy}(x,y) &= \frac{(6y)'_y\cdot(x^2+y^2+1)-6y\cdot(x^2+y^2+1)'_y}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{6(x^2+y^2+1)-12y^2}{(x^2+y^2+1)^2} \\
f''_{xy}(x,y) &= f''_{yx}(x,y) = 6x\cdot\left(-\frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}\right)\cdot 2y = \frac{-12xy}{(x^2+y^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

Tehát

$$
H(1,1) = \begin{bmatrix} \frac{6\cdot 3-12}{3^2} & \frac{-12}{3^2} \\ \frac{-12}{3^2} & \frac{6\cdot 3-12}{3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}
$$

Mivel $\det H = \frac{4}{9} - \frac{16}{9} < 0$, ezért $(1,1)$-ben nyeregpont van.

Valamint

$$
H(1/2,1/2) = \begin{bmatrix} \frac{6\cdot 3/2-12/4}{(3/2)^2} & \frac{-12/4}{(3/2)^2} \\ \frac{-12/4}{(3/2)^2} & \frac{6\cdot 3/2-12/4}{(3/2)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}
$$

Mivel a bal felső elem $\frac{8}{3} > 0$ és $\det H = \frac{64}{9} - \frac{16}{9} > 0$, ezért $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$-ben lokális minimumhely van. A lokális minimumérték

$$
f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 3\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 2.
$$

3. Számítsa ki az alábbi kettősintegrál értékét, ha a $T$ tartomány az origó középpontú 1 és 3 sugarú körök által határolt körgyűrű $x$ tengely feletti része.

$$
\iint_T \frac{y\cdot x^4}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}A.
$$

**Megoldás.** Polárkoordinátás transzformációt fogunk alkalmazni. Tehát alkalmazzuk az

$$
(x,y) \to (r\cos\varphi, r\sin\varphi)
$$

helyettesítést és az integrandust szorozzuk a Jacobi-determinánssal, azaz $r$-el. A sugárnak megfelelő $r$ változó 1 és 3 között fog futni, az $x$ tengely pozitív ágától vett elfordulási szögnek megfelelő $\varphi$ változó 0 és $\pi$ között (nyilván így kapjuk meg a $T$ tartományt).

$$\int_0^\pi \int_1^3 \frac{r \sin\varphi \cdot r^4 \cos^4\varphi}{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2} \cdot r \text{ d}r \text{ d}\varphi = \int_0^\pi \int_1^3 \frac{r^6 \sin\varphi \cos^4\varphi}{r^2} \text{ d}r \text{ d}\varphi$$
$$= \int_0^\pi \int_1^3 r^4 \sin\varphi \cos^4\varphi \text{ d}r \text{ d}\varphi = \int_0^\pi \sin\varphi \cos^4\varphi \int_1^3 r^4 \text{ d}r \text{ d}\varphi = \int_0^\pi \sin\varphi \cos^4\varphi \left[\frac{r^5}{5}\right]_1^3 \text{ d}\varphi$$
$$= \frac{3^5 - 1}{5} \int_0^\pi \sin\varphi \cos^4\varphi \text{ d}\varphi = \frac{242}{5} \cdot \left[-\frac{\cos^5\varphi}{5}\right]_0^\pi = \frac{242}{5} \cdot \frac{1+1}{5} = \frac{484}{25}.$$

# B csoport

1. Határozza meg a következő kétváltozós függvény $P(1,0)$ pontbeli gradiensét, majd a kiszámolt gradiens irányú iránymenti deriváltját ugyancsak a $P(1,0)$ pontban!

$$f(x,y) = e^{xy} \cdot x + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

**Megoldás.**

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) &= (f'_x(x,y), f'_y(x,y)) \\ &= \left((e^{xy})'_x \cdot x + e^{xy} \cdot (x)'_x + \arctan'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x, (e^{xy})'_y \cdot x + \arctan'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_y\right) \\ &= \left(e^{xy} \cdot xy + e^{xy} + \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right), e^{xy} \cdot x^2 + \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

Tehát
$$\nabla f(1,0) = (0 + e^0 + 1 \cdot 0, e^0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = (1,2).$$

Mivel
$$\|\nabla f\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

a gradiens irányú egységvektor a $P(1,0)$ pontban

$$v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Így a gradiens irányú iránymenti derivált a $P(1,0)$ pontban

$$\nabla f(1,0) \cdot v = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

2. Keresse meg a következő függvény lokális szélsőértékeit és nyeregpontjait, ha vannak:

$$f(x,y) = \frac{3}{2} \cdot \ln(x^2 + y^2 + 1) - x - y$$

**Megoldás.** Lokális szélsőérték és nyeregpont csak ott lehet, ahol a parciális deriváltak nullák, azaz az alábbi egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \frac{3}{2}\cdot \ln'(x^2+y^2+1)\cdot (x^2+y^2+1)'_x - 1 = \frac{3x}{x^2+y^2+1} - 1 = 0 \\ f'_y(x,y) &= \frac{3}{2}\cdot \ln'(x^2+y^2+1)\cdot (x^2+y^2+1)'_y - 1 = \frac{3y}{x^2+y^2+1} - 1 = 0 \end{aligned}$$

Ezt továbbalakítva:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}(x^2+y^2+1) \\ y &= \frac{1}{3}(x^2+y^2+1) \end{aligned}$$

Mivel a két jobboldal megegyezik, a két baloldal is, azaz $x = y$. Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe:

$$\begin{aligned} 3x &= 2x^2+1 \\ 0 &= 2x^2-3x+1 \end{aligned}$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai $x_1 = 1$ és $x_2 = \frac{1}{2}$. Tehát a kritikus pontjaink (emlékezzünk, hogy $x = y$):

$$P_1(1,1) \qquad \text{és} \qquad P_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

A típusuk megállapításához szükség lesz a második deriváltakat tartalmazó Hesse-mátrixra.

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= \frac{(3x)'_x\cdot(x^2+y^2+1) - 3x\cdot(x^2+y^2+1)'_x}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{3(x^2+y^2+1)-6x^2}{(x^2+y^2+1)^2} \\ f''_{yy}(x,y) &= \frac{(3y)'_y\cdot(x^2+y^2+1) - 3y\cdot(x^2+y^2+1)'_y}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{3(x^2+y^2+1)-6y^2}{(x^2+y^2+1)^2} \\ f''_{xy}(x,y) &= f''_{yx}(x,y) = 3x\cdot\left(-\frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}\right)\cdot 2y = \frac{-6xy}{(x^2+y^2+1)^2} \end{aligned}$$

Tehát

$$H(1,1) = \begin{bmatrix} \frac{3\cdot3-6}{3^2} & \frac{-6}{3^2} \\ \frac{-6}{3^2} & \frac{3\cdot3-6}{3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Mivel $\det H = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} < 0$, ezért $(1,1)$-ben nyeregpont van.

Valamint

$$H(1/2,1/2) = \begin{bmatrix} \frac{3\cdot3/2-6/4}{(3/2)^2} & \frac{-6/4}{(3/2)^2} \\ \frac{-6/4}{(3/2)^2} & \frac{3\cdot3/2-6/4}{(3/2)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Mivel a bal felső elem $\frac{4}{3} > 0$ és $\det H = \frac{16}{9} - \frac{4}{9} > 0$, ezért $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$-ben lokális minimumhely van. A lokális minimumérték

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 1.$$

3. Számítsa ki az alábbi kettősintegrál értékét, ha a $T$ tartomány az origó középpontú 1 és 2 sugarú körök által határolt körgyűrű $x$ tengely feletti része.

$$\iint_T \frac{y \cdot x^6}{x^2+y^2}\, \mathrm{d}A.$$

**Megoldás.** Polárkoordinátás transzformációt fogunk alkalmazni. Tehát alkalmazzuk az

$$(x, y) \to (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

helyettesítést és az integrandust szorozzuk a Jacobi-determinánssal, azaz $r$-el. A sugárnak megfelelő $r$ változó 1 és 2 között fog futni, az $x$ tengely pozitív ágától vett elfordulási szögnek megfelelő $\varphi$ változó 0 és $\pi$ között (nyilván így kapjuk meg a $T$ tartományt).

$$\int_0^\pi \int_1^2 \frac{r\sin\varphi \cdot r^6\cos^6\varphi}{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2} \cdot r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi = \int_0^\pi \int_1^2 \frac{r^8 \sin\varphi\cos^6\varphi}{r^2}\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_0^\pi \int_1^2 r^6 \sin\varphi\cos^6\varphi\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi = \int_0^\pi \sin\varphi\cos^6\varphi \int_1^2 r^6\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi = \int_0^\pi \sin\varphi\cos^6\varphi \left[\frac{r^7}{7}\right]_1^2 \mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{2^7-1}{7}\int_0^\pi \sin\varphi\cos^6\varphi\ \mathrm{d}\varphi = \frac{127}{7}\cdot\left[-\frac{\cos^7\varphi}{7}\right]_0^\pi = \frac{127}{7}\cdot\frac{1+1}{7} = \frac{254}{49}.$$