Matematika ÉP2 2. zh megoldásai

Sélley Fanni

A csoport

1.

$$(y^3 + y^2 e^{1/3y^4}) \cdot \frac{x^2 - 4x + 2}{4x - 8} \cdot y' = e^{1/3y^4}$$
$$y(4) = 0$$

Megoldás. Osszuk le mindkét oldalt $e^{1/3y^4}$-el (azaz szorozzuk $e^{-1/3y^4}$-el) és szorozzuk mindkét oldalt $\frac{4x-8}{x^2-4x+2}$-vel! Így a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
(y^3 e^{-1/3y^4} + y^2) \cdot y' &= \frac{4x - 8}{x^2 - 4x + 2}, \\
(y^3 e^{-1/3y^4} + y^2) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{4x - 8}{x^2 - 4x + 2}, \\
\int (y^3 e^{-1/3y^4} + y^2) \mathrm{d}y &= \int \frac{4x - 8}{x^2 - 4x + 2} \mathrm{d}x, \\
-\frac{3}{4} \int -\frac{4}{3} y^3 e^{-1/3y^4} \mathrm{d}y + \int y^2 \mathrm{d}y &= 2 \int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 2} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Mivel $\left(e^{-1/3y^4}\right)' = -\frac{4}{3} y^3 e^{-1/3y^4}$, $\left(\frac{y^3}{3}\right)' = y^2$ és $(\ln|x^2 - 4x + 2|)' = \frac{2x-4}{x^2-4x+2}$, a következőt kapjuk:

$$-\frac{3}{4} e^{-1/3y^4} + \frac{y^3}{3} = 2 \ln|x^2 - 4x + 2| + c.$$

Használva az $y(4) = 0$ feltételt a következő értéket kapjuk c-re:

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{4} e^{-1/3y \cdot 0^4} + \frac{0^3}{3} &= 2 \ln|4^2 - 4 \cdot 4 + 2| + c, \\
-\frac{3}{4} - 2 \ln 2 &= c.
\end{aligned}$$

Tehát a kezdetiérték-feladat megoldása implicit alakban

$$-\frac{3}{4} e^{-1/3y^4} + \frac{y^3}{3} = 2 \ln|x^2 - 4x + 2| - \frac{3}{4} - \ln 4.$$

2.

$$y' - \frac{2x}{x^2 + 4} \cdot y = x(x^2 + 4) \sin x$$

Megoldás.

(i) $y_{H,Á} =?$

$$\begin{aligned} y' - \frac{2x}{x^2+4} \cdot y = 0, \\ y' &= \frac{2x}{x^2+4} \cdot y, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{2x}{x^2+4} \cdot y. \end{aligned}$$

Ennek a differenciálegyenletnek $y^{(1)} = 0$ konstansfüggvény megoldása. A többi megoldás megkeresése:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y &= \int \frac{2x}{x^2+4}\mathrm{d}x, \\ \ln|y| &= \ln|x^2+4| + c, \\ e^{\ln|y|} &= e^{\ln|x^2+4|+c}, \\ |y| &= e^c|x^2+4|, \\ y^{(2)} &= \pm e^c(x^2+4). \end{aligned}$$

(Megjegyzések: a második sorban azt használtuk, hogy $(\ln|y|)' = \frac{1}{y}$, $(\ln|x^2+4|)' = \frac{2x}{x^2+4}$, a harmadik sorban az exponenciális függvény kölcsönös egyértelműségét, a negyedik sorban a logaritmus definícióját, azaz hogy $\ln a$ éppen az a hatvány, amire e-t emelve a-t kapunk, végül pedig az abszolútérték definícióját.) Összeillesztve $y^{(1)}$-et és $y^{(2)}$-t kapjuk, hogy

$$y_{H,Á} = c(x^2+4), \qquad c \in \mathbb{R}.$$

(ii) $y_{IH,P} =?$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását a konstansvariációs módszerrel keressük, azaz a következő alakban:

$$y_{IH,P} = C(x)(x^2+4).$$

Mivel ez a függvény kielégíti az inhomogén egyenletünket, a következőt kapjuk $C(x)$-re:

$$\begin{aligned} y'_{IH,P} - \frac{2x}{x^2+4} \cdot y_{IH,P} &= x(x^2+4)\sin x, \\ (C(x)(x^2+4))' - \frac{2x}{x^2+4} \cdot C(x)(x^2+4) &= x(x^2+4)\sin x, \\ C'(x)(x^2+4) + 2xC(x) - 2xC(x) &= x(x^2+4)\sin x, \\ C'(x) &= x\sin x, \\ C(x) &= \int x\sin x \mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x \ \mathrm{d}x, \\ &= -x\cos x + \sin x + c. \end{aligned}$$

(Az utolsó előtti lépésben parciálisan integráltunk.) Legyen $c = 0$. Így

$$y_{IH,P}(x) = (\sin x - x\cos x)(x^2+4).$$

(iii)

$$y_{IH,\acute{A}}(x) = y_{H,\acute{A}}(x) + y_{IH,P}(x) = c(x^2+4) + (\sin x - x\cos x)(x^2+4), \qquad c \in \mathbb{R}.$$

3.

$$y'' - 4y' + 4y = 2xe^{3x}$$

Megoldás.

(i) $y_{H,\acute{A}}$=?

A karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{aligned} r^2 - 4r + 4 &= 0, \\ (r-2)^2 &= 0, \end{aligned}$$

tehát $r_{1,2} = 2$. Ekkor az általam elnevezett 1/b eset áll fenn, így

$$y_{H,\acute{A}} = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(ii) $y_{IH,P}$=?

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását a próbafüggvény-módszerrel keressük. Mivel $\alpha = 3 \neq 2 = r_{1,2}$, $\beta = 0$, $n = 1$ ezért nincs rezonancia (az általam elnevezett 2/a eset áll fenn) és a próbafüggvény a következő alakú:

$$y_{IH,P} = P_1(x)e^{3x} = (Ax+B)e^{3x}.$$

Határozzuk meg az A, B konstansokat! Mivel $y_{IH,P}$ az inhomogén egyenlet megoldása, a következő teljesül:

$$\begin{aligned} y''_{IH,P} - 4y'_{IH,P} + 4y_{IH,P} &= 2xe^{3x}, \\ ((Ax+B)e^{3x})'' - 4((Ax+B)e^{3x})' + 4(Ax+B)e^{3x} &= 2xe^{3x}, \\ (9Ax + 6A + 9B)e^{3x} - (12Ax + 4A + 12B)e^{3x} + (4Ax + 4B)e^{3x} &= 2xe^{3x}, \\ Ax + 2A + B &= 2x. \end{aligned}$$

Ez az egyenlőség csak akkor teljesülhet minden x-re, ha $A = 2$ és $2A + B = 0$, azaz $B = -4$. Így

$$y_{IH,P} = (2x-4)e^{3x}.$$

(iii)

$$y_{IH,\acute{A}}(x) = y_{H,\acute{A}}(x) + y_{IH,P}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + (2x-4)e^{3x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

B csoport

1.

$$(y^4 + y^2 e^{1/3y^5}) \cdot \frac{x^2-5x+2}{4x-10} \cdot y' = e^{1/3y^5}$$
$$y(5) = 0$$

Megoldás. Osszuk le mindkét oldalt $e^{1/3y^5}$-el (azaz szorozzuk $e^{-1/3y^5}$-el) és szorozzuk mindkét oldalt $\frac{4x-10}{x^2-5x+2}$-vel! Így a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
(y^4 e^{-1/3y^5} + y^2) \cdot y' &= \frac{4x-10}{x^2-5x+2}, \\
(y^4 e^{-1/3y^5} + y^2) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{4x-10}{x^2-5x+2}, \\
\int (y^4 e^{-1/3y^5} + y^2) \mathrm{d}y &= \int \frac{4x-10}{x^2-5x+2} \mathrm{d}x, \\
-\frac{3}{5} \int -\frac{5}{3} y^4 e^{-1/3y^5} \mathrm{d}y + \int y^2 \mathrm{d}y &= 2 \int \frac{2x-5}{x^2-5x+2} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Mivel $\left(e^{-1/3y^5}\right)' = -\frac{5}{3} y^4 e^{-1/3y^5}$, $\left(\frac{y^3}{3}\right)' = y^2$ és $(\ln|x^2-5x+2|)' = \frac{2x-5}{x^2-5x+2}$, a következőt kapjuk:

$$-\frac{3}{5} e^{-1/3y^5} + \frac{y^3}{3} = 2 \ln|x^2-5x+2| + c.$$

Használva az $y(5) = 0$ feltételt a következő értéket kapjuk c-re:

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{5} e^{-1/3y \cdot 0^5} + \frac{0^3}{3} &= 2 \ln|5^2 - 5 \cdot 5 + 2| + c, \\
-\frac{3}{5} - 2 \ln 2 &= c.
\end{aligned}$$

Tehát a kezdetiérték-feladat megoldása implicit alakban

$$-\frac{3}{5} e^{-1/3y^5} + \frac{y^3}{3} = 2 \ln|x^2-5x+2| - \frac{3}{5} - \ln 4.$$

2.

$$y' - \frac{2x}{x^2+4} \cdot y = x(x^2+4) \cos x$$

Megoldás.

(i) $y_{H,Á} =?$

$$\begin{aligned}
y' - \frac{2x}{x^2+4} \cdot y = 0,& \\
y' &= \frac{2x}{x^2+4} \cdot y, \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{2x}{x^2+4} \cdot y.
\end{aligned}$$

Ennek a differenciálegyenletnek $y^{(1)} = 0$ konstansfüggvény megoldása. A többi megoldás megkeresése:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y &= \int \frac{2x}{x^2+4}\mathrm{d}x,\\
\ln|y| &= \ln|x^2+4| + c,\\
e^{\ln|y|} &= e^{\ln|x^2+4|+c},\\
|y| &= e^c|x^2+4|,\\
y^{(2)} &= \pm e^c(x^2+4).
\end{aligned}$$

(Megjegyzések: a második sorban azt használtuk, hogy $(\ln|y|)' = \frac{1}{y}$, $(\ln|x^2+4|)' = \frac{2x}{x^2+4}$, a harmadik sorban az exponenciális függvény kölcsönös egyértelműségét, a negyedik sorban a logaritmus definícióját, azaz hogy $\ln a$ éppen az a hatvány, amire e-t emelve a-t kapunk, végül pedig az abszolútérték definícióját.) Összeillesztve $y^{(1)}$-et és $y^{(2)}$-t kapjuk, hogy

$$y_{H,\acute{A}} = c(x^2+4), \qquad c \in \mathbb{R}.$$

(ii) $y_{IH,P} =?$
Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását a konstansvariációs módszerrel keressük, azaz a következő alakban:

$$y_{IH,P} = C(x)(x^2+4).$$

Mivel ez a függvény kielégíti az inhomogén egyenletünket, a következőt kapjuk $C(x)$-re:

$$\begin{aligned}
y'_{IH,P} - \frac{2x}{x^2+4}\cdot y_{IH,P} &= x(x^2+4)\cos x,\\
(C(x)(x^2+4))' - \frac{2x}{x^2+4}\cdot C(x)(x^2+4) &= x(x^2+4)\cos x,\\
C'(x)(x^2+4) + 2xC(x) - 2xC(x) &= x(x^2+4)\cos x,\\
C'(x) &= x\cos x,\\
C(x) &= \int x\cos x\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\ \mathrm{d}x,\\
&= x\sin x + \cos x + c.
\end{aligned}$$

(Az utolsó előtti lépésben parciálisan integráltunk.) Legyen $c = 0$. Így

$$y_{IH,P}(x) = (x\sin x + \cos x)(x^2+4).$$

(iii)

$$y_{IH,\acute{A}}(x) = y_{H,\acute{A}}(x) + y_{IH,P}(x) = c(x^2+4) + (x\sin x + \cos x)(x^2+4), \qquad c \in \mathbb{R}.$$

3.

$$y'' - 6y' + 9y = 2xe^{2x}$$

Megoldás.

(i) $y_{H,Á}$=?
A karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{aligned} r^2 - 6r + 9 &= 0, \\ (r-3)^2 &= 0, \end{aligned}$$

tehát $r_{1,2} = 3$. Ekkor az általam elnevezett 1/b eset áll fenn, így

$$y_{H,Á} = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(ii) $y_{IH,P}$=?
Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását a próbafüggvény-módszerrel keressük. Mivel $\alpha = 2 \neq 3 = r_{1,2}$, $\beta = 0$, $n = 1$ ezért nincs rezonancia (az általam elnevezett 2/a eset áll fenn) és a próbafüggvény a következő alakú:

$$y_{IH,P} = P_1(x)e^{2x} = (Ax + B)e^{2x}.$$

Határozzuk meg az A, B konstansokat! Mivel $y_{IH,P}$ az inhomogén egyenlet megoldása, a következő teljesül:

$$\begin{aligned} y''_{IH,P} - 6y'_{IH,P} + 9y_{IH,P} &= 2xe^{2x}, \\ ((Ax+B)e^{3x})'' - 6((Ax+B)e^{3x})' + 9(Ax+B)e^{3x} &= 2xe^{2x}, \\ (4Ax + 4A + 4B)e^{3x} - (12Ax + 6A + 12B)e^{3x} + (9Ax + 9B)e^{3x} &= 2xe^{2x}, \\ Ax - 2A + B &= 2x. \end{aligned}$$

Ez az egyenlőség csak akkor teljesülhet minden x-re, ha $A = 2$ és $-2A + B = 0$, azaz $B = 4$. Így

$$y_{IH,P} = (2x + 4)e^{2x}.$$

(iii)

$$y_{IH,Á}(x) = y_{H,Á}(x) + y_{IH,P}(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + (2x + 4)e^{2x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$