A (klasszikus) adjungált és a Cramer-szabály

Sélley Fanni

2016. március 29.

1. Inverzszámítás az adjungált mátrixszal

Legyen A egy négyzetes mátrix. Ekkor a **klasszikus adjungáltja** az adj$A$-val jelölt mátrix, amely j-edik sorának i-edik eleme

$$(\mathrm{adj}A)_{ji} = (-1)^{i+j} \det M_{ij},$$

ahol M_{ij}-t úgy kapjuk, hogy A-ból elhagyjuk az i-edik sort és a j-edik oszlopot.

Tehát az adjungált mátrixot úgy kaphatjuk meg, ha legyártjuk azt a mátrixot amiben az i-edik sor j-edik eleme az M_{ij} mátrix determinánsa ellátva a sakktábla-szabály szerinti előjellel, majd az egészet transzponáljuk.

Az adjungált segítségével a következőképpen kaphatjuk meg A mátrix inverzét:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{adj}A.$$

Példa. Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét a adjungált segítségével!

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Megoldás.

(a)

$$\det M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 3, \qquad \det M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 15, \qquad \det M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 16,$$

$$\det M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = -8, \qquad \det M_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -6, \qquad \det M_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\det M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5, \qquad \det M_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -8, \qquad \det M_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4.$$

A sakktábla:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}.$$

Írjuk be egy mátrixba a fenti aldeterminánsokat a sakktáblából kiolvasott előjellel megszorozva:

$$\begin{bmatrix} +3 & -15 & +16 \\ -(-8) & +(-6) & -(-3) \\ +(-5) & -(-8) & +(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -15 & 16 \\ 8 & -6 & 3 \\ -5 & 8 & -4 \end{bmatrix}.$$

Transzponáljuk ezt a mátrixot, így megkapjuk az adjungáltat:

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -5 \\ -15 & -6 & 8 \\ 16 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Számoljuk ki A determinánsát:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 0 \cdot (24 - 21) - 1 \cdot (24 - 9) + 2 \cdot (28 - 12) = 17.$$

Tehát az inverz:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{adj}A = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 3 & 8 & -5 \\ -15 & -6 & 8 \\ 16 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

(b) Házi feladat. A végeredmény:

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -36 & 12 & 0 \\ 22 & -6 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Cramer-szabály

Láttuk, hogy az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert megoldhatjuk az

$$x = A^{-1}b$$

képlet segítségével. Ha az inverzet az adjungált segítségével számoljuk, a következő képletet kapjuk:

$$x = \frac{1}{\det A}\text{adj}A \cdot b.$$

Koordinátánként kiírva ez a következőt jelenti:

$$x_j = \frac{1}{\det A}((-1)^{1+j}b_1 \det M_{1j} + (-1)^{2+j}b_2 \det M_{2j} + \dots (-1)^{n+j}b_n \det M_{nj}), \qquad j = 1, \dots, n.$$

(A $(-1)^{i+j}$, $i = 1, \dots, n$ szorzók éppen a megfelelő aldeterminánsokhoz asszociált előjelek a sakktábla-szabály szerint.)

A Cramer-szabály egyszerűbben alkalmazható alakja. A fenti képlet ekvivalens az alábbi, egyszerűbben számítható képlettel:

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \qquad j = 1, \dots, n,$$

ahol A_j-t úgy kapjuk, hogy A mátrix j-edik oszlopát lecseréljük b-re. (Ebből úgy kaphatjuk meg az eredeti képletet, ha $\det A_j$-t éppen a j-edik oszlopa szerint fejtjük ki.)

Példa. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket a Cramer-szabállyal!

(a)
$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 6x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x_1 &= -3 \\ 9x_1 + x_2 &= 2 \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Megoldás.

(a) Az egyenletrendszerünk mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Számoljuk az egyenletrendszerünk megoldását a Cramer-szabállyal! Az előző példában láttuk, hogy

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 0 \cdot (24 - 21) - 1 \cdot (24 - 9) + 2 \cdot (28 - 12) = 17.$$

Így a következőt kapjuk:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \end{vmatrix}}{17} = \frac{1 \cdot (24 - 21) - 2 \cdot (6 - 14) + 5 \cdot (3 - 8)}{17} = -\frac{6}{17}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}}{17} = \frac{-1 \cdot (24 - 9) + 2 \cdot (0 - 6) - 5 \cdot (0 - 8)}{17} = \frac{13}{17}$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix}}{17} = \frac{1 \cdot (28 - 12) - 2 \cdot (0 - 3) + 5 \cdot (0 - 4)}{17} = \frac{2}{17}$$

(Természetesen a $\det A_j$ determinánsokat nem *kötelező* a j-edik oszlop szerint kifejteni, de én most ezt tettem, hogy szemléltessem a kapcsolatot a két képlet között, amit megadtam a Cramer-szabályra.)

(b) Szintén házi feladat. A következő kell hogy kijöjjön:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \\ -\frac{13}{2} \end{bmatrix}.$$